ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

EUCLIDIS ELEMENTA

EX OPTIMIS LIBRIS

IN USUM TIRONUM

GRAECE EDITA

AB

ERNESTO FERDINANDO AUGUST,

GYMNASII REGII JOACHIMICI PROFESSORE.

PARS PRIMA,

QUAE PRIORES NOVEM ELEMENTORUM LIBROS CONTINET CUM QUATUOR APPENDICIBUS ET QUINQUE TABULIS LITHOGRAPHICIS.

BEROLINI, MDCCCXXVI.

IMPENSIS T. TRAUTWEINII.

LONDINI, APUD TREUTTEL ET WÜRZ, TREUTTEL FILIUM ET RICHTER.

PARISIIS, APUD TREUTTEL ET WÜRZ.

Praefatio.

Augescente in dies numero eorum, qui cum humanissimo antiquitatis studio mathematicarum litterarum institutionem conjungere student, operae pretium facturus esse mihi videbar, si Elementorum Euclidis textum graecum denuo recognitum in usum scholarum edendum curarem. Quae enim hucusque prodierunt integri textus editiones e bibliopolarum officinis aut disparuerunt aut majore veneunt pretio, quam quae ab omnibus harum rerum curiosis comparari possint. Tres enim tantum exstare editiones, quae integrum textum graecum amplectantur, notum est, quarum antiquissima Basileae anno 1533 impressa est, addito Procli commentario in primum Elementorum librum, qui graece nusquam alibi apparuit. Continet haec Basileensis editio nihil nisi textum graecum e duorum codicum comparatione conformatum a Simone Grynaeo, qui sub finem epistolae ad Cutbertum Constallum Pontificem, praefationis loco operi praefixae, haecce addidit. „Nullis, dum in hoc sum, laboribus pe-„perci. Intelligi ex eo potest, quod tam diversis e

„locis exemplaria per amicos partim, partim ipse sus„cepta perigrinatione conquisivi. Euclidis alterum (nam „usi duobus sumus) Lazarus Bayfius Venetiis, alterum „Parrhysiis Joann. Ruellius amicis, mihi ipsi Procli „commentaria Oxonii Joann. Claymundus candide „suppeditabat, viri optimi et humanissimi, literis ju„vandis et exornandis facti, quod ipsorum monumenta „docent." — Codicis instar habenda esse videtur haec editio, cum typographi sphalmata, quae non raro occurrunt, ejusmodi sint, ut ubique veram codicum lectionem facillima conjectura dijudicare possis. Prodiit haec editio ex officina Joan. Hervagii atque formae maximae paginas continet 268. — Procli commentarii seorsum cum scholiis duobus brevissimis 115 paginas implent. Toti operi hic titulus praescriptus est: „*Εὐκλείδου στοιχείων βιβλ. ιε· ἐκ τῶν Θέωνος συνου„σιῶν. Εἰς τοῦ αὐτοῦ τὸ πρῶτον ἐξηγημάτων Πρό„κλου βιβλ. δ.* Adjecta praefatiuncula, in qua de dis„ciplinis mathematicis nonnihil. Basileae apud Joan. „Hervagium anno MDXXXIII. Mense Septembri."

Multae quidem post illam editiones Euclidis vulgabantur, sed quae aut Bartholomaei Veneti, Zamberti Candallae, Federici Commandini, Dasypodii, Clavii aliorumque latinas versiones continebant, aut singulorum tantum librorum graecum textum versionibus additum lectoribus offerebant. Fuere quoque, qui in Euclide edendo propositiones tantum graece exhiberent, demonstrationes ipsas in latinum sermonem converterent. Sed hi ad unum omnes, si quid graece

addiderunt, Hervagiana usi sunt editione, quamobrem textus graeci integritatem spectanti nullius momenti sunt editiones eorum.

At duobus fere seculis interjectis nova operum Euclidis editio Oxoniae prodiit, quae graecum textum cum latino conjunctum codicibusque adhibitis emendatum continebat; cui hic est titulus. „*Εὐκλείδου τὰ Σωζόμενα.* Euclidis quae supersunt „omnia. Ex recensione Davidis Gregorii M. D. „Astronomiae Professoris Saviliani et R. S. S. Oxo-„niae e theatro Scheldoniano An. Dom. MDCCIII.“ Quae ad hanc editionem perficiendam editoris fuerint adjumenta, ex hisce Praefationis verbis intelligi potest. „Quid porro nos in iis (elementis) eden-„dis praestitimus, paucis explicemus. Primo, Tex-„tum graecum quod attinet, ut is quam emendatissi-„mus et castigatissimus prodiret, modis omnibus cu-„ravimus; adhibitis, prout opus esset, in consilium „Mss. codicibus haud paucis melioris notae, quos in „hunc ipsissimum usum Academiae pridem legarat „magnus Savilius; ut et Castigationibus ejus propria „manu adscriptis ad marginem editionis Hervagianae. „Accessit singularis et nunquam satis praedicanda „amicissimi D. Joannis Hudsoni S. T. P. Protobi-„bliothecarii Bodleiani industria in expoliendis Grae-„cis hisce et quidem universa editione a vitiis etiam „typographicis liberanda. Nempe in omnes etiam „infimas operis nostri partes se demisit vir optimus. „Textum Hervagianum, ante paulo quam in typo-„graphorum manus traderetur, accurate interpungen-

„dum et distinguendum curavit. Latina cum Grae-„cis per totum in Elementis praesertim ac Datis „summa fide contulit. Ubi ea a se invicem discre-„pantia deprehenderentur, vel etiam Graecum ipsum „suspectum haberetur, consulti illico Mss. codices, quo-„rum lectio, si cum Latinis congrueret, ad marginem „adscripta exstabat; sin minus, apposita stellula, ut „exinde judicandi occasio mihi daretur, utra demum „lectio Geometricis rationibus magis conveniret. De-„nique quo textus puritati melius consuleretur, etiam „schedas singulas, mox ut eas a prelo madentes ex-„ceperat, semel atque iterum legere et accurate re-„censere haud gravatus est; eandemque plane in Eu-„clidis nostri, quam in aliorum auctorum Graecorum „monumentis a se summa cum laude evulgatis prae-„stitit diligentiam.“

Atque revera tanta cura haec editio instituta est, ut digna esset, qua per totum seculum matheseos studiosi nec graeci sermonis imperiti uterentur.

Cum haec autem in bibliopolarum officinis rarior esse coepisset, nuper Peyrardi viri doctissimi ac de Graecorum Mathematicorum cognitione propaganda inter Gallos meritissimi opera atque industria factum est, ut Elementa et Data Euclidis denuo cum codicibus collata graece in lucem prodirent, latina et gallica versione addita. Cujus operis titulus hicce est: „Les „ouevres D'Euclide, en Grec, en latin et en français „D'après un manuscrit très ancien, qui était resté „inconnu jusqu'à nos jours par F. Peyrard, Traduc-

„teur des oeuvres d'Archimède, ouvrage approuvé „par l'institut de France. Dedié au Roi, Tome pre- „mier a Paris 1814 (continet Elem. Lib. I — VII. 518 pag. „formae quadratae). Tome second à Paris 1816 (continet „Elem. Lib. VIII — X. 518 pag.) Tome troisième à Paris „1818 (continet Elem. lib. XI—XIII. Data, Hypsiclisque duo libros 616 pag.) „Chèz M. Patris imprimeur-libraire, rue de „la Colombe en la cité no. 4.

Quam textus graeci edendi curam quaeque auxilia habuerit vir doctissimus, ipsum in praefatione (p. XII.) disserentem audiamus.

„Mea versio operum Archimedis vulgata est anno „1808, quo quidem tempore vertendis Euclidis ope- „ribus ultimam manum admoveram. Sed antequam „prelo subjiceretur, consulere volui codices manu- „scriptos bibliothecae imperialis de plurimis locis, „qui mihi videbantur mutilati vel corrupti in editione „Oxoniae, qua usus fueram in convertendo Euclide. „Hi codices, tres et viginti numero, mihi commissi „fuerunt et statim animadverti, editionem Oxoniae nul- „lius horum manuscriptorum esse exemplar; hos „omnes manuscriptos explere lacunas et restituere „locos corruptos in editione Basiliensi et in editione „Oxoniae, quae nihil aliud est, quam ejus exemplar. „Quin etiam animadverti, hos omnes manuscriptos, „manuscripto 190 tantum excepto, inter se esse ferme „consentaneos; manuscriptum autem 190 explere la- „cunas, restituere locos corruptos, qui ope aliorum „manuscriptorum nec explebantur nec restituebantur.“

„Manuscriptus 190 ad bibliothecam Vaticanam „pertinebat: is Roma Lutetiam a comite de Peluse „fuit missus.

„In manuscripto graeco 2348, sub finem saeculi „decimi sexti exarato, quique continet Euclidis data „cum quinque antiquissimis Vaticanis manuscriptis „graecis collata a Josepho Auria, celebri Geometra, nec „unam quidem reperias e pretiosissimis lectionibus ma- „nuscripti 190 variantibus; quod probare videtur, hunc „manuscriptum tunc temporis in bibliotheca Vaticana „fuisse desideratum etc.

„Hoc manuscripto 190 mihi commisso, statim in „animum incidit edere graece latine et gallice Elementa „et Data, sola procul dubio, quae supersint Euclidis „opera. Quapropter contuli manuscriptum 190 cum „editione Oxoniae exaravique lectiones variantes in „margine operis impressi.

„His perlectis ad variantes lectiones margini appo- „sitas sedulus attendi et aliis manuscriptis accersitis, hanc „aut illam lectionem variantem in editionem Parisiensem „admisi, vel ab ea rejeci. Manuscriptum 190 potiorem „habui, quotiescunque nulla mihi fuit ratio, cur hanc aut „illam lectionem praeferrem. Textum graecum sic con- „stitutum in latinum converti et quaecunque ex vari- „antibus, quas admiseram, lectionibus mutari fuit op- „portunum, haec in versione gallica mutata sunt.

„Mea latina versio ad verbum textui graeco con- „gruit, nisi quid peculiare me coëgerit, ut secus fa- „cerem. Nonnulli in mea versione occurrent forte

„Hellenismi aut saltem quaedam locutiones a quibus „lingua latina abhorrere videtur. Illas quidem vitare „potuissem; sed mea versio cum textu graeco minus „fuisset consentanea etc.

„Summa (pag. XVI.) diligentia usus sum, ut „mea editio quam maxime emendata esset; specimina „a me praelecta, lecta fuerunt deinde a D. Jan„net necnon a D. Patris, mei operis editore, rursus„que a me relecta. In nullo specimine prius sub„scripsi prelo subjiciatur, quam illud mendis om„nibus fuisset expurgatum. . . . D. Nicolopoulo, „Smyrnaeus, vir eximia doctrina commendabilis et „diligentissimus emendator, sponte sua legit plurima „specimina. D. Patris, qui linguam graecam latinam „et gallicam diu excoluit, summa cura et diligentia „usus est, ut mea editio prelis gallicis honori esset; „in speciminibus legendis versionem latinam et gal„licam cum textu graeco perattente comparabat et „margini notationes apponebat etc. . . .

„Dixi, (p. XXVIII.) in bibliotheca imperiali adesse ma„nuscriptos graecos tres et viginti. Eorum manuscrip„torum secundum vetustatis ordinem hic est index:

„No. 190. Is manuscriptus prae se fert omnia „indicia manuscriptorum sub finem noni saeculi exara„torum. Data proxime sequuntur librum 13. Liber 14 „et liber 15 post Data collocati sunt; quod in nullo con„tigit alio manuscripto. In mea editione eundem ordi„nem sum secutus, ipsomet D. Lagrange suadente.

„No. 1038. Is manuscriptus, in quo deest initium

„elementorum usque ad propositionem octavam secundi „libri, ineunte undecimo saeculo exaratus videtur. Is „manuscriptus, in quo dreprehenduntur reliqua Ele- „menta et Data, Roma Parisios fuit missus (una cum an- „tecedente) a Comite de Peluse.

„No. 2466. Is manuscriptus, in quo deprehen- „duntur tredecim libri elementorum, duodecimo „saeculo exaratus videtur.

„No. 2344. Is manuscriptus, in quo tantum de- „prehenduntur tredecim priores libri Elementorum, „saeculo duodecimo exaratus videtur.

„No. 2345. Is manuscriptus, in quo tantum de- „prehenduntur tredecim priores libri Elementorum, „saeculo decimo tertio exaratus videtur.

„Omnes ii manuscripti sunt membranacei; sub- „sequentes sunt cartacei:

„No. 3373. Is manuscriptus, in quo deprehendi- „tur Euclidis Geometria cum Scholiis, saeculo decimo „quarto exaratus videtur.

„No. 2342. Is manuscriptus, in quo deest initium „usque ad propositionem 23 libri primi et in quo de- „prehenduntur quindecim libri Elementorum et Data, „saeculo decimo quarto exaratus videtur.

„No. 2762. Is codex, in quo tantum deprehen- „duntur octo priores libri Elementorum, sub finem „saeculi decimi quinti exaratus videtur.

„No. 2346. Is codex, in quo tantum deprehen- „duntur tredecim priores libri Elementorum, saeculo „decimo quinto exaratus videtur.

„No. 2481. Is codex, in quo tantum deprehen-„duntur decem priores libri Elementorum, saeculo de-„cimo quinto exaratus videtur.

„No. 2531. Is codex in quo tantum deprehen-„duntur tredecim priores libri Elementorum, saeculo „decimo quinto exaratus videtur.

„No. 2343. Is codex, in quo deprehenduntur „quindecim libri Elementorum saeculo decimo sexto „exaratus videtur.

„No. 2547. Is codex, in quo tantum deprehen-„duntur tredecim priores libri Elementorum et Data, „ineunte saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2448. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo quarto exaratus videtur.

„No. 2352. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, a. J. Rossi fuit exaratus anno 1488.

„No. 2363. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo quinto exaratus videtur.

„No. 2349. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2350. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 1981. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2467. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2472. Is codex, in quo Data deprehendun-„tur, saeculo decimo sexto exaratus videtur, sub finem „nonnulla desiderantur.

No. 3366. Is codex, in quo Data deprehenduntur, saeculo decimo sexto exaratus videtur.

„No. 2348. Is codex comprehendit Euclidis „Data, collata cum quinque antiquissimis manuscrip- „tis bibliothecae Vaticanae a Josepho Auria Neapo- „litano, celebri Geometra saeculi decimi sexti dece- „dentis."

Si cui in exscribendis horum eruditissimorum virorum praefationibus longior fuisse videar, hoc eo consilio a me factum esse intelligat, ut circumspicere possint lectores, quemadmodum usque ad nostra tempora codicibus Euclidis, quorum permagnus est numerus, usi sint Elementorum editores. Nulla enim praeterea exstat elementorum graecorum editio integra, et in singulis libris edendis nemo versatus est, quin, omissa codicum cura, in una alterave illarum describenda acquieverit. Quum igitur textum graecum in scholarum usum jam ab hinc annis quatuor edere statuissem, illas tres editiones accuratissime inter se comparavi, varietates scripturae adnotavi, textum omnibus locis ita adornavi, ut nullam Geometra detegat mendam, nulla Graecae linguae peritus sermonis discrepantia offendatur. Non neglexi locupletissimum Procli commentarium, qui multa exhibet a nostrorum codicum scriptura diversa, quae praeferenda mihi videbantur. Nullo autem loco textum vulgatarum editionum immutavi, nisi Proclo meliora offerente Euclideque digniora. Cum autem dif-

ficile non sit ad judicandum, quae Proclus in suo Elementorum exemplari scripta invenerit, quaeque ipse explicandi causa addiderit; id potissimum faciendum esse putavi, ut nihil novi reciperem, quin Euclidis esse ex ipsis Procli verbis pateret.

Hac operis parte finita, summa amplissimi Senatus res ecclesiasticas et scholasticas in civitate nostra auspicatissime moderantis cura ac benevolentia contigit, ut tres codices e bibliotheca Monacensi mihi committerentur, quorum qui antiquissimus est cum nonnulla alia philosophica et mathematica scripta tum multa continet, quae ad Euclidem pertinent: Phaenomena, Optica, Data, Catoptrica. De quo libro manuscripto apud Hardtium in Descriptione Manuscriptorum graec. Augusta Vindelic. in bibliothecam Reg. Monacens. translatorum haec legimus:

„Codex 361. Bombicinus et Chartaceus, titulis „et initialibus miniatis, in carta spissiore, in folio, lit„teris minutissimis et nitidissimis, cum scholiis mar„ginalibus, diversa manu. Saec. XIII. XIV. XV. in „foliis 136, male conservatus, oris laceris etc. et in„scriptus Chartae mathematicae."

Quae hujus codicis partes Euclidis opuscula continent, bombicinae sunt et antiquissimae totius voluminis. Multas inveni lectiones a vulgatis editionibus diversas, quibus Datorum, Phaenomenorumque etc. textus nonnullis locis emendari posse videtur. Quamobrem hunc codicem diligentissime comparavi, scripturae varietates adnotavi, scholia marginalia exscripsi, usurus aliquando iis, quae sic praeparaveram, in majorem Euclidis operum omnium editionem.

Alterum codicem No. 76 cartaceum Euclidis

Data et Phaenomena cum scholiis marginalibus continentem multo recentiorem et ex illo prorsus exscriptum esse, primo adspectu animadverti, cum lacunas haberet, ubi ob cartam vel corrosam vel laceram in illo exemplari textus legi non poterat.

Tertius Codex No. 102. recentiore quidem tempore conscriptus esse videtur, sed, praeter multa philosophica Jamblichi aliorumque scripta, scholia continet graeca ad Elementorum Euclidis libros tredecim omnes, excepto quarto, quae nusquam impressa sunt, nisi quod maxima ex parte latinis scholiis, quae Clavius operi suo addidit, materiem praebuere.

Excerpta sunt haec scholia de margine codicis cujusdam Elementorum Euclidis, cujus rei asterisci aliaque scriptorum signa, quibus textus loci indicari solent lectoribus, certissima sunt indicia. Quae omnia descripsi eo consilio, ut in commentario de Elementis aliquando conscribendo adjumento mihi essent.

Sic praeparatus hanc graeci textus editionem suscepi, in qua multa, quae priorum editorum visum effugisse videntur, emendata reperies.*) Continet tomus

*) Ne mirum lectoribus videatur atque insolens me editionum nuperrime vulgatarum a Camerero et Neidio mentionem non fecisse; de utraque pauca hic addam. Prior earum, quae Berolini annis MDCCCXIV—V. prodiit, omnium quidem Elementorum Euclidis nomen in fronte gerit; sed sex tantum libri priores duobus tomis absoluti sunt. Opus summa eruditione nec satis laudanda cura elaboratum, cui quid debeam magis in commentariis meis, si quando prodibunt, quam in hac graeci textus recensione ipsa apparebit; cum in commentariis quidem rebus ipsis singularem editor attulerit lucem, textum graecum autem quod attinet, quamvis multa emendandae scripturae auxilia adhibuerit, rem tamen ipse non ita absolverit, ut opere suo veterum editionum lectionem supervacaneam fecerit. — Altera illa Elementorum editio Neidii, Halae Saxonum 1825. publicata, sex priores Elementorum Euclidis libros una cum undecimo duodecimoque complectitur, e recensione Peyrardi, addito brevissimo in hos octo libros glossario. Editio satis commendabilis tironibusque accommodata, in qua tamen typographi Parisiensis errores creberrimos repetitos videmus. Cujus rei cum

primus priores novem elementorum libros. Adjectae sunt quatuor appendices in usum tironum conscriptae, quarum prima illas demonstrationes alteras continet, quae passim in singulis libris leguntur, quasque, quia Euclidis esse non videntur, a ceteris sejunxi. In secunda appendice locum aliquem ex Proclo protuli, in quo clari mathematici, qui ante Euclidem vixerunt, enumerantur ac de vita Euclidis ipsius pauca narrantur. Tertia continet ea, quae de vita et scriptis Euclidis memoriae tradita sunt. In quarta denique de elementis Euclidis fusius disserui. Formae sive figurae ad demonstrationes illustrandas necessariae in singulis tabulis ita delineatae sunt, ut mathematices perito conspectum theorematum problematumque omnium exhibeant, neque liber ipse evolvendus sit ei, qui, quo loco Euclides singula demonstraverit, in memoriam sibi revocare voluerit; quippe congruos reperies et propositionum et figurarum numeros. Ubi autem diversae exstant demonstrationes, literarum signa minora punctorumque series pro lineis exaratae diversitatem indicant.

In revisendis typothetarum speciminibus quamvis summopere enixus omnia tamen ut tollerentur

odiosum sit multa, tametsi possem, exempla proferre; quintam lectori satis erit evolvisse sexti libri propositionem, (apud nos pag. 155); in qua una apud Neidium quinque inveniuntur typographica menda ex editione Parisiensi profecta 1) lin. 21. 22. (paginae 155 editionis nostrae) *τὴν ΒΑ* — Neidius *ἡ ΒΑ*. 2) lin. 24. *αἱ ὁμόλογοι* — *N. ὁμόλογοι*. 3) lin. 26. 27. *τὴν ὑπὸ ΒΑΓ* (sc. *γωνίαν*) — *N. τὸν ὑπὸ ΒΑΓ*. 4) pag. 156. lin. 21. *ἡ ὑπὸ ΑΓΒ* — *N. ἡ ὑπὸ ΑΒΓ*. 5) lin. 22. *ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ* — *N. ἡ πρὸς τῷ Α πρὸς τῷ Δ*. — Camerer aliquanto diligentior primum, tertium, quintum expunxit; secundum autem et quartum nescio qua incuria admisit; quamquam ne unum quidem eorum reperitur in editione Oxoniensi. Haec non exprobrandi causa, sed excusandi gratia scripsi, quod utramque editionem primariis hujusce mei operis adminiculis non adnumeraverim.

menda efficere non potui. Quis enim editor inexpugnabile istud gramen eruncare ab stirpe solus valuit? Nihilominus tamen omnes plagulas denuo perlustrans pauca tantum inveni, quae non emendata lectorem aut offendere aut confundere possint. Haec omnia ultima pagina notata sunt. *)

Tomus secundus, qui intra anni spatium prodibit, ceteros Elementorum Euclidis libros amplectetur Hypsilisque additamenta vulgo tredecim elementorum libris adjecta. Addam huic alteri tomo usitatissimorum mathematicorum verborum explicationes ordine alphabetico conscriptas, ut, qui apud Euclidem et Proclum exstant termini mathematici, facilius a tironibus intelligi possint. Ita enim nostris temporibus linguae graecae studium vigere video, ut superfluum videatur versionem latinam graeco textui addere; praesertim cum in rebus mathematicis lingua graeca intellectu facilior sit, quam latina. Continebit etiam tomus alter omnes scripturae varietates, quae gravioris momenti sunt. His duobus tomis absolutis Commentarium ad Elementa editurus sum, criticum et historicum, varias lectiones omnium editionum, diligentissime collatas nec non scholia graeca adnotationesque continentem ex antiquis recentioribusque scriptoribus ad singula elementa explicanda congestas. Sed jam tempus est, ut futura Deo propitio, praesentia lectori benevolo commendem.

Scripsi Berolini Cal. Octobr. MDCCCXXVI.

*) Quae illic omissa sunt hoc loco lectori emendanda proponere liceat: pag. 304. lin. 28. Xantho (scribend. Xanthi) pag. 305 lin. 3. Mathematico (scr. mathematica.) pag. 308. lin. 20. scribat delendum est.

E. F. August.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ.

Ὅροι.

ά. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν. 1.

β΄. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές. 2.

γ΄. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα. 3.

δ΄. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. 4.

έ. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει. 5.

ϛ΄. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί. 6.

ζ΄. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ᾽ ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται. 7.

ή. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν, ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων, καὶ μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων, ἡ πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις. 8.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ τὴν γωνίαν περιέχουσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος ἡ γωνία καλεῖται. 9.

ί. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι· καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ᾽ ἣν ἐφέστηκεν. 10.

ιά. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς. 11.

ιβ΄. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς. 12.

ιγ΄. Ὅρος ἐστὶν, ὅ τινός ἐστι πέρας. 13.

ιδ΄. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον. 14.

ιέ. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον, ἣ καλεῖται περιφέρεια, πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. 15.

ις'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται. 16.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· (ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.) 17.

ιή. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, 18.

ιθ'. Κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτὸ, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν. (Vulgo *Τμῆμα κύκλου* etc. conf. def. 6. Lib. III. p. 65) 19.

κ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπ' εὐθειῶν γραμμῶν περιεχόμενα. 20.

κά. Τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν. 21.

κβ'. Τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων. 22.

κγ'. Πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα. 23.

κδ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς. 24.

κέ. Ἰσοσκελὲς δὲ τὸ δύο μόνον ἴσας ἔχον πλευράς. 25.

κς'. Σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς. 26.

κζ'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ μίαν ἔχον ὀρθὴν γωνίαν. 27.

κή. Ἀμβλυγώνιον δὲ τὸ μίαν ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν. 28.

κθ'. Ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας. 29.

λ'. Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν, ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον. 30.

λά. Ἑτερόμηκες δὲ, ὃ ὀρθογώνιον μὲν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ. 31.

λβ΄. Ῥόμβος δὲ, ὃ ἰσόπλευρον μὲν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ. 32.

λγ΄. Ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον. 33.

λδ΄. Τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω. 34.

λε΄. Παράλληλοι εὐθεῖαί εἰσιν, αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις. 35.

Αἰτήματα.

α΄. Ἠτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 1.

β΄. Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν. 2.

γ΄. Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράψαι. 3.

δ΄. Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι. 4.

ε΄. Καὶ, ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες. 5.

ϛ΄. Καὶ δύο εὐθείας χωρίον μὴ περιέχειν. 6.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

α΄. Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα. 1.

β΄. Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα. 2.

γ΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα. 3.

δ΄. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἄνισα. 4.

ε΄. Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπά ἐστιν ἄνισα. 5.

ϛ΄. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 6.

ζ΄. Καὶ τὰ τοῦ αὐτοῦ ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 7.

η΄. Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ᾽ ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. 8.

θ΄. Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζόν ἐστιν. 9.

Πρότασις α΄.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι. 1.

Ἔκθεσις. Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ. Fig. 1.

Προσδιορισμός. Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κατασκευή. Κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ᾽ ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ ΓΒ.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΒΓΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΓΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἴση ἐστίν· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ ΑΒ ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Συμπέρασμα τὸ πρῶτον. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ.

Συμπέρασμα τὸ καθόλου. Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συνέσταται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. 2.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθεῖα τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι. Fig. 2.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΛ ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΛ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις γ.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. 3.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν. Fig. 3.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. Ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ Γ, ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 4.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Fig. 4.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ, διὰ τὸ

ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει, διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφηρμόκει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. Εἰ γὰρ, τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ, ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ, καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται· ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι, καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί, καὶ προςεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 5.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προςεκβεβλήσθωσαν ἐπ᾽ εὐθείας ταῖς ΑΒ ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ. Fig. 5.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ,

καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσιν τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ ΗΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ εἰσι πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση, καί εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται. 6.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. Fig. 6.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΑΓ ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστὶν, καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις. 7.

Εἰ γὰρ δυνατὸν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ ΓΒ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΔ ΔΒ ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, συνεστάτωσαν πρός ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ Γ Δ τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις τά Α Β· ὥστε ἴσην εἶναι τὴν Fig. 7.

μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. 8.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Fig. 8.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ ΑΓ ἐπὶ τὰς ΕΔ ΔΖ. Εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ

ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ ΔΕ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δυσὶ ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. Οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα, ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν, οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ ΔΖ. Ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει, τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθείων περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθύγραμμον γωνίαν δίχα τεμεῖν. 9.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ· δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ Fig. 9. ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ ΑΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστι· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ

ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην 10.
δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· Fig. 10.
δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ ΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ 11.
δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν Fig. 11.
σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΓΕ κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ ΔΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστὶ, καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. 12.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, τὸ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Fig. 12.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ ΓΘ ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ᾽ αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ ΘΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ ΘΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση. καί εἰσιν ἐφεξῆς. Ὅταν δὲ εὐ-

θεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ, ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ'.

Ὡς ἂν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει. 13.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. Fig. 13.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαὶ εἰσιν. Εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΕ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΕ ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ ΕΒΑ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΒΑ ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ ΕΒΑ ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καί ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσι, καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ὡς ἂν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας

ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι ἑξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 14.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι ἑξῆς αἱ ΒΓ ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ ΑΒΔ δυσὶ ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ. Fig. 14.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ΑΒΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσιν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΑΒΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι ἑξῆς μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν· ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρότασις ιε.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιήσουσι. 15.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ. *Fig.* 15.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ ΑΕΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ ΔΕΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ ΔΕΒ ἴσαι εἰσί. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν ὅτι, ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς τέσσαρας γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν.

(Κἂν πλείους εὐθεῖαι τῶν δυοῖν δι' ἑνὸς σημείου τέμνωσιν ἀλλήλας, οἷον τρεῖς ἢ τέσσαρες ἢ ὁποσαιοῦν· αἱ γιγνόμεναι γωνίαι πᾶσαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι δείκνυνται.)

Πρότασις ις'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν. 16.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς *Fig.* 16.

γωνία

γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τό Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστὶν, κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ· Μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὲ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 17.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Fig. 17.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΑΒΓ. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ

ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Ὁμοίως δὲ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλασσονές εἰσι, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει. 18.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ. Fig. 18.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΔΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον, τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει. 19.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν. Fig. 19.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ

ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. Οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστί· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ΄.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μειζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 20.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ ΓΑ τῆς ΑΒ. Fig. 20.

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστί· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΒΑ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ ΑΓ τῆς ΒΓ· Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσι. 21.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ, ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ ΔΓ, λέγω ὅτι αἱ ΒΔ ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν, τῶν ΒΑ ΑΓ, ἐλάσσονες μέν εἰσι, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι, τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Fig. 2

Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσι· κοινὴ προςκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ ΑΓ τῶν ΒΕ ΕΓ μείζονές εἰσι. Πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσι, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ ΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ τῶν ΒΕ ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ ΑΓ τῶν ΒΔ ΔΓ μείζονές εἰσι.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστί· τοῦ ΓΔΕ ἄρα τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συ-

σταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάσσονες μέν εἰσί, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι, πάντη μεταλαμβανομένας. 22.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α Β Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν, πάντη μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α Β Γ τρίγωνον συστήσασθαι. Fig. 22.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ ἄπειρος δὲ κατά τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δέ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· καὶ πάλιν κέντρῳ μέν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ κύκλοι κατὰ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ ΚΗ· λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν, τῶν ἴσων ταῖς Α Β Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γάρ τό Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΛΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ ΖΗ ΗΚ τρισὶ ταῖς Α Β Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ ΖΗ ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α Β Γ, τρίγωνον συνίσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. 23.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ· δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι. Fig. 23.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ ΔΕ ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΕΓ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ ΓΕ δυσὶ ταῖς ΖΑ ΑΗ ἴσαι εἰσιν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴση γωνία εὐθύγραμμος συνίσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κδ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν 24.

ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, γωνία δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἐστίν. Fig. 24.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΗ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἐστὶ· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΗΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην. 25.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ ΔΖ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν· Fig. 25.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ ἡ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἀλλ᾽ οὐδὲ μὴν ἐλάσσων· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδ᾽ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ· καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθείων περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευ- 26.

ραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ ἴσην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Fig. 26.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ·

λέγω πάλιν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἔσται.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων, εἰ δυνατὸν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφʼ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστὶν· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μίᾳ πλευρᾷ ἴσην, ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνιᾷ ἴσην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 27.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· Fig. 27.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ ΓΔ συμπεσοῦνται, ἤτοι ἐπὶ τὰ Β Δ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Α Γ. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β Δ μέρη κατὰ τὸ Η.

Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΗΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β Δ μέρη. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι, παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κη.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι. 28.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ Fig. 28.

ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ ἴσαι εἰσί· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ, ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ΄.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. 29.

Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ· λέγω ὅτι τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. *Fig.* 29.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ,

μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ, καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῆς ὑπὸ ΗΘΔ, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Αἱ δὲ ἀπ᾽ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα.

Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ ΗΘΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ, καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην, καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 30.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· Fig. 30. *λέγω ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστὶ παράλληλος.*

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ

ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. Καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἴσιν ἐναλλάξ. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λά.

31. *Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.*

Fig. 31. Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῆς ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ ΕΖ εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκε, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λβ'.

32. *Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.*

Fig. 32. Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ· λέγω ὅτι ἡ ἐκ-

τὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ ΑΒΓ· καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί· Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἐκτὸς γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ ΓΒΑ ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης, ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστὶ, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. 33.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ ΒΔ· λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. Fig. 33.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΓ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἔσονται ἴσαι, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ ΒΔ εὐθεῖα ἐμπεσοῦσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΒ ΓΒΔ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Πρότασις λδ΄.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. 34.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Fig. 3

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς

αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ· αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΔ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστίν· ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δὲ ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει· Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΓ ΓΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστί· καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΔΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΓΔΒ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λέ.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 35.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ ΕΒΓΖ ἐπὶ Fig. 35.
τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΖ ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒΓΖ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἴση ἐστίν· ὥςτε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ ΔΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί· Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἴσον ἐστίν· κοινὸν προςκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛ.

Τὰ παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 36.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ ΒΗ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ. Fig. 3

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΓΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. Εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΒΕ ΓΘ, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι· καὶ αἱ ΕΒ ΓΘ ἄρα ἴσαι τέ εἰσι καὶ παράλληλοι. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ,

καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ ΑΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστὶν ἴσον· ὥςτε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ΄.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως 37.
ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΒΓ, ἐπὶ τῆς αὐτῆς Fig. 37.
βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ ΒΓ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ ΔΒΓΖ· καὶ ἴσον τὸ ΕΒΓΑ τῷ ΔΒΓΖ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λή.

Τὰ τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 38.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ ΑΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Fig. 38.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ᾽ ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τό ΖΕΔ τρίγωνον, ἡ γάρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. Τὰ δὲ τῶν ἴσων ἡμίση ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. 39.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αυτῆς βάσεως ὄντα τῆς ΒΓ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Fig. 39.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή· ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθεῖα παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γάρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶν, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μ΄.

Τὰ ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. 40.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΓΔΕ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ ΓΕ καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν. Fig. 40.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ.

Εἰ γὰρ μή· ἤχθω διὰ τοῦ Α τῇ ΒΕ παράλληλος ἡ ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ ΓΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΕ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΔΓΕ τρίγωνον ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΓΕ τριγώνῳ, τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα

παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΒΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα, τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστι παραλλήλοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μά.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου. 41.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ ΑΕ· λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΕΒΓ τριγώνου. Fig. 41.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ ΑΕ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον·

Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ· διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μβ΄.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ εὐθυγράμμῳ γωνίᾳ. 42.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθύγραμμος γωνία ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. Fig. 42.

Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ, καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μγ΄.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 43.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ ΚΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι. Fig. 43.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΚΘΑ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΚ· ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ· τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ ἐστὶν ἴσον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ τριγώνου· ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματι ἴσον ἐστίν.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 44.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ. Fig. 44.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω, ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΗ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ

ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες εἰσίν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ΘΒ ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ Μ σημεῖα.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΛΗ ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. Ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΕ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΜ τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μέ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 45.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι, ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε. Fig. 45.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΘΗ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον πα-

ραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ, ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ ΗΘΜ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἴση ἐστὶν. Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ ΗΘΜ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΘΚ ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ ΘΗΖ ἴσαί ἀλλήλαις εἰσί. Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ ΘΗΛ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ ΘΗΛ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΚΖ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ ΖΛ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστί.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μς'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι. 46.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι. Fig. 46.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ ΑΔ ΔΕ ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. Λέγω δὲ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ ΑΔΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. Τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ ΒΕΔ γωνιῶν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις μζ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις, τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις. 47.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ· ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ ΑΓ τὰ ΗΒ ΘΓ. καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΖΓ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΒΑΗ γωνιῶν· πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προςκεισθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ· δύο δὴ αἱ ΔΒ ΒΑ δυσὶ ταῖς ΓΒ ΒΖ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· Καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον, βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΒΔ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΗ τετράγωνον, βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις εἰσὶ ταῖς ΖΒ ΗΓ. Τὰ δὲ τῶν ἴσων διπλάσια ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ ΘΓ τετρα-

γώνοις ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφὲν, τὰ δέ ΗΒ ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τετραγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλεύρων τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μή.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις· ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. 48.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις· λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία. *Fig.* 48.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ, ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ,

δύο δὴ αἱ ΔΑ ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ ΑΓ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση ἐστίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ πρώτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ.

Ὅροι.

α. Πᾶν παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον περιέχεσθαι λέγεται ὑπὸ δύο τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιέχουσῶν εὐθειῶν. 1.

β. Παντὸς δὲ παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον αὐτοῦ παραλληλογράμμων ἓν ὁποιονοῦν σὺν τοῖς δυσὶ παραπληρώμασι γνώμων καλείσθω. 2.

Πρότασις α.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα· τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων περιεχομένοις ὀρθογωνίοις. 1.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ Α ΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ ὡς ἔτυχε κατὰ τὰ Δ Ε σημεῖα· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α ΒΓ περιεχομένον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν Α ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ὑπὸ Α ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ τῶν Α ΕΓ. Fig. 1

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΖ, καὶ κείσθω τῇ Α ἴση ἡ ΒΗ, καὶ διὰ μὲν του

Η τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, διὰ δὲ τῶν Δ Ε Γ τῇ ΒΗ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΚ ΕΛ ΓΘ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΘ τοῖς ΒΚ ΔΛ ΕΘ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α ΒΓ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ ΒΓ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α· τὸ δὲ ΒΚ τὸ ὑπὸ τῶν Α ΒΔ, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΗΒ ΒΔ, ἴση δὲ ἡ ΒΗ τῇ Α. τὸ δὲ ΔΛ τὸ ὑπὸ τῶν Α ΔΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΚ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΒΗ, τῇ Α. καὶ ἔτι ὁμοίως τὸ ΕΘ τὸ ὑπὸ τῶν Α ΕΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ Α ΒΔ καὶ τῷ ὑπὸ Α ΔΕ καὶ ἔτι τῷ ὑπὸ Α ΕΓ.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι, τμηθῇ δὲ ἡ ἑτέρα αὐτῶν εἰς ὅσα δηποτοῦν τμήματα τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν ἴσον ἐστὶ τοῖς ὑπό τε τῆς ἀτμήτου καὶ ἑκάστου τῶν τμημάτων, περιεχομένοις ὀρθογωνίοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε, τὰ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑκατέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενα ὀρθογώνια ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ὅλης τετραγώνῳ. 2.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ περιεχομένου ὀρθογωνίου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Fig. 2.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ ΒΕ παράλληλος ἡ ΓΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΖ ΓΕ. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, τὸ

δὲ

δὲ ΓΕ τὸ ὑπὸ ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΕ τῇ ΑΒ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ τε ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ προειρημένου τμήματος τετραγώνῳ. 3.

Εὐθεῖα γὰρ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνου. Fig. 3.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΔΕΒ, καὶ διήχθω ἡ ΕΔ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ ΒΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΖ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΕ τοῖς ΑΔ ΓΕ· καί ἐστι τὸ μὲν ΑΕ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον, περιέχεται μὲν γὰρ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ, ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΒΓ· τὸ δὲ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ· τὸ δὲ ΔΒ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν τμημάτων τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. 4.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Fig. 4.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Γ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ ΕΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗΖ, διὰ δὲ τοῦ Η ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΚ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΑΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΔΒ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ ἐστιν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΗΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ πλευρᾷ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση· ἀλλὰ καὶ ἡ ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΒΚ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΚΒΓ ΒΓΗ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΚΒΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ· ὥςτε καὶ αἱ ἀπεναντίον αἱ ὑπὸ ΓΗΚ ΗΚΒ ὀρθαί εἰσιν. Ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΗΚΒ· ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΘΗ, τοῦτ' ἔστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΘΖ ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν

ΑΓ ΓΒ ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΗ τῷ ΗΕ, καί ἐστι τὸ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ἴση γὰρ ἡ ΗΓ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΗΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τὰ ἄρα ΔΗ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἔστι δέ καὶ τὰ ΘΖ ΓΚ τετράγωνα ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τὰ ἄρα τέσσαρα τὰ ΘΖ ΓΚ ΔΗ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα ΘΖ ΓΚ ΔΗ ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ... καὶ τά ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερόν, ὅτι ἐν τοῖς τετραγώνοις χωρίοις τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα τετράγωνά ἐστιν.

Πρότασις ε.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὸ ὑπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνῳ. 5.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ. Fig. 5.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ

ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ ΒΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛΜ, καὶ πάλιν διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ ΒΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ παραπλήρωμα τῷ ΘΖ παραπληρώματι, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΔΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ ὅλῳ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΓΜ τῷ ΑΛ ἴσον ἐστίν, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΑΛ ἄρα τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΓΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΘ τῷ ΝΞΟ γνώμονι ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΑΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ ΔΘ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ὁ ἄρα ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ἴσα ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΒ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προςτεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας· τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προςκειμένῃ καὶ τῆς προςκειμένης περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προςκειμένης τετραγώνῳ. 6.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, προςκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ' Fig. 6

εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετράγωνον τὸ ΓΕΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΓΕ ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘΗ, διὰ δὲ τοῦ Θ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛΜ, καὶ ἔτι διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΓΛ ΔΜ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΛ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ καὶ τῷ ΘΖ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΛΑ ἄρα τῷ ΘΖ ἴσον ἐστίν. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΜ τῷ ΝΞΟ γνώμονί ἐστιν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΑΜ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΔΜ τῇ ΔΒ· καὶ ὁ ΝΞΟ ἄρα γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΛΗ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΞΟ γνώμονι καὶ τῷ ΛΗ. Ἀλλὰ ὁ ΝΞΟ γνώμων καὶ τὸ ΛΗ ὅλον ἐστὶ τὸ ΓΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ 7.
ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τὸ ἀφ᾽ ἑνὸς τῶν τμημάτων, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου

τμήματος περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ Fig. 7. τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ· καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἴσον ἐστίν· τὰ ἄρα ΑΖ ΓΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἀλλὰ τὰ ΑΖ ΓΕ ὁ ΚΛΜ ἐστὶ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον· ὁ ΚΛΜ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΓΖ διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΖ. Ἔστι δὲ τοῦ ΑΖ διπλάσιον καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΖ τῇ ΒΓ· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὸ ΓΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΘΝ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ ΘΝ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ ὁ ΚΛΜ γνώμων καὶ τὰ ΓΖ ΘΝ τετράγωνα ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ καὶ τὸ ΓΖ, ἅ ἐστιν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η΄.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ ὡς ἔτυχε· τὸ 8. τετράκις ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ ἑνὸς τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνου ἴσον ἐστὶ

τῷ τε ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ εἰρημένου τμήματος ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ. Fig. 8.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΑΒ εὐθεῖα ἡ ΒΔ, καὶ κείσθω τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΔ τετράγωνον τὸ ΑΕΖΔ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ τῇ ΚΝ· καὶ ἡ ΗΚ ἄρα τῇ ΚΝ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΠΡ τῇ ΡΟ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΒΔ, ἡ δὲ ΗΚ τῇ ΚΝ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΓΚ τῷ ΒΝ, τὸ δὲ ΗΡ τῷ ΡΝ. Ἀλλὰ τὸ ΓΚ τῷ ΡΝ ἴσον ἐστί, παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΓΟ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΒΝ ἄρα τῷ ΗΡ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΓΚ ΚΔ ΗΡ ΡΝ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· τὰ τέσσαρα ἄρα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΓΚ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΚ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΗΚ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΗΠ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΠ ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΗΠ, ἡ δὲ ΠΡ τῇ ΡΘ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ ΜΠ, τὸ δὲ ΠΛ τῷ ΡΖ. Ἀλλὰ τὸ ΜΠ τῷ ΠΛ ἐστὶν ἴσον· παραπληρώματα γὰρ τοῦ ΜΛ παραλληλογράμμου· καὶ τὸ ΑΗ ἄρα τῷ ΡΖ ἴσον ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τὰ ΑΗ ΜΠ ΠΛ ΡΖ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· τὰ τέσσαρα ἄρα τοῦ ΑΗ τετραπλάσιά ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὰ τέσσαρα τὰ ΓΚ ΚΔ ΗΡ ΡΝ τοῦ ΓΚ τετραπλάσια· τὰ ἄρα ὀκτώ, ἃ περιέχει τὸν ΣΤΥ γνώμονα τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. Καὶ ἐπεὶ

τὸ ΑΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶν, ἴση γάρ καὶ ἡ ΚΒ τῇ ΒΓ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΚ. Ἐδείχθη δὲ τοῦ ΑΚ τετραπλάσιος καὶ ὁ ΣΤΥ γνώμων· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΞΘ, ὅ ἐστιν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤΥ γνώμονι καὶ τῷ ΞΘ. Ἀλλὰ ὁ ΣΤΥ γνώμων καὶ τὸ ΞΘ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕΖΔ τετράγωνον, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ καὶ ΒΓ ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι τετραγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἴσα καὶ ἄνισα· τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τῆς ὅλης τμημάτων τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τῶν τομῶν τετραγώνου. 9.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς μὲν ἴσα Fig. 9 κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τετραγώνων.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΕΒ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ πρὸς τῷ Γ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΕΑΓ ΑΕΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν· καί εἰσιν ἴσαι· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΑ ΓΑΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΗΕΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ πλευρᾷ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Πάλιν ἐπεὶ ἡ πρὸς τῷ Β γωνία ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ, ἴση γάρ ἐστι πάλιν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΓΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΔ πλευρᾷ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΕ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΖ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΖ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΖ. Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΖ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΖ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τε-

τραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΖ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΖ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΖ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τετραγώνων. Ἴση δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστί τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ δίχα, προςτεθῇ δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης σὺν τῇ προςκειμένῃ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς προςκειμένης, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, διπλάσιά ἐστι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς συγκειμένης ἔκ τε τῆς ἡμισείας καὶ τῆς προςκειμένης τετραγώνου. 10.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, προςκείσθω δέ τις αὐτῇ εὐθεῖα ἐπ᾽ εὐθείας ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τετραγώνων. Fig. 10.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΕ, καὶ κείσθω ἴση ἑκατέρᾳ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ ΕΒ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΓ ΖΔ εὐθεῖά τις ἐνέπεσεν ἡ ΕΖ, αἱ ὑπὸ ΓΕΖ ΕΖΔ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΕΒ ΕΖΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΕΒ ΖΔ ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ

Β Δ μέρη συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΑΓ· καὶ ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Γ· ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΕΑΓ ΑΕΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΕΒ ΕΒΓ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἡμίσεια ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ, ἡμίσεια ἄρα ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΗ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΗ ὀρθὴ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ὑπὸ ΔΓΕ, ἐναλλὰξ γάρ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΗΒ τῇ ὑπὸ ΔΒΗ ἐστὶν ἴση, ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΖ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Ζ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Γ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΗ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΗ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΗΖ πλευρᾷ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΓΑ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΓ ΓΑ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνου. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΕΓ ΓΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΑ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΗΖ ΖΕ διπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΗΖ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΓΔ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ τετράγωνον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΑ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΗ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τε-

τραγώνων. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΗ τετραγώνοις ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τετραγώνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΗ διπλάσιόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΗ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΗ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ· Ἴση δὲ ἡ ΔΗ τῇ ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ τετραγώνων.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τεμεῖν, ὥςτε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. 11.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ τεμεῖν, ὥςτε τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἑτέρου τῶν τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τοῦ λοιποῦ τμήματος τετραγώνῳ. Fig. 11

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΒΔΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ, καὶ διήχθω ἡ ΓΑ ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον τὸ ΖΘ, καὶ διήχθω ἡ ΗΘ ἐπὶ τὸ Κ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥςτε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα τατὰ τὸ Ε, πρόςκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΑΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετρα-

γώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΑ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΑ τὸ ΖΚ, ἴση γὰρ ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ· τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔ· τὸ ἄρα ΖΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΑΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· τὸ δὲ ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται κατὰ τὸ Θ, ὥςτε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΘΑ τετραγώνῳ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ΄.

Ἐν τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἐκβληθεῖσαν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς προςλαμβανομένης ἐκτὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ἀμβλείᾳ γωνίᾳ. 12.

Ἔστω ἀμβλυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἀμβλεῖαν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὴν ΓΑ ἐκβληθεῖσαν κάθετος ἡ ΒΔ. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον μεῖζόν ἐστι Fig. 12.

τῶν ἀπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΑ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΔ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Α σημεῖον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ ΔΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὥςτε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον τῶν ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΒ τετραγώνων μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἀμβλυγωνίοις τριγώνοις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

Πρότασις ιγ΄.

Ἐν τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνων τῷ περιεχομένῳ δὶς ὑπό τε μιᾶς τῶν περὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν, ἐφ᾽ ἣν ἡ κάθετος πίπτει, καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ἐντὸς ὑπὸ τῆς καθέτου πρὸς τῇ ὀξείᾳ γωνίᾳ. 13.

Ἔστω ὀξυγώνιον τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀξεῖαν ἔχον τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ Fig. 13

ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΓΒ τέτμηται ὡς ἔτυχε κατὰ τὸ Δ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ τετραγώνῳ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ΔΑ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ τετραγώνοις. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΒΔ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Δ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΒ ΒΑ ἴσα ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς ΑΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ· ὥςτε μόνον τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἔλαττόν ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΓΒ ΒΑ τετραγώνων τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀξυγωνίοις τριγώνοις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. **14.**

Ἔστω τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ Α· δεῖ δὴ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι. **Fig. 14.**

Συνεστάτω γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ· εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, γεγονὸς ἂν εἴη τό ἐπιταχθέν. Συνέσταται γὰρ τῷ Α εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον τὸ ΒΔ· εἰ δὲ οὔ, μία τῶν ΒΕ ΕΔ μείζων ἐστὶν. Ἔστω μείζων ἡ ΒΕ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΕΔ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΖ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΒ ΗΖ ἡμικύκλιον γεγράφθω τὸ ΒΘΖ,

καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΘ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΖ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΖ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΘΕ ΕΗ τετράγωνα· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΕ ΕΗ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετράγωνον· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΖ τὸ ΒΔ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ ΖΕ τῇ ΕΔ· τὸ ἄρα ΒΔ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΕ τετραγώνῳ. Ἴσον δὲ τὸ ΒΔ τῷ Α εὐθυγράμμῳ. τὸ Α ἄρα εὐθύγραμμον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφομένῳ τετραγώνῳ.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Α ἴσον τετράγωνον συνέσταται τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ ἀναγραφησόμενον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Τέλος τοῦ δευτέρου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ.

Ὅροι.

α΄. Ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ὧν αἱ διάμετροι ἴσαι 1.
εἰσίν, ἢ ὧν αἱ ἐκ τῶν κέντρων ἴσαι εἰσίν.

β΄. Εὐθεῖα κύκλου ἐφάπτεσθαι λέγεται, 2.
ἥτις ἁπτομένη τοῦ κύκλου καὶ ἐκβαλλομένη οὐ τέμ-
νει τὸν κύκλον.

γ΄. Κύκλοι ἐφάπτεσθει ἀλλήλων λέγονται, 3.
οἵτινες ἁπτόμενοι ἀλλήλων οὐ τέμνουσιν ἀλλήλους.

δ΄. Ἐν κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέν- 4.
τρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου
ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσι.

ε΄. Μεῖζον δὲ ἀπέχειν λέγεται, ἐφ᾽ ἣν ἡ μεί- 5.
ζων κάθετος πίπτει.

ϛ΄. Τμῆμα κύκλου ἔστι τὸ περιεχόμενον σχῆ- 6.
μα ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

ζ΄. Τμήματος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ περιεχομένη 7.
ὑπό τε εὐθείας καὶ κύκλου περιφερείας.

η΄. Ἐν τμήματι δὲ γωνία ἐστὶν, ὅταν ἐπὶ τῆς 8.
περιφερείας τοῦ τμήματος ληφθῇ τι σημεῖον καὶ ἀπ᾽
αὐτοῦ ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, ἥτις ἔστι βάσις
τοῦ τμήματος, ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι, ἡ περιεχομένη
γωνία ὑπὸ τῶν ἐπιζευχθεισῶν εὐθειῶν.

θ΄. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν εὐθεῖαι 9.
ἀπολαμβάνωσί τινα περιφέρειαν, ἐπ᾽ ἐκείνης λέγε-
ται βεβηκέναι ἡ γωνία.

ι. Τομεὺς δὲ κύκλου ἐστὶν, ὅταν πρὸς τῷ κέντρῳ τοῦ κύκλου συσταθῇ γωνία, τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῶν τὴν γωνίαν περιεχουσῶν εὐθειῶν καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν περιφερείας. 10.

ιά. Ὅμοια τμήματα κύκλου ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας, ἢ ἐν οἷς αἱ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 11.

Πρότασις ά.

Τοῦ δοθέντος κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν. 1.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ κέντρον εὑρεῖν.

Ἤχθω τις εἰς αὐτὸν ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΑΒ, Fig. 1
καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΓ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΑ ΗΔ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΑΔ ΔΗ δυσὶ ταῖς ΗΔ ΔΒ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΗΑ βάσει τῇ ΗΒ ἐστὶν ἴση, ἐκ κέντρου γάρ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΔΒ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΔΒ τῇ ὑπὸ ΗΔΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Ζ.

Τὸ Ζ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις εὐθεῖάν τινα δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

Πρότασις β'.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. 2.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτοῦ εἰλήφθω δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α Β· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Fig. 2.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΑΕΒ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΑ ΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΔΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΒ, ἴση ἄρα καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΑΕ μία πλευρὰ προςεκβέβληται ἡ ΑΕΒ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΔΑΕ. Ἴση, δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΕ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΒ τῆς ὑπὸ ΔΒΕ. Ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· μείζων ἄρα ἡ ΔΒ τῆς ΔΕ. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΔΖ. μείζων ἄρα ἡ ΔΖ τῆς ΔΕ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐπ' αὐτῆς τῆς περιφερείας· ἐντὸς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐπὶ τῆς περιφερείας ληφθῇ δύο τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ΄.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνῃ, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνῃ, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. 3

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ ἐν αὐτῷ εὐθεῖά τις Fi διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΓΔ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ Ζ σημεῖον· λέγω ὅτι καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΑ ΕΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ δυσὶν ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΕΑ βάσει τῇ ΕΒ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΖΒ ἴση ἐστίν. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ ΒΖΕ. Ἡ ΓΔ ἄρα διὰ τοῦ κέντρου οὖσα τὴν ΑΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τέμνουσα, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει

Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τεμνέτω· λέγω ὅτι καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει, τοῦτ' ἔστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΖ. Ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΖΕ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΕ ἴσῃ· δύο ἄρα τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΑΖ ΕΖΒ τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΕΖ, ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι· οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. 4.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον, μὴ δία τοῦ κέντρου οὖσαι· λέγω ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα. Fig. 4.

Εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα, ὥςτε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, τὴν δὲ ΒΕ τῇ ΕΔ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΕΑ· Πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖά τις ἡ ΖΕ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου δίχα τέμνει, καὶ πρὸς ὀρθὰς αὐτὴν τέμνει· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΑ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΕΑ τῇ ὑπὸ ΖΕΒ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα αἱ ΑΓ ΒΔ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε'.

Ἐὰν δύο κύκλοι τέμνωσιν ἀλλήλους, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 5.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΓΔΗ τεμνέτωσαν ἀλλήλους κατὰ τὰ Β Γ σημεῖα· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. Fig. 5.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ε, καὶ ἐπιζεύχθω ἡ ΕΓ, καὶ διήχθω ἡ ΕΖΗ ὡς ἔτυχε.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ τῇ ΕΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΗ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΗ· ἐδείχθη δὲ ἡ ΕΓ καὶ τῇ ΕΖ ἴση· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ε σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ ΓΔΗ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων, οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. 6

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΓΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων κατὰ τὸ Γ σημεῖον· λέγω ὅτι οὐκ ἔσται αὐτῶν τὸ αὐτὸ κέντρον. Fig.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν ἡ ΖΕΒ,

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΓ τῇ ΖΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΕ ἄρα τῇ ΖΒ ἴση ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῶν ΑΒΓ ΓΔΕ κύκλων.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν κύκλου ἐπὶ τῆς διαμέτρου ληφθῇ τι σημεῖον, ὃ μὴ ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προς- 7

πίπτωσιν εὐθεῖαί τινες· μεγίστη μέν ἐστιν, ἐφ' ἧς τὸ κέντρον, ἐλαχίστη δὲ ἡ λοιπή· τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου προςπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ζ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, κέντρον δὲ τοῦ κύκλου ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον προςπιπτέτωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΖΒ ΖΓ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· τῶν δὲ ἄλλων ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ μείζων, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ. Fig. 7.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΓΕ ΗΕ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν. αἱ ΕΒ ΕΖ ἄρα τῆς ΒΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ, αἱ ἄρα ΒΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΖ· μείζων ἄρα ἡ ΑΖ τῆς ΒΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΕ, δύο δὴ αἱ ΒΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΓΕ ΕΖ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΓΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσεως τῆς ΓΖ μείζων ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν.

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΗΖ ΖΕ τῆς ΕΗ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΕΔ· αἱ ἄρα ΗΖ ΖΕ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΗΖ λοιπῆς τῆς ΖΔ μείζων ἐστί. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΖΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΖΔ· μείζων δὲ ἡ μὲν ΖΒ τῆς ΖΓ, ἡ δὲ ΖΓ τῆς ΖΗ.

Λέγω ὅτι καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι προςπεσοῦνται πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΖΔ ἐλαχίστης. Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ

ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε, τῇ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΗΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση ἐστίν. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΖΗ ἄλλη ἴση οὐ προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προςπιπτέτω ἡ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΖΗ ἴση ἐστὶν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ· καὶ ἡ ΖΚ ἄρα τῇ ΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῇ ἀπώτερον, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ του Ζ σημείου ἑτέρα τις προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη.

Ἐὰν ἄρα κύκλου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ή.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον διαχθῶσιν εὐθεῖαί τινες, ὧν μία μὲν διὰ τοῦ κέντρου, αἱ δὲ λοιπαὶ ὡς ἔτυχε· μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου, ἐλαχίστη δὲ ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων, τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προςπιπτουσῶν ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί· τῶν δὲ πρὸς τὴν κυρτὴν περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ἐλαχίστης τῆς ἀπώτερόν ἐστιν ἐλάττων. Δύο δὲ μόνον εὐθεῖαι ἴσαι ἀπὸ τοῦ σημείου προςπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ἐλαχίστης. 8.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες πρὸς τὸν κύκλον αἱ ΔΑ ΔΕ ΔΖ ΔΓ, ἐσ- Fig.

τω δὲ ἡ ΔΑ διὰ τοῦ κέντρου· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ, ἐλαχίστη δὲ ἡ ΔΗ ἡ μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ· τῶν δὲ ἄλλων, τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἔσται, ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ, τῶν δὲ πρὸς τὴν ΘΛΚΗ κυρτὴν περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἀεὶ ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης ἐλάττων ἐστὶ τῆς ἀπώτερον, ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ, ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΑΘ.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Μ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΜΕ ΜΖ ΜΓ ΜΚ ΜΛ ΜΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΜ τῇ ΕΜ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΜΔ· ἡ ἄρα ΑΔ ἴση ἐστὶ ταῖς ΕΜ ΜΔ. Ἀλλ' αἱ ΕΜ ΜΔ τῆς ΕΔ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΕΔ μείζων ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΖΜ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΜΔ, αἱ ΕΜ ΜΔ ἄρα ταῖς ΖΜ ΜΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΜΔ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΜΔ μείζων ἐστί. Βάσις ἄρα ἡ ΕΔ βάσεως τῆς ΖΔ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΖΔ τῆς ΓΔ μείζων ἐστί· μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΑ, μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ ΔΖ τῆς ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ αἱ ΜΚ ΚΔ τῆς ΜΔ μείζονές εἰσιν, ἴση δέ ἡ ΜΗ τῇ ΜΚ, λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΔ λοιπῆς τῆς ΗΔ μείζων ἐστίν· ὥςτε καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΔΚ ἐλάσσων ἐστὶν. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΜΛΔ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΜΔ, δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ ΚΔ, αἱ ἄρα ΜΚ ΚΔ τῶν ΜΛ ΛΔ ἐλάττονές εἰσιν· ὧν ἐστιν ἴση ἡ ΜΚ τῇ ΜΛ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΚ λοιπῆς τῆς ΔΛ ἐλάττων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔΛ τῆς ΔΘ ἐλάττων ἐστίν· ἐλα-

χίστη μὲν ἄρα ἡ ΔΗ, ἐλάττων δὲ ἡ μὲν ΔΚ τῆς ΔΛ ἡ δὲ ΔΛ τῆς ΔΘ.

Λέγω ὅτι καὶ δύο μόνον ἴσαι εὐθεῖαι ἀπὸ τοῦ Δ σημείου προςπεσοῦνται πρὸς τὸν κύκλον, ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης· Συνεστάτω πρὸς τῇ ΜΔ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Μ, τῇ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ ἴση γωνία ἡ ὑπὸ ΔΜΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΜΚ τῇ ΜΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, δύο δὴ αἱ ΚΜ ΜΔ δυσὶ ταῖς ΒΜ ΜΔ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι τῇ ΔΚ εὐθείᾳ ἄλλη ἴση οὐ προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου. Εἰ γὰρ δυνατόν, προςπιπτέτω, καὶ ἔστω ἡ ΔΝ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΔΚ τῇ ΔΝ ἐστὶν ἴση, ἀλλ' ἡ ΔΚ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΔΝ ἴση ἐστὶν, ἡ ἔγγιον τῆς ΔΗ ἐλαχίστης τῇ ἀπώτερον, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προςπεσοῦνται.

Ἐὰν ἄρα κύκλου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐντὸς, 9.
ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προςπίπτωσι πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι· τὸ ληφθὲν σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ κύκλου.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἐντὸς δὲ αὐτοῦ σημεῖον Fig. 9.
τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προςπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ ΔΒ ΔΓ· λέγω ὅτι τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ σημεῖα, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΔ ΖΔ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η Κ Θ Λ σημεῖα.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΔ· δύο δὴ αἱ ΑΕ ΕΔ δυσὶ ταῖς ΒΕ ΕΔ ἴσαι εἰσί· καὶ βάσις ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΕΔ ΒΕΔ γωνιῶν· ἡ ΗΚ ἄρα τὴν ΑΒ τέμνει δίχα καὶ πρὸς ὀρθάς. Καὶ ἐπεὶ, ἐὰν ἐν κύκλῳ τις εὐθεῖα εὐθεῖάν τινα δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνῃ, ἐπὶ τῆς τεμνούσης ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου· ἐπὶ τῆς ΗΚ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἐπὶ τῆς ΘΛ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Καὶ οὐδὲν ἕτερον κοινὸν ἔχουσιν αἱ ΗΚ ΘΛ εὐθεῖαι, ἢ τὸ Δ σημεῖον· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα κύκλου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Κύκλος κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο. **10.**

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β Η Ζ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΒΘ ΒΗ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ Λ σημεῖα· καὶ ἀπὸ τῶν Κ Λ ταῖς ΒΘ ΒΗ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσαι αἱ ΚΓ ΛΜ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Α Ε σημεῖα. Fig. 10.

Ἐπεὶ οὖν ἐν κύκλῳ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΑΓ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΘ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΑΓ ἄρα ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Πάλιν, ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τῷ αὐτῷ τῷ ΑΒΓ εὐθεῖά τις ἡ ΝΞ εὐθεῖάν τινα τὴν ΒΗ δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, ἐπὶ τῆς ΝΞ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ, καὶ κατ' οὐδὲν συμβάλλουσιν αἱ ΑΓ ΝΞ εὐθεῖαι ἀλλή-

λαις ἢ κατὰ τὸ Ο· τὸ Ο ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου κέντρον ἐστὶ τὸ Ο· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους, τῶν ΑΒΓ ΔΕΖ, τὸ αὐτό ἐστι κέντρον τὸ Ο, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα κύκλος κύκλον τέμνει . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιά.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐντὸς, καὶ ληφθῇ αὐτῶν τὰ κέντρα· ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται τῶν κύκλων. 11.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐντὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὰ Α σημεῖον πεσεῖται. Fig. 11.

Μὴ γὰρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ὡς ἡ ΖΗΔΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ ΗΖ τῆς ΖΑ, τουτ' ἔστι τῆς ΖΘ, μείζονές εἰσι, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ· καὶ ἡ ΗΔ ἄρα τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκτὸς τῆς κατὰ τὸ Α συναφῆς πεσεῖται· κατὰ τὸ Α ἄρα ἐπὶ τὴν συναφὴν πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ'.

Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτωνται ἀλλήλων ἐκτὸς, ἡ ἐπὶ τὰ κέντρα αὐτῶν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς ἐπαφῆς ἐλεύσεται. 12.

Δύο γὰρ κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΑΔΕ ἐφαπτέσθωσαν ἀλλήλων ἐκτὸς κατὰ τὸ Α σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, τοῦ δὲ ΑΔΕ τὸ Η· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς ἐλεύσεται. Fig. 12.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἐρχέσθω ὡς ἡ ΖΓΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΑΗ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΔΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΓ ἴση· αἱ ἄρα ΖΑ ΑΗ ταῖς ΖΓ ΔΗ ἴσαι εἰσίν· ὥστε ὅλη ἡ ΖΗ τῶν ΖΑ ΑΗ μείζων ἐστίν, Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Η ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα διὰ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς οὐκ ἐλεύσεται· δι' αὐτῆς ἄρα.

Ἐὰν ἄρα δύο κύκλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ'.

Κύκλος κύκλου οὐκ ἐφάπτεται κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, ἐάν τε ἐντὸς ἐάν τε ἐκτὸς ἐφάπτηται. 13.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΒΓΔ κύκλου τοῦ ΕΒΖΔ ἐφαπτέσθω πρότερον ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Β Δ. Fig. 13

Καὶ εἰλήφθω τοῦ μὲν ΑΒΓΔ κύκλου κέντρον τὸ Η· τοῦ δὲ ΕΒΖΔ τὸ Θ.

Ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐπὶ τὰ Β Δ πεσεῖται. Πιπτέτω ὡς ἡ ΒΗΘΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΔ· μείζων ἄρα ἡ ΒΗ τῆς ΘΔ· πολλῷ ἄρα μείζων ἡ ΒΘ τῆς ΘΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Θ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΒΖΔ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΘ τῇ ΘΔ· Ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐντὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐκτός.

Εἰ γὰρ δυνατόν, κύκλος ὁ ΑΓΚ κύκλου τοῦ ΑΒΔΓ ἐφαπτέσθω ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν, τὰ Α Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλων τῶν ΑΒΔΓ ΑΓΚ εἴληπται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑκατέρου δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Α Γ· ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ αὐτὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς ἑκατέρου πεσεῖται· Ἀλλὰ τοῦ μὲν ΑΒΔΓ ἐντὸς ἔπεσε, τοῦ δὲ ΑΓΚ ἐκτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα κύκλος κύκλου ἐφάπτεται ἐκτὸς κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ ἕν. Ἐδείχθη δὲ, ὅτι οὐδὲ ἐντός.

Κύκλος ἄρα κύκλου . . : καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ αἱ ἴσον ἀπέχουσαι ἀπὸ τοῦ κέντρου ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 14.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΔΓ. καὶ ἐν αὐτῷ ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Fig. 14.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΔΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὰς ΑΒ ΓΔ κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΕΖ ΕΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΓΕ.

Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΒ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει. Ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῆς ΓΗ ἐστὶ διπλῆ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΓ, ἴσον καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΖ ΖΕ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ζ γωνία· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Η γωνία· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΖ ΖΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ ΗΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον ἐστὶν, ἴση ἄρα ἡ ΖΕ τῇ ΕΗ. Ἐν δὲ κύκλῳ ἴσον ἀπέχειν ἀπὸ τοῦ κέντρου εὐθεῖαι λέγονται, ὅταν αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπ᾽ αὐτὰς κάθετοι ἀγόμεναι ἴσαι ὦσιν· αἱ ἄρα ΑΒ ΓΔ ἴσον ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΑΒ ΓΔ εὐθεῖαι ἴσον ἀπεχέτωσαν ἀπὸ τοῦ κέντρου, τοῦτ᾽ ἔστιν ἴση ἔστω ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ, λέγω ὅτι ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῆς ΑΖ, ἡ δὲ ΓΔ τῆς ΓΗ· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΕ· ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΕ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΖ ΖΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΓ τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΕΖ ΖΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΓ ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἐστὶν ἴσον, ἴση γὰρ ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΗ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΑΖ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΗ διπλῆ ἡ ΓΔ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἴσαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Ἐν κύκλῳ μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διάμετρος· τῶν δὲ ἄλλων, ἀεὶ ἡ ἔγγιον τοῦ κέντρου τῆς ἀπώτερον μείζων ἐστί. 15

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ Fig.
ἔστω ἡ ΑΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἔγγιον μὲν τοῦ Ε κέντρου ἔστω ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ· λέγω ὅτι μεγίστη μέν ἐστιν ἡ ΑΔ, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὰς ΒΓ ΖΗ κάθετοι αἱ ΕΘ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἔγγιον μὲν τοῦ κέντρου ἐστὶν ἡ ΒΓ, ἀπώτερον δὲ ἡ ΖΗ, μείζων ἄρα ἡ ΕΚ τῆς ΕΘ. Κείσθω τῇ ΕΘ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΕΚ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΛΜ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΜ ΕΝ ΕΖ ΕΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΕΛ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΜΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΜ. ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΝ, ἡ ἄρα ΑΔ ταῖς ΜΕ ΕΝ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' αἱ ΜΕ ΕΝ τῆς ΜΝ μείζονές εἰσι, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ, ἡ ΑΔ ἄρα τῆς ΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΕ ΕΝ δυσὶ ταῖς ΖΕ ΕΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΕΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΖΕΗ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΒΓ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῆς ΖΗ μείζων ἐστίν. Μεγίστη μὲν ἄρα ἡ ΑΔ διάμετρος, μείζων δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΖΗ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα μεγίστη . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ιϛ'.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται, καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων. 16.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ περὶ κέντρον τὸ Δ καὶ διάμετρον τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Fig. 16.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς, ὡς ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΓΔ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ ΑΓΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α σημείου, τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθὰς ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἐπὶ τῆς περιφερείας· ἐκτὸς ἄρα.

Πιπτέτω ὡς ἡ ΑΕ· λέγω ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΑΕ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

Εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ ΖΑ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐπὶ τὴν ΖΑ κάθετος ἡ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΔ, ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ ὑπὸ ΔΑΗ· μείζων ἄρα ἡ ΑΔ τῆς ΔΗ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ· μείζων ἄρα ἡ ΔΘ τῆς ΔΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

Λέγω ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ ἡμικυκλίου γωνία ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἁπάσης ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν, ἡ δὲ λοιπὴ ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας ἁπάσης γωνίας ὀξείας εὐθυγράμμου ἐλάττων ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἔστι τις γωνία εὐθύγραμμος μείζων μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας, ἐλάττων δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας· εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας εὐθεῖα παρεμπεσεῖται, ἥτις ποιήσει μείζονα μὲν τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένην, ἐλάττονα δὲ τῆς περιεχομένης ὑπό τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας. Οὐ παρεμπίπτει δέ· οὐκ ἄρα τῆς περιεχομένης γωνίας ὑπό τε τῆς ΒΑ εὐθείας καὶ τῆς ΓΘΑ περιφερείας ἔσται μείζων ὀξεῖα ὑπὸ εὐθειῶν περιεχομένη. οὐδὲ μὴν ἐλάττων τῆς περιεχομένης ὑπὸ τε τῆς ΓΘΑ περιφερείας καὶ τῆς ΑΕ εὐθείας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ὅτι εὐθεῖα κύκλου καθ' ἓν μόνον ἐφάπτεται σημεῖον· ἐπείδηπερ καὶ ἡ κατὰ δύο αὐτῷ συμβάλλουσα ἐντὸς αὐτοῦ πίπτουσα ἐδείχθη.

Πρότασις ιζ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ δοθέν- 17
τος κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ὁ δὲ δοθεὶς κύκλος ὁ ΒΓΔ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένην εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Fig. 17.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ε διαστήματι δὲ τῷ ΕΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΖΗ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΑ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒΖ ΑΒ· λέγω ὅτι ἀπὸ τοῦ Α σημείου τοῦ ΒΓΔ κύκλου ἐφαπτομένη ἦκται ἡ ΑΒ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ε κέντρον ἐστὶ τῶν ΒΓΔ ΑΖΗ κύκλων, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΕΑ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΕΒ· δύο δὴ αἱ ΑΕ ΕΒ δυσὶ ταῖς ΖΕ ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι, τὴν πρὸς τῷ Ε· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστί, καὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΕΒΑ τριγώνῳ ἴσον ἐστί, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΕΔΖ, ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΑ. Καί ἐστιν ἡ ΕΒ ἐκ τοῦ κέντρου· ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΑΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΒΓΔ κύκλου.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τοῦ δοθέντος κύκλου τοῦ ΒΓΔ ἐφαπτομένη εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιή.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζευχθῇ τις εὐθεῖα, ἡ ἐπιζευχθεῖσα κάθετος ἔσται ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην. 18.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ Γ Fig. 18.

ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ· λέγω ὅτι ἡ ΖΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Εἰ γὰρ μή· ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΕ καθέτος ἡ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΗΓ γωνία ὀρθή ἐστιν, ὀξεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΗ· ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα ἡ ΖΓ τῆς ΖΗ· Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΖΒ τῆς ΖΗ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ΖΗ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἀχθῇ, ἐπὶ τῆς ἀχθείσης ἔσται τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. 19

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΑ· λέγω ὅτι ἐπὶ τῆς ΑΓ ἐστὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου. Fig.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ, ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΔΕ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ὀρθή· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΓΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν ἐπὶ τῆς ΑΓ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Ἐν κύκλῳ, ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς πρὸς τῇ περιφερείᾳ, ὅταν τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν ἔχωσιν αἱ γωνίαι. 20.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ πρὸς μὲν τῷ κέντρῳ αὐτοῦ γωνία ἔστω ἡ ὑπὸ ΒΕΓ, πρὸς δὲ τῇ περιφερείᾳ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, ἐχέτωσαν δὲ τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι διπλασίων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Fig. 20.

Ἐπιζευχθεῖσα γὰρ ἡ ΑΕ διήχθω ἐπὶ τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΒ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἴση ἐστίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΑΒ ΕΒΑ γωνίαι τῆς ὑπὸ ΕΑΒ διπλάσιαί εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ταῖς ὑπὸ ΕΑΒ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΖ ἄρα τῆς ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶ διπλῆ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ ἐστὶ διπλῆ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ ὅλης τῆς ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶ διπλῆ.

Κεκλάσθω δὴ πάλιν, καὶ ἔστω ἑτέρα γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Η. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΗΕΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΕΒ διπλῆ ἐστι τῆς ὑπὸ ΕΔΒ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΓ διπλῆ ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΔΓ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ πρὸς τῷ κέντρῳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα'.

Ἐν κύκλῳ αἱ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. 21.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ τμήματι τῷ ΒΑΕΔ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΑΔ ΒΕΔ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΔ ΒΕΔ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Fig. 21.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου τὸ κέντρον, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΖ ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΔ γωνία πρὸς τῷ κέντρῳ ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τῇ περιφέρειᾳ, καὶ ἔχουσι τὴν αὐτὴν περιφέρειαν βάσιν, τὴν ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΖΔ γωνία διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ὑπὸ ΒΖΔ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΔ ἐστὶ διπλασίων· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ.

Ἐν κύκλῳ ἄρα αἱ ἐν τῷ αὐτῷ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Πρότασις κβ.

Τῶν ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. 22.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ, καὶ ἐν αὐτῷ τετράπλευρον ἔστω τὸ ΑΒΓΔ· λέγω ὅτι αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Fig. 22

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΒΔ.

Καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, τοῦ ΑΒΓ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ ΑΒΓ ΒΓΑ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΔΓ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΒΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματί εἰσι τῷ ΑΔΓΒ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ ΑΓΒ ἴση ἐστί. Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ΒΑΓ ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΑΔΓ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΑΓ ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΑΔΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΔ ΔΓΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί.

Τῶν ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . *ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

Πρότασις κγ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 23.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συνεστάτω ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ ΑΓΒ ΑΔΒ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ ΔΒ· Fig. 23.

Ἐπεὶ οὖν ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΓΒ τμῆμα τῷ ΑΔΒ τμήματι, ὅμοια δὲ τμήματα κύκλων ἐστὶ τὰ δεχόμενα γωνίας ἴσας· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει .... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Τὰ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 24.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΓΔ ὅμοια τμήματα κύκλων τὰ ΑΕΒ ΓΖΔ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα τῷ ΓΖΔ τμήματι. Fig. 24.

Ἐφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΕΒ τμήτατος ἐπὶ τὸ ΓΖΔ, καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Γ, τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΓΔ· τῆς δὲ ΑΒ ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ. Εἰ γὰρ ἡ ΑΒ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΓΔ ἐφαρμόσει, τὸ δὲ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ πεσεῖται, ἢ ἐκτὸς (ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον διὰ τὸ ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα οὐ συσταθῆναι ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη) ἢ παραλλάξει ὡς τὸ ΓΘΗΔ, κύκλος δὲ κύκλον οὐ τέμνει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ

δύο, ἀλλὰ καὶ τέμνει ὁ ΓΘΗΔ τὸν ΓΖΔ κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο τὰ Γ Η Δ, ὅπερ ἐστὶ πάλιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΓΔ οὐκ ἐφαρμόσει καὶ τὸ ΑΕΒ τμῆμα ἐπὶ τὸ ΓΖΔ· ἐφαρμόσει ἄρα, καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῶν ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα. καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

Κύκλου τμήματος δοθέντος προσαναγράψαι τὸν κύκλον οὗπέρ ἐστι τμῆμα. 25.

Ἔστω τὸ δοθὲν τμῆμα κύκλου τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ τοῦ ΑΒΓ τμήματος προσαναγράψαι τὸν κύκλον, οὗπέρ ἐστι τμῆμα. Fig. 25.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἄρα τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἤτοι μείζων ἐστὶν, ἢ ἴση, ἢ ἐλάττων.

Ἔστω πρότερον μείζων, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΔΒ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΔ ΔΕ δυσὶ ταῖς ΓΔ ΔΕ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἴση ἐστὶν, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΕ βάσει τῇ ΓΕ ἴση ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΑΕ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ΒΕ ἄρα τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΑΕ ΕΒ ΕΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΑΕ ΕΒ ΕΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων καὶ ἔσται προσαναγεγραμμένος. Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προσαναγέ-

γραπται ὁ κύκλος. Καὶ δῆλον ὡς τὸ ΑΒΓ τμῆμα ἔλαττόν ἐστιν ἡμικυκλίου, διὰ τὸ τὸ Ε κέντρον ἐκτὸς αὐτοῦ τυγχάνειν.

Ὁμοίως δὲ καὶ ἐὰν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία ἴση ᾖ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ· τῆς ΑΔ ἴσης γενομένης ἑκατέρᾳ τῶν ΒΔ ΔΓ, αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΔΑ ΔΒ ΔΓ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται, καὶ ἔσται τὸ Δ κέντρον τοῦ προςαναπεπληρωμένου κύκλου, καὶ δηλαδὴ ἔσται τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον.

Ἐὰν δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ἐλάττων ᾖ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ, καὶ συστησώμεθα πρὸς τῇ ΒΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ ἴσην· ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τμήματος πεσεῖται τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΔΒ, ὡς τὸ Ε, καὶ ἔσται δηλαδὴ τὸ ΑΒΓ τμῆμα μεῖζον ἡμικυκλίου.

Κύκλου ἄρα τμήματος δοθέντος, προςαναγέγραπται ὁ κύκλος, οὗπέρ ἐστι τὸ τμῆμα· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κϛʹ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις, αἱ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ἐάντε πρὸς τοῖς κέντροις ἐάντε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 26.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΔΕΖ καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι γωνίαι ἔστωσαν πρὸς μὲν τοῖς κέντροις αἱ ὑπὸ ΒΗΓ ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΚΓ περιφέρεια τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ. Fig. 26.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ ΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶν αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΗ ΗΓ δυσὶ ταῖς ΕΘ ΘΖ ἴσαι εἰσί· καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Η γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Θ ἴση ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ πρὸς τῷ Α

γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι, καὶ ἐστὶν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ ΕΖ· τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΑΓ τμῆμα τῷ ΕΔΖ τμήματι. Ἐστὶ δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΚΓ περιφέρειά ἐστιν ἴση τῇ ΕΛΖ περιφερείᾳ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβηκυῖαι γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶν, ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι. 27.

Ἐν γὰρ ἴσοις κύκλοις τοῖς ΑΒΓ ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν τῶν ΒΓ ΕΖ πρὸς μὲν τοῖς Η Θ κέντροις γωνίαι βεβηκέτωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Fig. 27.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΖ, μία αὐτῶν μείζων ἔσται. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Η τῇ ὑπὸ ΕΘΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΚ· αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΚ περιφέρεια τῇ ΕΖ περιφερείᾳ. Ἀλλ' ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΚ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΘΖ· ἴση ἄρα. Καὶ ἔστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΗΓ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Α, τῆς δὲ ὑπὸ ΕΘΖ ἡμίσεια ἡ πρὸς τῷ Δ· ἴση ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Α γωνία τῇ πρὸς τῷ Δ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἐπὶ ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι, τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι. 28.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι εὐθεῖαι ἔστωσαν αἱ ΒΓ ΕΖ τὰς μὲν ΒΑΓ ΕΔΖ περιφερείας μείζονας ἀφαιροῦσαι τὰς δὲ ΒΗΓ ΕΘΖ ἐλάττονας· λέγω ὅτι ἡ μὲν ΒΑΓ μείζων περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ ΕΔΖ μείζονι περιφερείᾳ, ἡ δὲ ΒΗΓ ἐλάττων περιφέρεια τῇ ΕΘΖ ἐλάττονι. Fig. 28.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων, τὰ Κ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΚΓ ΕΛ ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι κύκλοι εἰσὶν, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΚΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν, ὅταν πρὸς τοῖς κέντροις ὦσιν· ἴση ἄρα ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλος ὁ ΑΒΓ κύκλος ὅλῳ τῷ ΔΕΖ κύκλῳ ἴσος· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΑΓ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΕΔΖ περιφερείᾳ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ ἴσαι ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν. 29.

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ ἐν αὐτοῖς ἴσαι περιφέρειαι ἀπειλήφθωσαν αἱ ΒΗΓ ΕΘΖ, Fig. 29.

καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ ΕΖ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ εὐθεῖα τῇ ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τὰ κέντρα τῶν κύκλων τὰ Κ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΚ ΚΓ ΕΛ ΛΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΗΓ περιφέρεια τῇ ΕΘΖ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΚΓ τῇ ὑπὸ ΕΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΑΒΓ ΔΕΖ κύκλοι, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ἐκ τῶν κέντρων· δύο δὴ αἱ ΒΚ ΚΓ δυσὶ ταῖς ΕΛ ΛΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις ὑπὸ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ'.

Τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν δίχα τεμεῖν. 30.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα περιφέρεια ἡ ΑΔΒ· δεῖ δὴ Fig. 30.
τὴν ΑΔΒ περιφέρειαν δίχα τεμεῖν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ· δύο δὴ αἱ ΑΓ ΓΔ δυσὶ ταῖς ΒΓ ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΔΒ ἴση ἐστίν. Αἱ δὲ ἴσαι εὐθεῖαι ἴσας περιφερείας ἀφαιροῦσι, τὴν μὲν μείζονα τῇ μείζονι τὴν δὲ ἐλάττονα τῇ ἐλάττονι· καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΑΔ ΔΒ περιφερειῶν ἐλάττων ἡμικυκλίου· ἴση ἄρα ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ περιφερείᾳ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα περιφέρεια δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λά.

Ἐν κύκλῳ ἡ μὲν ἐν τῷ ἡμικυκλίῳ γωνία ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ μείζονι τμήματι ἐλάττων ὀρθῆς, ἡ δὲ ἐν τῷ ἐλάττονι τμήματι μείζων ὀρθῆς· καὶ ἔτι ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία μείζων ἐστὶν ὀρθῆς, ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. 31.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔ. διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἔστω ἡ ΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΑ ΑΓ ΑΔ ΔΓ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν, ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· ἡ δὲ ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλάττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Fig. 31.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ διήχθω ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΑ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΒ τῇ ὑπὸ ΕΒΑ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΑ τῇ ΕΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΕ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΑΓ ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ γωνίαις ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΑΓ, ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα· ἡ ἄρα ἐν τῷ ΒΑΓ ἡμικυκλίῳ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστι.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΒΓ τρίγωνου δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΑΓ δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσιν, ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία· ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΒΓ μείζονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, τῶν δὲ ἐν τοῖς κύκλοις τετραπλεύρων αἱ ἀπεναντίον γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ

ΑΔΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Καί ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἐλάττων ὀρθῆς· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία μείζων ὀρθῆς ἐστι, καὶ ἔστιν ἐν τῷ ΑΔΓ ἐλαττονι τοῦ ἡμικυκλίου τμήματι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ μὲν τοῦ μείζονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, μείζων ἐστὶν ὀρθῆς· ἡ δὲ τοῦ ἐλάττονος τμήματος γωνία, ἡ περιεχομένη ὑπό τε τῆς ΑΔΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας, ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς. Καί ἐστιν αὐτόθεν φανέρον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ εὐθειῶν περιεχομένη ὀρθὴ γωνία ἐστὶν, ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΑΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ΑΓ εὐθείας περιεχομένη μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΑΖ εὐθειῶν ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ τῆς ΓΑ εὐθείας καὶ τῆς ΑΔΓ περιφερείας περιεχομένη ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς.

Ἐν κύκλῳ ἄρα ἡ μὲν ἐν τῷ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τριγώνου ἡ μία γωνία ταῖς δυσὶν ἴση ᾖ, ὀρθή ἐστιν ἡ γωνία· διὰ τὸ καὶ τὴν ἐκείνης ἐφεξῆς ταῖς αὐταῖς ἴσην εἶναι. Ὅταν δὲ αἱ ἐφεξῆς ἴσαι ὦσιν, ὀρθαί εἰσιν.

Πρότασις λβ'.

Ἐὰν κύκλου ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διαχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα τὸν κύκλον· ἃς ποιεῖ γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήμασι γωνίαις. 32.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓΔ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Β σημείου διήχθω τις εὐθεῖα εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τέμνουσα Fig. 32.

αὐτὸν ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἃς ποιεῖ γωνίας ἡ ΒΔ μετὰ τῆς ΕΖ ἐφαπτομένης, ἴσαι ἔσονται ταῖς ἐν τοῖς ἐναλλὰξ τμήμασι τοῦ κύκλου γωνίαις, τοῦτ᾽ ἔστιν, ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΑΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΔΓΒ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β τῇ ΕΖ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΔ περιφερείας τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΓ ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΓΔ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἦκται τῇ ἐφαπτομένῃ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΑ, ἐπὶ τῆς ΒΑ ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἡ ΒΑ ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΔΒ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα ὀρθή ἐστι· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΔ ΑΒΔ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΖ ὀρθή· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ ἴση ἐστὶ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ ΑΒΔ. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΖ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι τοῦ κύκλου γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, αἱ ἀπεναντίον αὐτοῦ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΖ ΔΒΕ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΖ ΔΒΕ ταῖς ὑπὸ ΒΑΔ ΒΓΔ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΕ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΔΓΒ, τῇ ὑπὸ ΔΓΒ γωνίᾳ, ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ἐφάπτηταί τις ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 33.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Γ· δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ. Fig. 33.

Ἡ γὰρ πρὸς τῷ Γ γωνία ἤτοι ὀξεῖά ἐστιν, ἢ ὀρθὴ, ἢ ἀμβλεῖα· ἔστω πρότερον ὀξεῖα, ὡς ἐπὶ τῆς πρώτης καταγραφῆς, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ Α σημείῳ τῇ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀξεῖα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἤχθω τῇ ΑΔ ἀπὸ τοῦ Α σημείου πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΖΗ, δύο δὴ αἱ ΑΖ ΖΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ ΖΗ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΖΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΖΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΗ βάσει τῇ ΒΗ ἴση ἐστίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΑ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β. Γεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀπ᾽ ἄκρας τῆς ΑΕ διαμέτρου, ἀπὸ τοῦ Α, τῇ ΑΕ πρὸς ὀρθὰς ἐστὶν ἡ ΑΔ, ἡ ΑΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΒΕ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἁφῆς εἰς τὸ ΑΒΕ κύκλον διήκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ πρὸς τῷ Γ ἄρα γωνίᾳ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ.

Ἐπὶ

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς *ΑΒ* τμῆμα κύκλου γέγραπται τὸ *ΑΕΒ*, δεχόμενον γωνίαν τὴν ὑπὸ *ΑΕΒ* ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ πρὸς τῷ *Γ*.

Ἀλλὰ δὴ ὀρθὴ ἔστω ἡ πρὸς τῷ *Γ*· καὶ δέον πάλιν ἔστω ἐπὶ τῆς *ΑΒ* γράψαι τμῆμα κύκλου δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ *Γ* ὀρθῇ γωνίᾳ. Συνεστάτω γὰρ πάλιν τῇ πρὸς τῷ *Γ* ὀρθῇ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ *ΒΑΔ*, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ τετμήσθω ἡ *ΑΒ* δίχα κατὰ τὸ *Ζ*, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ *Ζ*, διαστήματι δὲ ὁποτέρῳ τῶν *ΖΑ* *ΖΒ*, κύκλος γεγράφθω ὁ *ΑΕΒ*.

Ἐφάπτεται ἄρα ἡ *ΑΔ* εὐθεῖα τοῦ *ΑΒΕ* κύκλου, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν πρὸς τῷ *Α* γωνίαν. Καὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ *ΒΑΔ* γωνία τῇ ἐν τῷ *ΑΕΒ* τμήματι, ὀρθὴ γὰρ καὶ αὔτη ἐν ἡμικυκλίῳ οὖσα. Ἀλλὰ καὶ ἡ ὑπὸ *ΒΑΔ* τῇ πρὸς τῷ *Γ* ἴση ἐστί. Καὶ ἡ ἐν τῷ *ΑΕΒ* τμήματι ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ *Γ*.

Γέγραπται ἄρα πάλιν ἐπὶ τῆς *ΑΒ* τμήμα κύκλου τὸ *ΑΕΒ*, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ *Γ*.

Ἀλλὰ δὴ ἡ πρὸς τῷ *Γ* ἀμβλεῖα ἔστω· καὶ συνεστάτω αὐτῇ ἴση πρὸς τῇ *ΑΒ* εὐθείᾳ καὶ τῷ *Α* σημείῳ ἡ ὑπὸ *ΒΑΔ*, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ τῇ *ΑΔ* πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ *ΑΕ*, καὶ τετμήσθω πάλιν ἡ *ΑΒ* δίχα κατὰ τὸ *Ζ*, καὶ τῇ *ΑΒ* πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ *ΖΗ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΗΒ*.

Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ *ΑΖ* τῇ *ΖΒ*, καὶ κοινὴ ἡ *ΖΗ*, δύο δὴ αἱ *ΑΖ* *ΖΗ* δυσὶ ταῖς *ΒΖ* *ΖΗ* ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ *ΑΖΗ* γωνίᾳ τῇ ὑπὸ *ΒΖΗ* ἴση· βάσις ἄρα ἡ *ΑΗ* βάσει τῇ *ΒΗ* ἴση ἐστίν· Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ *Η* διαστήματι δὲ τῷ *ΗΑ* κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ *Β*. Οἰχέσθω ὡς ὁ *ΑΕΒ*. Καὶ ἐπεὶ τῇ *ΑΕ* διαμέτρῳ ἀπ' ἄκρας πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ *ΑΔ*, ἡ *ΑΔ* ἄρα ἐφάπτεται τοῦ *ΑΕΒ* κύκλου. Καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ *Α* ἐπαφῆς διῆκται ἡ

ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι τῷ ΑΘΒ συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία τῇ πρὸς τῷ Γ ἴση ἐστί· καὶ ἡ ἐν τῷ ΑΘΒ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Γ.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ γέγραπται τμῆμα κύκλου τὸ ΑΘΒ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λδ'.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ. 34.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ πρὸς τῷ Δ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓ κύκλου τμῆμα ἀφελεῖν δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ. Fig. 34

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Β σημεῖον, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΕΖ, καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Β ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΒΓ· ἡ ὑπὸ ΖΒΓ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ΒΑΓ ἐναλλὰξ τμήματι συνισταμένῃ γωνίᾳ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ πρὸς τῷ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ἐν τῷ ΒΑΓ ἄρα τμήματι γωνία ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ γωνίᾳ.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα κύκλου τοῦ ΑΒΓ τμῆμα ἀφῄρηται τὸ ΒΑΓ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ πρὸς τῷ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λε'.

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ 35.

τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐν γὰρ τῷ κύκλῳ τῷ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Fig. 35.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ΑΓ ΒΔ διὰ τοῦ κέντρου εἰσὶν, ὥςτε τὸ Ε κέντρον εἶναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου· φανερὸν ὅτι, ἴσων οὐσῶν τῶν ΑΕ ΕΓ ΔΕ ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ·

Ἔστωσαν δὴ αἱ ΑΓ ΔΒ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὰς ΑΓ ΔΒ εὐθείας κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΖΗ ΖΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ ΖΓ ΖΕ.

Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΖΗ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἴση ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΓ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ε, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ· Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΖΗ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΗ ΗΖ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΓΗ ΗΖ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΓ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ.

Ἐδείχθη δὲ ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΕ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛ'.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, 36.
καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προςπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται· ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦτε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκ- Fig. 36.
τὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προςπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ ΔΒ· καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν ΑΒΓ κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ ἐφαπτέσθω· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραγώνῳ.

Ἡ ἄρα ΔΓΑ ἤτοι διὰ τοῦ κέντρου ἐστὶν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστω τὸ Ζ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΒΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ζ, πρόςκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἴση δὲ ἡ ΖΓ τῇ ΖΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΖΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΖΒ ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΒΔ· τὸ ἄρα

ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ ΒΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ ἐφαπτομένης.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΔΓΑ μὴ ἔστω διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ ΕΓ ΕΔ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΔ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΕΖ εὐθεῖάν τινα μὴ διὰ τοῦ κέντρου τὴν ΑΓ πρὸς ὀρθὰς τέμνει, καὶ δίχα αὐτὴν τέμνει· ἡ ΑΖ ἄρα τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΑΓ τέτμηται δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, πρόςκειται δὲ αὐτῇ ἡ ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΖ ΖΕ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΖΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΔΖ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Ἴση δὲ ἡ ΕΓ τῇ ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΔ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΕΔ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΒ ΒΔ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΒ ΒΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ΄.

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτὸς, ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου πρὸς τὸν κύκλον προςπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν 37.

τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ προςπίπτῃ, ᾖ δὲ τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς προςπιπτούσης· ἡ προςπίπτουσα ἐφάψεται τοῦ κύκλου.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒΓ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐκ- Fig. 37.
τὸς τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον προςπιπτέτωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΔΓΑ ΔΒ, καὶ ἡ μὲν ΔΓΑ τεμνέτω τὸν κύκλον, ἡ δὲ ΔΒ προςπιπτέτω, ἔστω δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου.

Ἤχθω γὰρ τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΕ ΖΒ ΖΔ.

Ἡ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ ὀρθή ἐστι· καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τέμνει δὲ ἡ ΔΓΑ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΕ. Ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΔΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΔΒ ΒΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΒΖ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΕΖ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΖ. Καί ἐστιν ἡ ΒΖ ἐκβαλλομένη διάμετρος, ἡ δὲ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ᾽ ἄκρας ἀγομένη ἐφάπτεται τοῦ κύκλου· ἡ ΔΒ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓ κύκλου. (Ὁμοίως δὲ τὰ αὐτὰ δειχθήσεται, κἂν τὸ κέντρον ἐπὶ τῆς ΑΓ τυγχάνῃ.)

Ἐὰν ἄρα κύκλου ληφθῇ τι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ τρίτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ.

Ὅροι.

α΄. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς σχῆμα εὐθύ- 1.
γραμμον ἐγγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη
τῶν τοῦ ἐγγραφομένου σχήματος γωνιῶν ἑκάστης
πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἅπτηται.

β΄. Σχῆμα δὲ ὁμοίως περὶ σχῆμα περιγρά- 2.
φεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ περιγρα-
φομένου ἑκάστης γωνίας τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται
ἅπτηται.

γ΄. Σχῆμα εὐθύγραμμον εἰς κύκλον ἐγγρά- 3.
φεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη γωνία τοῦ ἐγγραφο-
μένου ἅπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας.

δ΄. Σχῆμα δὲ εὐθύγραμμον περὶ κύκλον πε- 4.
ριγράφεσθαι λέγεται, ὅταν ἑκάστη πλευρὰ τοῦ
περιγραφομένου ἐφάπτηται τῆς τοῦ κύκλου περιφε-
ρείας.

ε΄. Κύκλος δὲ ὁμοίως εἰς σχῆμα λέγεται ἐγγρά- 5.
φεσθαι, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης
πλευρᾶς τοῦ εἰς ὃ ἐγγράφεται ἐφάπτηται.

ς΄. Κύκλος δὲ περὶ σχῆμα περιγράφεσθαι λέγε- 6.
ται, ὅταν ἡ τοῦ κύκλου περιφέρεια ἑκάστης γωνίας
τοῦ περὶ ὃ περιγράφεται ἅπτηται.

ζ΄. Εὐθεῖα εἰς κύκλον ἐναρμόζεσθαι λέγεται, ὅταν 7.
τὰ πέρατα αὐτῆς ἐπὶ τῆς περιφερείας ᾖ τοῦ κύκλου.

Πρότασις α.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. 1.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα μὴ μείζων τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου ἡ Δ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν ἐναρμόσαι. Fig. 1.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου διάμετρος ἡ ΒΓ. Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ Δ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· ἐνήρμοσται γὰρ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῇ Δ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΒΓ. Εἰ δὲ οὔ· μείζων ἐστὶν ἡ ΒΓ τῆς Δ, καὶ κείσθω τῇ Δ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΕ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΓΕ. Ἀλλὰ ἡ ΓΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ Δ ἐστὶν ἴση.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον, τὸν ΑΒΓ, τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ κύκλου διαμέτρου, τῇ Δ, ἴση ἐνήρμοσται, ἡ ΓΑ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις β.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι. 2.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγράψαι. Fig. 2.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου ἐφαπτομένη ἡ ΗΑΘ κατὰ τὸ Α, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΘ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΘΑΓ· πάλιν, πρὸς τῇ ΗΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΖΔΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒΓ ἐφάπτεταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΑΗ, ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς εἰς τὸν κύκλον διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΘΑΓ ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις γ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι. 3.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΔΕΖ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγράψαι. Fig. 3.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΕΖ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η Θ σημεῖα, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ Κ, καὶ διήχθω ὡς ἔτυχεν εὐθεῖα ἡ ΚΒ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΚΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Κ τῇ μὲν ὑπὸ ΔΕΗ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΑ, τῇ δὲ ὑπὸ ΔΖΘ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΚΓ, καὶ διὰ τῶν Α Β Γ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΑΜ ΜΒΝ ΝΓΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτονται τοῦ ΑΒΓ κύκλου αἱ ΛΜ ΜΝ ΝΛ κατὰ τὰ Α Β Γ σημεῖα, ἀπὸ δὲ τοῦ Κ κέντρου ἐπὶ τὰ Α Β Γ σημεῖα ἐπεζευγμέναι εἰσὶν αἱ ΚΑ ΚΒ ΚΓ· ὀρθαὶ ἄρα εἰσὶν αἱ πρὸς τοῖς Α Β Γ σημείοις γωνίαι. Καὶ ἐπεὶ τοῦ ΑΜΒΚ τετραπλεύρου αἱ τέσσαρες γωνίαι τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν,

(ἐπειδήπερ καὶ εἰς δύο τρίγωνα διαιρεῖται τὸ ΛΜΒΚ τετράπλευρον,) ὧν αἱ ὑπὸ ΜΛΚ ΚΒΜ γωνίαι δύο ὀρθαί εἰσιν· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΚΒ ΛΜΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΔΕΗ ΔΕΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΛΚΒ ΛΜΒ ταῖς ὑπὸ ΔΕΗ ΔΕΖ ἴσαι εἰσὶν, ὧν ἡ ὑπὸ ΛΚΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΗ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΛΝΜ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΛΝ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις δ'.

Εἰς τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 4.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Fig. 4.

Τετμήσθωσαν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ γωνίαι δίχα ταῖς ΒΔ ΓΔ εὐθείαις, καὶ συμβαλλέτωσαν ἀλλήλαις αἱ ΒΔ ΓΔ κατὰ τὸ Δ σημεῖον, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΔΕ ΔΖ ΔΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΒΓ, δίχα γὰρ τέτμηται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ, ἐστὶ δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΒΖΔ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΕΒΔ ΖΒΔ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΔ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ΔΕ τῇ ΔΖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΔΕ ΔΖ ΔΗ

ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΔΕ ΔΖ ΔΗ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε Ζ Η σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ τεμεῖ αὐτὰς, ἔσται ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πίπτουσα τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Δ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΔΕ ΔΖ ΔΗ γραφόμενος κύκλος τέμνει τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται κύκλος ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Ἐγγεγράφθω ὡς ΖΕΗ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλος ἐγγέγραπται ὁ ΕΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ε.

Περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον κύκλον περιγράψαι. 5.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· δεῖ δὴ περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ κύκλον περιγράψαι. Fig. 5.

Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ ΑΓ εὐθεῖαι δίχα κατὰ τὰ Δ Ε σημεῖα, καὶ ἀπὸ τῶν Δ Ε σημείων ταῖς ΑΒ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΔΖ ΕΖ· συμπεσοῦνται δὲ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, ἢ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας, ἢ ἐκτὸς (τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη) τῆς ΒΓ.

Συμπιπτέτωσαν οὖν ἐντὸς πρότερον κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ ΖΓ ΖΑ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΔ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστὶν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΑΖ ἐστὶν ἴση, ὥστε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΖΑ ΖΒ ΖΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ ΖΒ ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται πε-

ριγεγραμμένος ὁ κύκλος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Περιγραφέσθω ὡς ὁ ΑΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας κατὰ τὸ Ζ, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον περιγραφομένου κύκλου.

Ἀλλὰ δὴ αἱ ΔΖ ΕΖ συμπιπτέτωσαν ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου (ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΒΓ) κατὰ τὸ Ζ πάλιν, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς τρίτης καταγραφῆς, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΒΖ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ· βάσις ἄρα ἡ ΑΖ βάσει τῇ ΖΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΑ ἐστὶν ἴση, ὥςτε καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση· ὁ ἄρα πάλιν κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΑ ΖΒ ΖΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγραφόμενος περὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. Καὶ γεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓ

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τρίγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι, ὅτε μὲν ἐντὸς τοῦ τριγώνου πίπτει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν μείζονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα ἐλάττων ἐστὶν ὀρθῆς· ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθή ἐστιν· ὅτε δὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ τριγώνου πίπτει, ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐν ἐλάττονι τμήματι τοῦ ἡμικυκλίου τυγχάνουσα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. (Ὥςτε καὶ ὅταν ἐλάττων ὀρθῆς τυγχάνῃ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία, ἐντὸς τοῦ τριγώνου συμπεσοῦνται αἱ ΔΖ ΕΖ· ὅταν δὲ ὀρθή, ἐπὶ τῆς ΒΓ· ὅταν δὲ μείζων ὀρθῆς, ἐκτὸς τῆς ΒΓ.)

Πρότασις ϛ'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι. 6.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἐγγράψαι. Fig. 6.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΔ, κέντρον γὰρ τὸ Ε, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΑ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΑΔ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΒΓ ΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΑ ΑΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΒΔ εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ἡμικύκλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΔ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΔ ΓΔΑ ὀρθή ἐστιν· ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. Καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Εἰς τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ τετράγωνον ἐγγέγραπται τὸ ΑΒΓΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ζ'.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. 7.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψαι. Fig. 7.

Ἤχθωσαν τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΑΓ ΒΔ, καὶ διὰ τῶν Α Β Γ Δ σημείων ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου αἱ ΖΗ ΗΘ ΘΚ ΚΖ.

Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΖΗ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου,

ἀπὸ δὲ τοῦ Ε κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Α ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΕΑ· αἱ ἄρα πρὸς τῷ Α γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β Γ Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία, ἔστι δὲ ὀρθὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΒΗ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΑΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΖΚ παράλληλός ἐστιν. Ὥςτε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΖΚ ἐστὶ παράλληλος. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΖ ΘΚ τῇ ΒΔ ἐστὶ παράλληλος. Παραλληλόγραμμα ἄρα ἐστὶ τὰ ΗΚ ΗΓ ΑΚ ΖΒ ΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΗΖ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΗΘ τῇ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, ἀλλὰ καὶ ἡ μὲν ΑΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ ΖΚ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΒΔ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ ΘΚ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΗΘ ΖΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΗΖ ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΗΒΕΑ, καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ πρὸς τοῖς Θ Κ Ζ γωνίαι ὀρθαί εἰσιν. ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΗΘΚ τετράπλευρον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τετράγωνον ἄρα ἐστί. Καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον τετράγωνον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις η.

Εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι. 8.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Fig. 8.

Τετμήσθω ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΑΔ δίχα κατὰ τὰ Ζ Ε σημεῖα, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ε ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΘ, διὰ δὲ τοῦ Ζ ὁποτέρᾳ

τῶν ΑΔ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΚ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἕκαστον τῶν ΑΚ ΚΒ ΑΘ ΘΔ ΑΗ ΗΓ ΒΗ ΗΔ, καὶ αἱ ἀπεναντίον αὐτῶν πλευραὶ δηλονότι ἴσαι εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΒ, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΔ ἡμίσεια ἡ ΑΕ, τῆς δὲ ΑΒ ἡμίσεια ἡ ΑΖ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΖ· ὥςτε καὶ αἱ ἀπεναντίον ἴσαι εἰσίν, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΕ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΗΘ ΗΚ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΗ ΗΕ ἐστὶν ἴση· Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΗΕ ΗΖ ΗΘ ΗΚ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ ΗΖ ΗΘ ΗΚ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων· καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Ε Ζ Θ Κ γωνίας· εἰ γὰρ τεμεῖ ὁ κύκλος τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ, ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κυκλοῦ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ μὲν τῷ Η διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΗΕ ΗΖ ΗΘ ΗΚ κύκλος γραφόμενος τέμνει τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΑΔ εὐθείας. Ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν καὶ ἔσται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον.

Εἰς τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις θ'.

Περὶ τὸ δοθὲν τετράγωνον κύκλον περιγράψαι. 9.

Ἔστω τὸ δοθὲν τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον κύκλον περιγράψαι· Fig. 9.

Ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΓ ΒΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ ΑΓ δυσὶ ταῖς ΒΑ ΑΓ ἴσαι

εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΔ ΓΔΑ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῶν ΑΓ ΔΒ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΔΑΒ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΑΒ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΒΓ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΕΒΑ· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΕΒΑ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΕΑ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΑ ΕΒ εὐθειῶν ἑκατέρᾳ τῶν ΕΓ ΕΔ ἴση ἐστίν. Αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΕΑ ΕΒ ΕΓ ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ε καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΕΑ ΕΒ ΕΓ ΕΔ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος περὶ τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον. Περιγεγράφθω ὡς ὁ ΑΒΓΔ.

Περὶ τὸ δοθὲν ἄρα τετράγωνον κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνον συστήσασθαι ἔχον 10.
ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ Fig. 10.
τὸ Γ σημεῖον, ὥςτε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετραγώνῳ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΔΕ καὶ ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΒΔΕ κύκλον τῇ ΑΓ εὐθείᾳ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς τοῦ ΒΔΕ κύκλου διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΒΔ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΓΔ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΑΓΔ τρίγωνον κύκλος ὁ ΑΓΔ.

Καὶ

Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ κύκλου τοῦ ΑΓΔ εἴληπταί τι σημεῖον ἐκτὸς τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς τὸν ΑΓΔ κύκλον προςπεπτώκασι δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΑ ΒΔ, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνει, ἡ δὲ προςπίπτει, καὶ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ· ἡ ΒΔ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΑΓΔ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΒΔ, ἀπὸ δὲ τῆς κατὰ τὸ Δ ἐπαφῆς διῆκται ἡ ΔΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τοῦ κύκλου τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΓΔΑ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ ΔΑΓ. Ἀλλὰ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ ΔΑΓ ἴση ἐστὶν ἡ ἐκτὸς ἡ ὑπὸ ΒΓΔ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΔΑ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΒΔΑ τῇ ὑπὸ ΓΒΔ ἐστὶν ἴση, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἐστὶν ἴση. Αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΔΑ ΔΒΑ ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΒΔ πλευρᾷ τῇ ΔΓ. Ἀλλ' ἡ ΒΔ τῇ ΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΔΑ ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΔΑΓ διπλασίους εἰσίν. Ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ταῖς ὑπὸ ΓΔΑ ΔΑΓ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶ διπλῆ. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΔΑ ΔΒΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΔΑ ΔΒΑ τῆς ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶ διπλῆ.

Ἰσοσκελὲς ἄρα τρίγωνον συνέσταται τὸ ΑΔΒ ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τῇ ΔΒ βάσει γωνιῶν διπλασίονα τῆς λοιπῆς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιά.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 11.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Fig. 11

Ἐκκείσθω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΖΗΘ, διπλασίονα ἔχον ἑκατέραν τῶν πρὸς τοῖς Η Θ γωνιῶν τῆς πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ ἰσογώνιον τρίγωνον τὸ ΑΓΔ, ὥςτε τῇ μὲν πρὸς τῷ Ζ γωνίᾳ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΓΑΔ, ἑκατέραν δὲ τῶν πρὸς τοῖς Η Θ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΓΔ ΓΔΑ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ ΓΔΑ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶ διπλῆ. Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ ΓΔΑ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ ΔΒ εὐθειῶν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΓΔ ΓΔΑ γωνιῶν διπλασίων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΑΔ, καὶ τετμημέναι εἰσὶ δίχα ὑπὸ τῶν ΓΕ ΔΒ εὐθειῶν· αἱ πέντε ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΑΓ ΑΓΕ ΕΓΔ ΓΔΒ ΒΔΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ πέντε ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ περιφέρεια τῇ ΔΕ περιφερείᾳ ἴση ἐστὶ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΒΓΔ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλη τῇ ΕΔΓΒ περιφερείᾳ ἴση ἐστί· καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΑΒΓΔ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒ περιφερείας γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΕ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ

αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΔ ΓΔΕ γωνιῶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΕ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ.

Περὶ τὸν δοθέντα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι. 12.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγράψαι. Fig. 12.

Νενοήσθω τοῦ ἐγγεγραμμένου πενταγώνου τῶν γωνιῶν σημεῖα, τὰ Α Β Γ Δ Ε, ὥςτε ἴσας εἶναι τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ περιφερείας· καὶ διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε ἤχθωσαν τοῦ κύκλου ἐφαπτόμεναι αἱ ΗΘ ΘΚ ΚΛ ΛΜ ΜΗ, καὶ εἰλήφθω τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ ΖΚ ΖΓ ΖΛ ΖΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ΚΛ εὐθεῖα ἐφάπτεται τοῦ ΑΒΓΔΕ κύκλου κατὰ τὸ Γ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ζ κέντρου ἐπὶ τὴν κατὰ τὸ Γ ἐπαφὴν ἐπέζευκται ἡ ΖΓ· ἡ ΖΓ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν ΚΛ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν πρὸς τῷ Γ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Β Δ σημείοις γωνίαι ὀρθαί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΖΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΓ ΓΚ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ ΒΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΚ· ὥςτε τὰ ἀπὸ τῶν ΖΓ ΓΚ τοῖς ἀπὸ τῶν ΖΒ ΒΚ ἐστὶν ἴσα, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΖΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΚ ἴσον ἐστὶ, ἴση ἄρα ἡ ΓΚ τῇ

ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΒ τῇ ΖΓ, καὶ κοινὴ ἡ ΖΚ· δύο δὴ αἱ ΒΖ ΖΚ δυσὶ ταῖς ΓΖ ΖΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΒΚ βάσει τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΖΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΖ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΚΓ τῆς ὑπὸ ΖΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ τῆς ὑπὸ ΓΖΛ ἐστὶ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΛΔ τῆς ὑπὸ ΓΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ τῇ ὑπὸ ΓΖΔ. Καί ἐστιν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΖΓ τῆς ὑπὸ ΚΖΓ διπλῆ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΓ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΛΖΓ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΚΖΓ τῇ ὑπὸ ΛΖΓ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΓΛ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνα ἐστὶ τὰ ΖΚΓ ΖΛΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ, καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΚΓ εὐθεῖα τῇ ΓΛ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΓΛ, διπλῆ ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΚΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΒΚ διπλῆ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἴση ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ, καί ἐστι διπλῆ ἡ μὲν ΚΛ τῆς ΚΓ ἡ δὲ ΘΚ τῆς ΒΚ, καὶ ἡ ΘΚ ἄρα τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ΘΗ ΗΜ ΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ΘΚ ΚΛ ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΓ, καὶ ἐδείχθη τῆς μὲν ὑπὸ ΖΚΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ, τῆς δὲ ὑπὸ ΖΛΓ διπλῆ ἡ ὑπὸ ΚΛΜ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΛ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΛΜ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΚΘΗ ΘΗΜ ΗΜΛ ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΛ ΚΛΜ ἴση· αἱ πέντε ἄρα γω-

νίαι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ ΘΚΛ ΚΛΜ ΛΜΗ ΜΗΘ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘΚΛΜ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον, καὶ περιγέγραπται περὶ τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον.

Περὶ τὸν δοθέντα ἄρα κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ.

Εἰς τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον ἐγγράψαι. 13.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ εἰς τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον ἐγγράψαι. Fig. 13.

Τετμήσθω γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ ΔΖ εὐθειῶν· καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ᾽ ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ ΓΖ ΔΖ εὐθεῖαι, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΒ ΖΑ ΖΕ εὐθεῖαι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΒΓ ΓΖ δυσὶ ταῖς ΔΓ ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΖ βάσει τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΒΖΓ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΖ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῆς ὑπὸ ΓΔΖ, ἴση δὲ ἡ μὲν ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΖ. καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΑ ἄρα τῆς ὑπὸ ΓΒΖ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΒΖ εὐθείας. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΑΕ ΑΕΔ δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΖΑ ΖΕ εὐθειῶν. Ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἐπὶ

τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ εὐθείας κάθετοι αἱ ΖΗ ΖΘ ΖΚ ΖΛ ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΓΖ, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΖΘΓ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΖΚΓ ἴση, δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΖΘΓ ΖΚΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, κοινὴν αὐτῶν τὴν ΖΓ ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ ΖΘ κάθετος τῇ ΖΚ καθέτῳ· Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΛ ΖΜ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘ ΖΚ ἴση ἐστίν· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΗ ΖΘ ΖΚ ΖΛ ΖΜ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ ΖΘ ΖΚ ΖΛ ΖΜ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἐφάψεται τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ εὐθειῶν, διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς Η Θ Κ Λ Μ σημείοις γωνίας. Εἰ γὰρ οὐκ ἐφάψεται αὐτῶν, ἀλλὰ τεμεῖ αὐτὰς, συμβήσεται τὴν τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένην ἐντὸς πίπτειν τοῦ κύκλου, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη. Οὐκ ἄρα ὁ κέντρῳ τῷ Ζ διαστήματι δὲ ἑνὶ τῶν ΖΗ ΖΘ ΖΚ ΖΛ ΖΜ εὐθειῶν γραφόμενος κύκλος τεμεῖ τὰς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΑ εὐθείας· ἐφάψεται ἄρα αὐτῶν. Γεγράφθω ὡς ὁ ΗΘΚΛΜ.

Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιδ.'

14. Περὶ τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλον περιγράψαι.

Ἔστω τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν Fig. 14.

τε καὶ ἰσογώνιον, τὸ ΑΒΓΔΕ· δεῖ δὴ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλον περιγράψαι.

Τετμήσθω δὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΓΔ ΓΔΕ γωνιῶν δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν ΓΖ ΔΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου, καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ εὐθεῖαι, ἐπὶ τὰ Β Α Ε σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΖΒ ΖΑ ΖΕ. Ὁμοίως δὴ τῷ πρὸ τούτου δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὑπὸ ΓΒΑ ΒΑΕ ΑΕΔ γωνιῶν δίχα τέτμηται ὑπὸ ἑκάστης τῶν ΖΒ ΑΖ ΕΖ εὐθειῶν. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΓΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, καί ἐστι τῆς μὲν ὑπὸ ΒΓΔ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΖΓΔ, τῆς δὲ ὑπὸ ΓΔΕ ἡμίσεια ἡ ὑπὸ ΓΔΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΖΓΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΖΓ πλευρᾷ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΖΒ ΖΑ ΖΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΖΓ ΖΔ ἐστὶν ἴση· αἱ πέντε ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΖΑ ΖΒ ΖΓ ΖΔ ΖΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ζ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΖΑ ΖΒ ΖΓ ΖΔ ΖΕ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τῶν λοιπῶν σημείων, καὶ ἔσται περιγεγραμμένος. Περιγεγράφθω, καὶ ἔστω ὁ ΑΒΓΔΕ.

Περὶ ἄρα τὸ δοθὲν πεντάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, κύκλος περιγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιέ.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 15.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕΖ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Fig. 15.

Ἤχθω τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου διάμετρος ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Η, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Δ διαστήματι δὲ τῷ ΔΗ κύκλος γε-

γράφθω ὁ ΕΗΓΘ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΕΗ ΓΗ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Β Ζ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΑ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε ἐστὶ καὶ ἰσογώνιον.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒΓΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΗΔ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΕΗΓΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΔΗ. Ἀλλ' ἡ ΗΔ τῇ ΗΕ ἐδείχθη ἴση, καὶ ἡ ΗΕ ἄρα τῇ ΕΔ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗΔ τρίγωνον, καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αὐτοῦ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ ΗΔΕ ΔΕΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, ἐπειδήπερ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καί εἰσιν αἱ τρεῖς τοῦ τριγώνου γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ γωνία τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΓ τρίτον δύο ὀρθῶν. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΗ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΕΒ σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΗΓ ΓΗΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιεῖ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ τρίτον ἐστὶ δύο ὀρθῶν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΓ ΓΗΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥςτε καὶ αἱ κατὰ κορυφὴν αὐταῖς αἱ ὑπὸ ΒΗΑ ΑΗΖ ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΓ ΓΗΒ ΒΗΑ ΑΗΖ ΖΗΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Αἱ δὲ ἴσαι γωνίαι ἐπὶ ἴσων περιφερειῶν βεβήκασιν· αἱ ἓξ ἄρα περιφέρειαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ὑπὸ δὲ τὰς ἴσας περιφερείας ἴσαι εὐθεῖαι ὑποτείνουσιν· αἱ ἓξ ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ΕΖ ΖΑ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον· λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιον. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΑ περιφέρεια τῇ ΕΔ περιφερείᾳ, κοινὴ προςκείσθω ἡ ΑΒΓΔ περιφέρεια· ὅλη ἄρα ἡ ΖΑΒΓΔ περιφέρεια ὅλῃ τῇ ΕΔΓΒΑ περιφερείᾳ ἐστὶν ἴση, καὶ βέβηκεν ἐπὶ μὲν τῆς ΖΑΒΓΔ

περιφερείας ἡ ὑπὸ ΖΕΔ γωνία, ἐπὶ δὲ τῆς ΕΔΓΒΑ περιφερείας ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΕΔ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι τοῦ ΑΒΓΔΕΖ ἑξαγώνου κατὰ μίαν ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΑΖΕ ΖΕΔ γωνιῶν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ ἑξάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. καὶ ἐγγέγραπται εἰς τὸν ΑΒΓΔΕΖ κύκλον.

Εἰς ἄρα τὸν δοθέντα κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγέγραπται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου.

(Καὶ ἐὰν διὰ τῶν Α Β Γ Δ Ε Ζ σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον ἑξάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον, ἀκολούθως τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις. Καὶ ἔτι διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις, εἰς τὸ δοθὲν ἑξάγωνον κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.)

Πρότασις ις'.

Εἰς τὸν δοθέντα κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. 16.

Ἔστω ὁ δοθεὶς κύκλος ὁ ΑΒΓΔ· δεῖ δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον ἐγγράψαι. Fig. 16.

Ἐνηρμόσθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τριγώνου μὲν ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς αὐτὸν ἐγγραφομένου πλευρὰ ἡ ΑΓ, πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΑΒ· οἵων ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἴσων τμημάτων δεκαπέντε, τοιούτων ἡ μὲν ΑΒΓ περιφέρεια τρίτον οὖσα τοῦ

κύκλου ἔσται πέντε, ἡ δὲ ΑΒ περιφέρεια πεμπτὸν οὖσα τοῦ κύκλου ἔσται τριῶν· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΓ τῶν ἴσων δύο. Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, ἑκατέρα ἄρα τῶν ΒΕ ΕΓ περιφερειῶν πεντεκαιδέκατον ἔσται τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου.

Ἐὰν ἄρα, ἐπιζεύξαντες τὰς ΒΕ ΕΓ εὐθείας, ἴσας αὐταῖς κατὰ τὸ συνεχὲς εὐθείας ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἔσται εἰς αὐτὸν ἐγγεγραμμένον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον· (διὰ τῶν ὁμοίων ταῖς ἐν τῷ πρὸ τούτου δείξεσιν) ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου, ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλου διαιρέσεων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, περιγραφήσεται περὶ τὸν κύκλον πεντεκαιδεκάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. Ἔτι δὲ διὰ τῶν ὁμοίων τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου εἰρημένοις καὶ εἰς τὸ δοθὲν πεντεκαιδεκάγωνον, κύκλον ἐγγράψομέν τε καὶ περιγράψομεν.)

Τέλος τοῦ τετάρτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ.

Ὅροι.

α΄. Μέρος ἐστὶ μέγεθος μεγέθους, τὸ ἔλασσον 1.
τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον.

β΄. Πολλαπλάσιον δὲ τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάσσο- 2.
νος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

γ΄. (Λόγος ἐστὶ δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ 3.
πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποιὰ σχέσις.)

δ΄. Λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα μεγέθη λέγεται, 4.
ἃ δύναται πολλαπλασιαζόμενα ἀλλήλων ὑπερέχειν.

ε΄. Ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ μεγέθη λέγεται εἶναι, 5.
πρῶτον πρὸς δεύτερον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ὅταν τὰ τοῦ πρώτου καὶ τρίτου ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν τοῦ δευτέρου καὶ τετάρτου ἰσάκις πολλαπλασίων, καθ᾽ ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, ἑκατέρον ἑκατέρου, ἢ ἅμα ὑπερέχῃ, ἢ ἅμα ἴσα ᾖ, ἢ ἅμα ἐλλείπῃ, ληφθέντα κατάλληλα.

ς΄. Ὅταν δὲ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων τὸ μὲν 6.
τοῦ πρώτου πολλαπλάσιον ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ δευτέρου πολλαπλασίου, τὸ δὲ τοῦ τρίτου πολλαπλάσιον μὴ ὑπερέχῃ τοῦ τοῦ τετάρτου πολλαπλασίου· τότε τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον μείζονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ τὸ τρίτον πρὸς τὸ τέταρτον.

ζ΄. Τὰ δὲ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον μεγέθη ἀνά- 7.
λογον καλείσθω.

η΄. (Ἀναλογία δὲ ἡ τῶν λόγων ταυτότης.) 8.

θ΄. Ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστοις ἐστίν. 9.

ι΄. Ὅταν δὲ τρία μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τρίτον διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον. 10.

ια΄. Ὅταν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἕνι πλεῖον, ἕως ἂν ἡ ἀναλογία ὑπάρχῃ. 11.

ιβ΄. Ὁμόλογα μεγέθη λέγεται εἶναι τὰ μὲν ἡγούμενα τοῖς ἡγουμένοις τὰ δὲ ἑπόμενα τοῖς ἑπομένοις. 12.

ιγ΄. Ἐναλλὰξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον, καὶ τοῦ ἑπομένου πρὸς τὸ ἑπόμενον 13.

ιδ΄. Ἀνάπαλιν λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἑπομένου, ὡς ἡγουμένου, πρὸς τὸ ἡγούμενον, ὡς ἑπόμενον. 14.

ιε΄. Σύνθεσις λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου μετὰ τοῦ ἑπομένου, ὡς ἑνὸς, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. 15.

ιϛ΄. Διαίρεσις δὲ λόγου ἐστὶ λῆψις τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου, πρὸς αὐτὸ τὸ ἑπόμενον. 16.

ιζ΄. Ἀναστροφὴ λόγου ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὴν ὑπεροχὴν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἡγούμενον τοῦ ἑπομένου. 17.

ιη΄. Διΐσου λόγος ἐστὶ, πλειόνων ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος, σὺν δύο λαμβανομένων καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὅταν ᾖ ὡς ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσι τὸ πρῶτον πρὸς τὸ ἔσχατον. (Λῆψις τῶν ἄκρων καθ' ὑπεξαίρεσιν τῶν μέσων.) 18.

ιθ΄. Τεταγμένη ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν ᾖ ὡς ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, ᾖ δὲ καὶ ὡς ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι. 19.

κʹ. Τεταραγμένη δὲ ἀναλογία ἐστὶν, ὅταν τριῶν ὄντων μεγεθῶν καὶ ἄλλων αὐτοῖς ἴσων τὸ πλῆθος γίνηται ὡς μὲν ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἡγούμενον πρὸς ἑπόμενον· ὡς δὲ ἐν τοῖς πρώτοις μεγέθεσιν ἑπόμενον πρὸς ἄλλο τι, οὕτως ἐν τοῖς δευτέροις μεγέθεσιν ἄλλο τι πρὸς ἡγούμενον. 20.

Πρότασις αʹ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου, ἰσάκις πολλαπλάσια· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. 1.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ ΑΒ ΓΔ ὁποσωνοῦν Fig. 1. μεγεθῶν τῶν Ε Ζ ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου, ἰσάκις πολλαπλάσια· λέγω ὅτι ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ ΓΔ τῶν Ε Ζ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἴσα τῷ Ζ, Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Ε μεγέθη ἴσα τὰ ΑΗ ΗΒ, τὸ δὲ ΓΔ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα τὰ ΓΘ ΘΔ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΓΘ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε· τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΑΗ ΓΘ τοῖς Ε Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τῷ Ε. καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ· ἴσα ἄρα καὶ τὰ ΗΒ ΘΔ τοῖς Ε Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ ἴσα τῷ Ε, τοσαῦτα καὶ ἐν τοῖς ΑΒ ΓΔ ἴσα τοῖς Ε Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ ΑΒ ΓΔ τῶν Ε Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου, ἰσάκις πολλα-

πλάσια· ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνὸς, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων.

Πρότασις β.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ᾖ δὲ καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τετάρτου· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον δευτέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τετάρτου. 2.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΔΕ τετάρτου τοῦ Ζ, ἔστω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ τετάρτου τοῦ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ. Fig. 2.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὅσα ἐστὶν ἐν τῷ ΒΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΖΘ ἴσα τῷ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν ὅλῳ τῷ ΑΗ ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν ὅλῳ τῷ ΔΘ ἴσα τῷ Ζ· ὁσαπλάσιον ἄρα ἐστὶ τῷ ΑΗ τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΔΘ τοῦ Ζ. Συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ δευτέρου τοῦ Γ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ τετάρτου τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότατις γ.

Ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τετάρτου, ληφθῇ δὲ 3.

ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ πρώτου καὶ τρίτου, καὶ διΐσου τῶν ληφθέντων ἑκάτερον ἑκατέρου ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, τὸ μὲν τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ τοῦ τετάρτου.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ Γ τετάρτου τοῦ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΕΖ ΗΘ· λέγω ὅτι ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Δ. Fig. 3.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΖ τοῦ Α καὶ τὸ ΗΘ τοῦ Γ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΕΖ ἴσα τῷ Α, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΗΘ ἴσα τῷ Γ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΕΖ εἰς τὰ τῷ Α μεγέθη ἴσα τὰ ΕΚ ΚΖ, τὸ δὲ ΗΘ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΗΛ ΛΘ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΕΚ ΚΖ τῷ πλήθει τῶν ΗΛ ΛΘ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Α τοῦ Β καὶ τὸ Γ τοῦ Δ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΚ τῷ Α, τὸ δὲ ΗΛ τῷ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΚ τοῦ Β καὶ τὸ ΗΛ τοῦ Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΖ τοῦ Β καὶ τὸ ΛΘ τοῦ Δ. Ἐπεὶ οὖν πρῶτον τὸ ΕΚ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον τὸ ΗΛ τετάρτου τοῦ Δ· ἐστὶ δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΚΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ ἕκτον τὸ ΛΘ τετάρτου τοῦ Δ· καὶ συντεθὲν ἄρα πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΕΖ δευτέρου τοῦ Β ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΗΘ τετάρτου τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον· καὶ τὰ 4.
ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ τε πρώτου καὶ τρί-

του πρὸς τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τοῦ δευτέρου, καὶ τετάρτου, καθ' ὁποιονοῦν πολλαπλασιασμὸν, τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, καὶ εἰλήφθω τῶν μὲν Α Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε Ζ, τῶν δὲ Β Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ. Fig. 4.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Ε Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ Λ, τῶν δὲ Η Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ μὲν Ε τοῦ Α, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ, καὶ εἴληπται τῶν Ε Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ Λ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Κ τοῦ Α καὶ τὸ Λ τοῦ Γ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Μ τοῦ Β καὶ τὸ Ν τοῦ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ Λ, τῶν δὲ Β Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Κ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Λ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Κ Λ τῶν Ε Ζ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ Ν τῶν Η Θ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Η, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Θ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν ἀφαιρεθέντος· καὶ τὸ λοιπὸν τοῦ λοιποῦ ἰσάκις ἔσται πολλαπλά- 5.

λαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ὅλον τοῦ ὅλου.

Μέγεθος γὰρ τὸ ΑΒ μεγέθους τοῦ ΓΔ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσιον, ὅπερ ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἔσται πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Fig. 5.

Ὁσαπλάσιον γάρ ἐστι τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΓΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΗΖ· κεῖται δὲ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ ἑκατέρου τῶν ΗΖ ΓΔ· ἴσον ἄρα τὸ ΗΖ τῷ ΓΔ· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΔΖ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσον δὲ τῷ ΗΓ τὸ ΔΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΕ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΕΒ τοῦ ΖΔ καὶ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ὅλον τὸ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα μέγεθος μεγέθους ἰσάκις ᾖ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τινὰ τῶν αὐτῶν ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσια· καὶ τὰ λοιπὰ τοῖς αὐτοῖς ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. 6.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ ΑΒ ΓΔ δύο μεγεθῶν τῶν Ε Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια, καὶ ἀφαιρεθέντα τὰ ΑΗ ΓΘ τῶν αὐτῶν Ε Ζ ἰσάκις ἔστω πολλαπλάσια· λέγω ὅτι καὶ λοιπὰ τὰ ΗΒ ΘΔ τοῖς Ε Ζ ἤτοι ἴσα ἐστὶν, ἢ ἰσάκις αὐτῶν πολλαπλάσια. Fig. 6

Ἔστω γὰρ πρότερον τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον· λέγω ὅτι καὶ τὸ ΘΔ τῷ Ζ ἴσον ἐστίν.

Κείσθω γὰρ τῷ Ζ ἴσον τὸ ΓΚ. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΗ τοῦ Ε καὶ τὸ ΓΘ τοῦ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΗΒ τῷ Ε, τὸ δὲ ΚΓ τῷ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε καὶ τὸ ΚΘ τοῦ Ζ. Ἰσάκις δὲ ὑπόκειται πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Ε, καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΚΘ τοῦ Ζ· καὶ τὸ ΓΔ τοῦ Ζ. Ἐπεὶ οὖν ἑκάτερον τῶν ΚΘ ΓΔ τοῦ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΘ τῷ ΓΔ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΓ λοιπῷ τῷ ΘΔ ἴσον ἐστὶν. Ἀλλὰ τὸ ΚΓ τῷ Ζ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΘΔ ἄρα τῷ Ζ ἴσον ἐστίν. Ὥςτε εἰ τὸ ΗΒ τῷ Ε ἴσον ἐστὶ, καὶ τὸ ΘΔ ἴσον ἔσται τῷ Ζ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν πολλαπλάσιον ᾖ τὸ ΗΒ τοῦ Ε, τοσαυταπλάσιον ἔσται καὶ τὸ ΘΔ τοῦ Ζ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη δύο μεγεθῶν ἰσάκις ᾖ . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Τὰ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὰ ἴσα. 7.

Ἔστω ἴσα μεγέθη τὰ Α Β, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Γ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν Α Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, καὶ τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α Β. Fig. 7

Εἰλφήθω γὰρ τῶν μὲν Α Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Δ Ε, τοῦ δὲ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Δ τοῦ Α καὶ τὸ Ε τοῦ Β, ἴσον δὲ τὸ Α τῷ Β· ἴσον ἄρα καὶ τὸ Δ τῷ Ε. Ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Δ τοῦ Ζ, ὑπερέχει καὶ τὸ Ε τοῦ Ζ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καὶ ἔστι τὰ μὲν Δ Ε τῶν Α Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ δὲ Ζ τοῦ Γ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Γ.

Λέγω ὅτι καὶ τὸ Ε πρὸς ἑκάτερον τῶν Α Β τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Δ τῷ Ε· ἄλλο δέ τι τὸ Ζ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ζ τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τοῦ Ε· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον. ἔλαττον, Καί ἐστι τὸ μὲν Ζ τοῦ Γ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ Δ Ε τῶν Α Β ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Β.

Τὰ ἴσα ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἐὰν μεγέθη τινὰ ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται.

Πρότασις η.

Τῶν ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· καὶ τὸ αὐτὸ πρὸς τὸ ἔλαττον μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ μεῖζον. 8.

Ἔστω ἄνισα μεγέθη τὰ ΑΒ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ πρὸς τὸ ΑΒ. Fig. 8.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ Γ, κείσθω τῷ Γ ἴσον τὸ ΑΕ, τὸ δὴ ἔλασσον τῶν ΑΕ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Ἔστω πρότερον τὸ ΑΕ ἔλαττον τοῦ ΕΒ. καὶ πεπολλαπλασιάσθω τὸ ΑΕ, ἕως οὗ τὸ γινόμενον μεῖζον γένηται τοῦ Δ, καὶ ἔστω αὐτοῦ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ μεῖζον τοῦ Δ, καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΗΘ τοῦ ΕΒ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ· καὶ εἰλήφθω τοῦ Δ διπλάσιον μὲν τὸ Λ, τριπλάσιον δὲ τὸ Μ, καὶ ἑξῆς ἑνὶ πλεῖον ἕως οὗ τὸ λαμβανόμενον πολλαπλάσιον μὲν γένηται τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τὸ Ν τετραπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ Κ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Κ τοῦ Ν πρώτως ἐστὶν ἔλαττον, τὸ Κ ἄρα τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΖΗ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΖΘ τοῦ ΑΒ, καὶ τὸ Κ τοῦ Γ· τὰ ΖΘ Κ ἄρα τῶν ΑΒ Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ Κ τοῦ Γ, ἴσον δὲ τὸ ΕΒ τῷ Γ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τῷ Κ. Τὸ δὲ Κ τοῦ Μ οὐκ ἔστιν ἔλαττον· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ΗΘ τοῦ Μ ἔλαττόν ἐστι. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΗ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ συναμφοτέρων τῶν Δ Μ μεῖζόν ἐστιν. Ἀλλὰ συναμφότερα τὰ Δ Μ τῷ Ν ἐστὶν ἴσα· ἐπειδήπερ τὸ Μ τοῦ Δ τριπλάσιόν ἐστι. συναμφότερα δὲ τὰ Δ Μ τοῦ Δ ἐστὶ τετραπλάσια, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ Ν τοῦ Δ τετραπλάσιον· συναμφότερα ἄρα τὰ Μ Δ τῷ Ν ἴσα ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΖΘ τῶν Δ Μ μεῖζον ἐστίν· τὸ ΖΘ ἄρα τοῦ Ν ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ἔστι τὰ μὲν ΖΘ Κ τῶν ΑΒ Γ ἰσάκις πολλαπλάσια,

τὸ δὲ Ν τοῦ Δ ἄλλο ὃ ἔτυχε πολλαπλάσιον· τὸ ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τὸ Δ πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ὁμοίως δείξομεν, ὅτι τὸ μὲν Ν τοῦ Κ ὑπερέχει, τοῦ δὲ ΖΘ οὐχ ὑπερέχει. Καί ἐστι τὸ μὲν Ν τοῦ Δ πολλαπλάσιον, τὰ δὲ ΖΘ Κ τῶν ΑΒ Γ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Δ πρὸς τὸ ΑΒ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΕ τοῦ ΕΒ μεῖζον ἔστω· τὸ δὴ ἔλαττον τὸ ΕΒ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ Δ μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΗΘ πολλαπλάσιον μὲν τοῦ ΕΒ, μεῖζον δὲ τοῦ Δ· καὶ ὁσαπλάσιόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΕΒ, τοσαυταπλάσιον γεγονέτω καὶ τὸ μὲν ΖΗ τοῦ ΑΕ, τὸ δὲ Κ τοῦ Γ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι τὰ ΖΘ Κ τῶν ΑΒ Γ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· Καὶ εἰλήφθω ὁμοίως τὸ Ν πολλαπλάσιον μὲν τοῦ Δ, πρώτως δὲ μεῖζον τοῦ ΖΗ· ὥςτε πάλιν τὸ ΖΗ τοῦ Μ οὐκ ἐστιν ἔλασσον, μεῖζον δὲ τὸ ΗΘ τοῦ Δ· ὅλον ἄρα τὸ ΖΘ τῶν Δ Μ, τοῦτ᾽ ἔστι τοῦ Ν, ὑπερέχει, τὸ δὲ Κ τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει, ἐπειδήπερ καὶ τὸ ΖΗ μεῖζον ὂν τοῦ ΗΘ, τοῦτ᾽ ἔστι τοῦ Κ, τοῦ Ν οὐχ ὑπερέχει. Καὶ ὡςαύτως κατακολουθοῦντες τοῖς ἐπάνω περαίνομεν τὴν ἀπόδειξιν.

Τῶν ἄρα ἀνίσων μεγεθῶν τὸ μεῖζον πρὸς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ.

Τὰ πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχοντα λόγον ἴσα ἀλλήλοις ἐστί· καὶ πρὸς ἃ τὸ αὐτὸ 9.

τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ἐκεῖνα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἐχέτω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Fig. 9.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν ἑκάτερον τῶν Α Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α Β τὸν αὐτὸν λόγον· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Εἰ γὰρ μή, οὐκ ἂν τὸ Γ πρὸς ἑκάτερον τῶν Α Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον· ἔχει δέ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Τῶν πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν. 10.

Ἐχέτω γὰρ τὸ Α πρὸς τὸ Γ μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστὶ τὸ Α τοῦ Β. Fig. 10

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β, ἢ ἔλασσον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Α τῷ Β· ἑκάτερον γὰρ ἂν τῶν Α Β πρὸς τὸ Γ τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐδὲ μὴν ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β· τὸ Α γὰρ ἂν πρὸς τὸ Γ ἐλάσσονα εἶχε λόγον, ἤπερ τὸ Β πρὸς τὸ Γ. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα ἔλασσόν ἐστι τὸ Α τοῦ Β. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, μεῖζον ἄρα ἐστι τὸ Α τοῦ Β.

Ἐχέτω δὴ πάλιν τὸ Γ πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Α· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ μεῖζον. Ἴσον μὲν οὖν οὐκ ἐστι τὸ Β τῷ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς ἑκάτερον τῶν Α Β τὸν αὐτὸν εἶχε λόγον. Οὐκ ἔχει δέ·

οὐκ ἄρα ἴσον ἐστὶ τὸ Α τῷ Β. Οὐ δὲ μὴν μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α· τὸ Γ γὰρ ἂν πρὸς τὸ Β ἐλάσσονα λόγον εἶχεν, ἤπερ πρὸς τὸ Α. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Α. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴσον, ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Β τοῦ Α.

Τῶν ἄρα πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιά.

Οἱ τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ, καὶ ἀλλήλοις εἰσὶν οἱ αὐτοί. 11.

Ἔστωσαν γὰρ ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, Fig. 11.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ Κ, τῶν δὲ Β Δ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ, τῶν δὲ Β Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ. καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ Κ, τῶν δὲ Δ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ἀλλὰ εἰ ὑπερέχει τὸ Θ τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Λ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· ὥςτε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καί εἰ ἔλαττον. ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Η Κ τῶν Α Ε ἴσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Λ Ν τῶν Β Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις

πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρ. τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Οἱ ἄρα τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ αὐτοὶ . . . ·ὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι,

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον· ἔσται ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. 12.

Ἔστωσαν ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον τὰ Α Β Γ Δ Ε Ζ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α Γ Ε πρὸς τὰ Β Δ Ζ. Fig. 12.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ Κ, τῶν δὲ Β Δ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ Κ τῶν δὲ Β Δ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ Ν· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Μ, καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον, Ὥςτε καὶ εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Λ, ὑπερέχει καὶ τὰ Η Θ Κ τῶν Λ Μ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσα· καὶ εἰ ἔλασσον, ἐλάσσονα. Καί ἐστι τὸ μὲν Η καὶ τὰ Η Θ Κ τοῦ Α καὶ τῶν Α Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια· ἐπειδήπερ ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ὁποσωνοῦν μεγεθῶν ἴσων τὸ πλῆθος, ἕκαστον ἑκάστου, ἰσάκις πολλαπλάσια, ὁσαπλάσιόν ἐστιν ἓν τῶν μεγεθῶν ἑνός, τοσαυταπλάσια ἔσται καὶ τὰ πάντα τῶν πάντων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ Λ καὶ τὰ Λ Μ Ν τοῦ Β καὶ τῶν Β Δ Ζ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὰ Α Γ Ε πρὸς τὰ Β Δ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τρίτον δὲ πρὸς τέταρτον μείζονα λόγον ἔχῃ, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον· καὶ πρῶτον πρὸς δεύτερον μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον πρὸς ἕκτον. 13.

Πρῶτον μὲν γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, τρίτον δὲ τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ μείζονα λόγον ἐχέτω, ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. λέγω ὅτι καὶ πρῶτον τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β μείζονα λόγον ἕξει, ἤπερ πέμπτον τὸ Ε πρὸς ἕκτον τὸ Ζ. Fig. 13.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἔστι τινὰ τῶν μὲν Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τῶν δὲ Δ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· καὶ τὸ μὲν τοῦ Γ πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Δ πολλαπλασίου ὑπερέχει, τὸ δὲ τοῦ Ε πολλαπλάσιον τοῦ τοῦ Ζ πολλαπλασίου οὐχ ὑπερέχει. Εἰλήφθω, καὶ ἔστω τῶν μὲν Γ Ε ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ, τῶν δὲ Δ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ Λ, ὥστε τὸ μὲν Η τοῦ Κ ὑπερέχειν, τὸ δὲ Θ τοῦ Λ μὴ ὑπερέχειν· καὶ ὁσαπλάσιον μέν ἐστι τὸ Η τοῦ Γ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Μ τοῦ Α· ὁσαπλάσιον δὲ τὸ Κ τοῦ Δ, τοσαυταπλάσιον ἔστω καὶ τὸ Ν τοῦ Β.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α Γ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ Η, τῶν δὲ Β Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ν Κ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Μ τοῦ Ν, ὑπερέχει καὶ τὸ Η τοῦ Κ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον.

καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. Ὑπερέχει δὲ τὸ Η τοῦ Κ, ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ Μ τοῦ Ν. Τὸ δὲ Θ τοῦ Λ οὐχ ὑπερέχει· καί ἐστι τὰ μὲν Μ Θ τῶν Α Ε ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Ν Λ τῶν Β Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· τὸ ἄρα Α πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ΄.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. 14.

Πρῶτον γὰρ τὸ Α πρὸς δεύτερον τὸ Β τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ Γ πρὸς τέταρτον τὸ Δ, μεῖζον δὲ ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Β τοῦ Δ μεῖζόν ἐστιν. Fig. 14.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε μέγεθος τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλαττόν ἐστιν· ἔλαττον ἄρα τὸ Δ τοῦ Β· ὥςτε μεῖζόν ἐστι τὸ Β τοῦ Δ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Β τῷ Δ· κἂν ἔλασσον ᾖ τὸ Α τοῦ Γ, ἔλασσον ἔσται καὶ τὸ Β τοῦ Δ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε΄.

Τὰ μέρη τοῖς ὡςαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα. 15.

Ἔστω γὰρ ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ Fig. 15.
καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΑΒ τοῦ Γ καὶ τὸ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μεγέθη ἴσα τῷ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ ἴσα τῷ Ζ. Διῃρήσθω τὸ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τῷ Γ μεγέθη ἴσα, τὰ ΑΗ ΗΘ ΘΒ, τὸ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Ζ ἴσα, τὰ ΔΚ ΚΛ ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ ΗΘ ΘΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΚ ΚΛ ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΑΗ ΗΘ ΘΒ ἀλλήλοις, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΔΚ ΚΛ ΛΕ ἴσα ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΘΒ πρὸς τὸ ΛΕ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων, πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΔΚ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Γ, τὸ δὲ ΔΚ τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΕ.

Τὰ ἄρα μέρη τοῖς ὡσαύτως . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ'.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ 16.
ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α Β Γ Δ, Fig. 16.
ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α Β ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Ε Ζ. τῶν δὲ Γ Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ Ε τοῦ Α καὶ τὸ Ζ τοῦ Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολ-

λαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον, ληφθέντα κατάλληλα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Ὡς δὲ τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Η Θ τῶν Γ Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ δεύτερον τοῦ τετάρτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ Ε τοῦ Η, ὑπερέχει καὶ τὸ Ζ τοῦ Θ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Ε Ζ τῶν Α Β ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Η Θ τῶν Γ Δ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Β πρὸς τὸ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, 17.
καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται.

Ἔστω συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον τὰ ΑΒ ΒΕ Fig. 17.
ΓΔ ΔΖ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ· λέγω ὅτι καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΕ ΕΒ ΓΖ ΖΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΘ ΘΚ ΛΜ ΜΝ· τῶν δὲ ΕΒ ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ ΚΞ ΝΠ.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ. Ἰσάκις δέ ἐστι πολλαπλάσιον τὸ ΗΘ τοῦ ΑΕ καὶ τὸ ΛΜ

τοῦ ΓΖ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ. Ἰσάκις δὲ ἦν πολλαπλάσιον τὸ ΛΜ τοῦ ΓΖ καὶ τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ· ἰσάκις ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον τὸ ΗΚ τοῦ ΑΒ καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΓΔ· τὰ ΗΚ ΛΝ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλασίον τὸ ΘΚ τοῦ ΕΒ καὶ τὸ ΜΝ τοῦ ΖΔ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΚΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΝΠ τοῦ ΖΔ· καὶ συντεθὲν τὸ ΘΞ τοῦ ΕΒ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσιον καὶ τὸ ΜΠ τοῦ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΖ, καὶ εἴληπται τῶν μὲν ΑΒ ΓΔ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΗΚ ΛΝ, τῶν δὲ ΕΒ ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ ΘΞ, ΜΠ· εἰ ἄρα ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Ὑπερεχέτω δὴ τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΘΚ ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ. Ἀλλ' εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΚ τοῦ ΘΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΝ τοῦ ΜΠ· ὑπερέχοντος ἄρα καὶ τοῦ ΛΝ τοῦ ΜΠ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΜΝ ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ· ὥστε εἰ ὑπερέχει τὸ ΗΘ τοῦ ΚΞ, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΜ τοῦ ΝΠ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ ΗΘ τῷ ΚΞ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΝΠ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν ΗΘ ΛΜ τῶν ΑΕ ΓΖ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ ΚΞ ΝΠ τῶν ΕΒ ΖΔ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη'.

Ἐὰν διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται. 18.

Ἔστω διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΕ ΕΒ ΓΖ ΖΔ, ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· λέγω ὅτι καὶ συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ. Fig. 18

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ· ἔσται ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΔΖ, ἢ πρὸς μεῖζον.

Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ ΔΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΔΗ, συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν· ὥςτε καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΕΒ, οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΗ πρὸς τὸ ΗΔ οὕτως τὸ ΓΖ πρὸς τὸ ΖΔ. Μεῖζον δὲ τὸ πρῶτον τὸ ΓΗ τοῦ τρίτου τοῦ ΓΖ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ δεύτερον τὸ ΗΔ τοῦ τετάρτου τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΕ, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς ἔλασσον τοῦ ΖΔ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ πρὸς μεῖζον· πρὸς αὐτὸ ἄρα.

Ἐὰν ἄρα διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθὲν πρὸς ἀφαιρεθὲν, καὶ τὸ λοιπὸν πρὸς τὸ λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. 19.

Ἔστω γὰρ ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸν τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΔ ἔσται, ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Fig. 19

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΒΑ πρὸς τὸ ΑΕ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΖ. Καὶ ἐπεὶ συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ διαιρεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ὡς ἄρα τὸ ΒΕ πρὸς τὸ, ΕΑ, οὕτως τὸ ΔΖ πρὸς τὸ ΖΓ, καὶ ἐναλλὰξ, ὡς τὸ ΒΕ πρὸς τὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ΕΑ πρὸς τὸ ΖΓ. Ὡς δὲ τὸ ΑΕ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ὑπόκειται ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΖ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὡς ὅλον πρὸς ὅλον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν συγκείμενα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀναστρέψαντι ἀνάλογον ἔσται.

Πρότασις κ΄.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος, καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ· καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. 20.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α Β Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ Ε Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, διΐσου δὲ μεῖζον ἔστω τὸ Α τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. Fig. 20.

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β, τὸ δὲ μεῖζον πρὸς τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ἔλαττον· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β· Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ

Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε· καὶ τὸ Δ ἄρα πρὸς τὸ Ε μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ζ πρὸς τὸ Ε. Τῶν δὲ πρὸς τὸ αὐτὸ λόγον ἐχόντων τὸ μείζονα λόγον ἔχον μεῖζόν ἐστι· μεῖζον ἄρα τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλαττον, ἔλαττον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, διΐσου δὲ τὸ πρῶτον τοῦ τρίτου μεῖζον ᾖ. καὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἕκτου μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον. 21.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α Β Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ Ε Ζ, σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, διΐσου δὲ τὸ Α τοῦ Γ μεῖζον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Δ τοῦ Ζ μεῖζον ἔσται· κἂν ἴσον, ἴσον, κἂν ἔλαττον, ἔλαττον. Fig. 2

Ἐπεὶ γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ Α τοῦ Γ, ἄλλο δέ τι τὸ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Γ πρὸς τὸ Β. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ Β, ἀνάπαλιν οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Ε ἄρα πρὸς τὸ Ζ μείζονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ Ε πρὸς τὸ Δ. Πρὸς ὃ δὲ τὸ αὐτὸ μείζονα λόγον ἔχει, ἐκεῖνο ἔλασσόν ἐστιν· ἔλασσον ἄρα ἐστὶ τὸ Ζ τοῦ Δ· μεῖζον ἄρα τὸ

τὸ Δ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἴσον ᾖ τὸ Α τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Ζ· κἂν ἔλασσον, ἔλασσον.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη καὶ ἄλλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Ἐὰν ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται. 22.

Ἔστω ὁποσαοῦν μεγέθη τὰ Α Β Γ, καὶ ἄλλα Fig. 22. αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Δ Ε Ζ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ, τῶν δὲ Β Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ Λ, καὶ ἔτι τῶν Γ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Μ Ν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε, καὶ εἴληπται τῶν μὲν Α Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ, τῶν δὲ Β Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Κ Λ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Κ πρὸς τὸ Μ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Ν. Ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η Κ Μ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Θ Λ Ν καὶ σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διΐσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Μ, ὑπερέχει καὶ τὸ Θ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Η Θ τῶν Α Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Μ Ν τῶν Γ Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ ὁποσαοῦν μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ'.

Ἐὰν ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα 23.
τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσται.

Ἔστω τρία μεγέθη τὰ Α Β Γ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς Fig. 23.
ἴσα τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τὰ Δ Ε Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν Α Β Δ ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Η Θ Κ, τῶν δὲ Γ Ε Ζ ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ Ν.

Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια τὰ Η Θ τῶν Α Β, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Η πρὸς τὸ Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· καί ἐστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ε· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ τὰ Θ Κ τῶν Β Δ ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· ἀλλ' ὡς τὸ Β πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Ε. Πάλιν, ἐπεὶ τὰ Λ Μ τῶν Γ Ε ἰσάκις ἐστὶ πολλαπλάσια· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ. Ἀλλ' ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ε, οὕτως τὸ Θ πρὸς τὸ Κ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Θ πρὸς τὸ Κ, οὕτως τὸ Λ πρὸς τὸ Μ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.

Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Η πρὸς τὸ Θ, οὕτως τὸ Μ πρὸς τὸ Ν· ἐπεὶ οὖν τρία μεγέθη ἐστὶ τὰ Η Θ Δ, καὶ ἄλλα αὐτοῖς ἴσα τὸ πλῆθος τὰ Κ Μ Ν σύνδυο λαμβανόμενα ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καί ἐστιν αὐτῶν τεταραγμένη ἡ ἀναλογία· διΐσου ἄρα, εἰ ὑπερέχει τὸ Η τοῦ Δ, ὑπερέχει καὶ τὸ Κ τοῦ Ν· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον. Καί ἐστι τὰ μὲν Η Κ τῶν Α Δ ἰσάκις πολλαπλάσια, τὰ δὲ Δ Ν τῶν Γ Ζ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ Δ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα ᾖ τρία μεγέθη, καὶ ἄλλα ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Ἐὰν πρῶτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον, καὶ τρίτον πρὸς τέταρτον, ἔχῃ δὲ καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον· καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον πρὸς δεύτερον τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον πρὸς τέταρτον. 24.

Πρῶτον γὰρ τὸ ΑΒ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἐχέτω λόγον, καὶ τρίτον τὸ ΔΕ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· ἐχέτω δὲ καὶ πέμπτον τὸ ΒΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἕκτον τὸ ΕΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ· λέγω ὅτι καὶ συντεθὲν πρῶτον καὶ πέμπτον τὸ ΑΗ πρὸς δεύτερον τὸ Γ τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον, καὶ τρίτον καὶ ἕκτον τὸ ΔΘ πρὸς τέταρτον τὸ Ζ. Fig. 24.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ Ζ, ὡς δὲ τὸ Γ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ Ζ πρὸς τὸ ΕΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΕΘ. Καὶ ἐπεὶ διῃρημένα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστι, καὶ

συντεθέντα ἀνάλογον ἔσται· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΒΗ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΘΕ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΒΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΕΘ πρὸς τὸ Ζ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΗ πρὸς τὸ Γ, οὕτως τὸ ΔΘ πρὸς τὸ Ζ.

Ἐὰν ἄρα πρῶτον πρὸς δεύτερον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ μέγιστον καὶ τὸ ἐλάχιστον τῶν δύο λοιπῶν μείζονά ἐστιν. 25.

Ἔστω τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ ΑΒ ΓΔ Ε Ζ, ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ· ἔστω δὲ μέγιστον μὲν αὐτῶν τὸ ΑΒ, ἐλάχιστον δὲ τὸ Ζ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ Ζ τῶν ΓΔ Ε μείζονά ἐστι. Fig. 25

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν Ε ἴσον τὸ ΑΗ, τῷ δὲ Ζ ἴσον τὸ ΓΘ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Ζ, ἴσον δὲ τὸ μὲν Ε τῷ ΑΗ, τὸ δὲ Ζ τῷ ΓΘ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΓΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ΑΗ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΓΘ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ΘΔ ἔσται ὡς ὅλον τὸ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸ ΓΔ. Μεῖζον δὲ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΘΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΗ τῷ Ε, τὸ δὲ ΓΘ τῷ Ζ· τὰ ἄρα ΑΗ Ζ ἴσα ἐστὶ τοῖς ΓΘ Ε. Καὶ ἐὰν ἀνίσοις ἴσα προςτεθῇ, τὰ ὅλα ἄνισα ἐστίν. Ἐὰν ἄρα, τῶν ΗΒ ΘΔ ἀνίσων ὄντων καὶ μείζονος τοῦ ΗΒ, τῷ μὲν ΗΒ προςτεθῇ τὰ ΑΗ Ζ, τῷ δὲ ΘΔ προςτεθῇ τὰ ΓΘ Ε· συνάγεται τὰ ΑΒ Ζ μείζονα τῶν ΓΔ Ε.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ πέμπτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ ἝΚΤΟΝ.

Ὅροι.

α'. Ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, 1.
ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει, κατὰ μίαν, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον.

β'. Ἀντιπεπονθότα δὲ σχήματά ἐστιν. ὅταν 2.
ἑκατέρῳ τῶν σχημάτων ἡγούμενοί τε καὶ ἑπόμενοι λόγων ὅροι ὦσιν.

γ'. Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθεῖα τε- 3.
τμῆσθαι λέγεται, ὅταν ᾖ ὡς ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα, οὕτως τὸ μεῖζον πρὸς τὸ ἔλασσον.

δ'. Ὕψος ἐστὶ πάντος σχήματος ἡ ἀπὸ τῆς 4.
κορυφῆς ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀγομένη.

ε'. (Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ 5.
τῶν λόγων πηλικότητες ἐφ' ἑαυτὰς πολλαπλασιασθεῖσαι ποιῶσί τινα.)

Πρότασις α'.

Τὰ τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα 1.
τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν, ὡς αἱ βάσεις.

Ἔστω τρίγωνα μὲν τὰ ΑΒΓ ΑΓΔ, παραλληλό- Fig. 1
γραμμα δὲ τὰ ΕΓ ΓΖ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρί-

γωνον, καὶ τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Θ Λ σημεῖα, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΒΓ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΒΗ ΗΘ, τῇ δὲ ΓΔ βάσει ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΔΚ ΚΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ ΑΘ ΑΚ ΑΛ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΓΒ ΒΗ ΗΘ ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΑΘΗ ΑΗΒ ΑΒΓ τρίγωνα ἀλλήλοις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΒΓ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΓΛ βάσις τῆς ΓΔ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον τοῦ ΑΓΔ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΘΓ βάσις τῇ ΓΛ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τῷ ΑΛΓ τριγώνῳ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου. καὶ εἰ ἐλάσσων, ἔλασσον. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΒΓ ΓΔ, δύο δὲ τριγώνων τῶν ΑΒΓ ΑΓΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν ΒΓ βάσεως καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἥτε ΘΓ βάσις καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον, τῆς δὲ ΓΔ βάσεως καὶ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια ἥτε ΓΛ βάσις καὶ τὸ ΑΛΓ τρίγωνον· καὶ δέδεικται ὅτι, εἰ ὑπερέχει ἡ ΘΓ βάσις τῆς ΓΛ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΑΘΓ τρίγωνον τοῦ ΑΛΓ τριγώνου· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλάττων, ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον.

Καὶ ἐπεὶ τοῦ μὲν ΑΒΓ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΑΓΔ τριγώνου διπλάσιόν ἐστι τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον, τὰ δὲ μέρη τοῖς ὡσαύτως πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει

λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΓΔ βάσιν, οὕτως τὸ ΕΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΓ παραλληλόγραμμον.

Τὰ ἄρα τρίγωνα καὶ τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν τριγώνου παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν 2.
ἀχθῇ τις εὐθεῖα, ἀνάλογον τεμεῖ τὰς λοιπὰς τοῦ τριγώνου πλευράς· καὶ ἐὰν αἱ τοῦ τριγώνου δύο πλευραὶ ἀνάλογον τμηθῶσιν, ἡ ἐπὶ τὰς τομὰς ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα παρὰ τὴν λοιπὴν ἔσται τοῦ τριγώνου πλευράν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ παράλληλος μιᾷ τῶν Fig. 2.
πλευρῶν τῇ ΒΓ ἤχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΓΔ.

Ἴσον δή ἐστι τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστι τῆς ΔΕ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΔΕ ΒΓ· ἄλλο δέ τι τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ· ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα, τὴν ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετον ἀγομένην, πρὸς ἄλληλά εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὡς τὸ

ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ.

Ἀλλὰ δὴ αἱ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευραὶ αἱ ΑΒ ΑΓ ἀνάλογον τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Δ Ε σημεῖα, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, ὡς δὲ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ, οὕτως τὸ ΓΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ. Ἑκάτερον ἄρα τῶν ΒΔΕ ΓΔΕ τριγώνων πρὸς τὸ ΑΔΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον. Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΔΕ τρίγωνον τῷ ΓΔΕ τριγώνῳ· καί εἰσιν ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΔΕ. Τὰ δὲ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστί. Παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου παρὰ μίαν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα τὴν γωνίαν εὐθεῖα τέμνῃ καὶ τὴν βάσιν· τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἕξει λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς· καὶ ἐὰν τὰ τῆς βάσεως τμήματα τὸν αὐτὸν ἔχῃ λόγον ταῖς λοιπαῖς τοῦ τριγώνου πλευραῖς, ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὴν τομὴν ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα δίχα τεμεῖ τὴν τοῦ τριγώνου γωνίαν. 3.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Fig. 3.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ ΔΑ παράλληλος ἡ ΓΕ, καὶ διαχθεῖσα ἡ ΒΑ συμπιπτέτω αὐτῇ κατὰ τὸ Ε.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΓ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΓΑΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΔ ΕΓ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΒΑΕ· ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς τῇ ὑπὸ ΑΕΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΓ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι δίχα τέτμηται ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἐστίν ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· τριγώνου γὰρ τοῦ ΒΓΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΓ ἦκται ἡ ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΑΕ, ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ τῇ ἐκτὸς τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση, ἴση δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ ΓΑΔ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ

ἄρα τῇ ὑπὸ ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. Ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΔ εὐθείας.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου γωνία δίχα τμηθῇ, ἡ δὲ τέμνουσα αὐτὴν εὐθεῖα τέμνῃ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Τῶν ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι. 4.

Ἔστω ἰσογώνια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΓΕ ἴσην Fig. 4. ἔχοντα τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΓΔΕ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ ΔΓΕ τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι.

Κείσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΑΓΒ γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσοσονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΓ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ ΒΑ ΕΔ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΕΓ, παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΕ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΑΓΔ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΖΑ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΖΒΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΖΕ ἦκται ἡ ΑΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΖ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ· Ἴση δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΓΔ· ὡς ἄρα ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Πάλιν,

ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΔΕ· Ἴση δὲ ἡ ΖΔ τῇ ΑΓ· ὡς ἄρα ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΕΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ· καὶ διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ.

Τῶν ἄρα ἰσογωνίων τριγώνων ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχῃ· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 5.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τὰς πλευρὰς ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὡς δὲ τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἔτι ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ. λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσας ἕξουσι τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσι, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ. Fig. 5.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς τῇ ΕΖ εὐθείᾳ, καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Ε Ζ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΖΕΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ ἐστὶν ἴση.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΗΖ τριγώνῳ· τῶν ἄρα ΑΒΓ ΕΗΖ τριγώνων ἀνάλογόν

εἰσιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ὁμόλογοι αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὡς ἄρα ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΔΕ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΗΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΗΖ ἐστὶν ἴση. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΔΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΗΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΗ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΕΖ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΗΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΕΔΖ τῇ ὑπὸ ΕΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΖΕΔ τῇ ὑπὸ ΖΕΗ ἐστὶν ἴση. ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς πλευρὰς ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. 6.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ, μίαν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ μιᾷ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην ἔχοντα, Fig. 6

περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἐστι τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴσην ἕξει τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

Συνεστάτω γὰρ πρὸς μὲν τῇ ΔΖ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Δ Ζ ὁποτέρᾳ μὲν τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ γωνιῶν ἴση ἡ ὑπὸ ΖΔΗ, τῇ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Η ἴση ἐστίν.

Ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἴση ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΔΗ, καὶ κοινὴ ἡ ΔΖ· δύο δὴ αἱ ΕΔ ΔΖ δυσὶ ταῖς ΗΔ ΔΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΔΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΔΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΖ βάσει τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΗΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΗΖ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ. Ἀλλ᾽ ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ε ἴση ἔστιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, τῶν δὲ λοιπῶν ἑκατέραν ἅμα ἤτοι ἐλάσσονα ἢ μὴ ἐλάσσονα ὀρθῆς· ἰσογώνια ἔσται τὰ τρίγωνα, καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, περὶ ἃς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί. 7.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ, περὶ δὲ ἄλλας γωνίας, τὰς ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ, τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, τῶν δὲ λοιπῶν τῶν πρὸς τοῖς Γ Ζ πρότερον ἑκατέραν ἅμα ἐλάσσονα ὀρθῆς· λέγω ὅτι ἰσογώνιον ἔσται τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ λοιπὴ δηλονότι ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση. Fig. 7.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν Α γωνία τῇ Δ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ὑπόκειται ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΗ, ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΓ ΒΗ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥςτε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἐστὶν ἴση. Ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ὑπόκειται ἡ

πρὸς τῷ Γ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ὀρθῆς καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ, ὥςτε ἡ ἐφεξῆς αὐτῇ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΗΒ μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Καὶ ἐδειχθη ἴση οὖσα τῇ πρὸς τῷ Ζ, καὶ ἡ πρὸς τῷ Ζ ἄρα μείζων ἐστὶν ὀρθῆς. Ὑπόκειται δὲ ἐλάσσων ὀρθῆς, ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α ἴση τῇ πρὸς τῷ Δ, καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ὑποκείσθω ἑκατέρα τῶν πρὸς τοῖς Γ Ζ μὴ ἐλάσσων ὀρθῆς· λέγω πάλιν ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ· ὥςτε καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Γ τῇ ὑπὸ ΒΗΓ ἴση ἐστίν. Οὐκ ἐλάττων δὲ ὀρθῆς ἡ πρὸς τῷ Γ, οὐκ ἐλάττων ἄρα ὀρθῆς οὐδὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΓ. Τριγώνου δὴ τοῦ ΒΗΓ αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν οὐκ εἰσιν ἐλάττονες, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πάλιν ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ· ἴση ἄρα. Ἔστι δὲ καὶ ἡ πρὸς τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Γ λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Ζ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τριγώνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ· τὰ πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 8

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ὅμοιόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΒΔ ΑΔΓ τριγώνων ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Fig. 8.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΒ, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΓ καὶ τοῦ ΑΒΔ ἡ πρὸς τῷ Β· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΑΔ ἐστὶν ἴση, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΑ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΒ ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πρὸς τὴν ΒΔ ὑποτείνουσαν τὴν ἴσην τῇ πρὸς τῷ Γ, τὴν ὑπὸ ΒΑΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, καὶ ἔτι ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΔ ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, κοινὴν αὐτῶν τῶν δύο τριγώνων· τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἰσογώνιόν τέ ἐστι, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΔ ΑΔΓ τριγώνων ὅμοιόν ἐστιν ὅλῳ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ.

Λέγω δὴ, ὅτι καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια τὰ ΑΒΔ ΑΔΓ τρίγωνα.

Ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐδείχθη ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Β λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΔΑΓ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ τοῦ ΑΒΔ τριγώνου ὑποτείνουσα τὴν ὑπὸ ΒΑΔ πρὸς τὴν ΔΑ τοῦ ΑΓΔ τριγώνου ὑποτείνουσαν τὴν πρὸς τῷ Γ γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΒΑΔ, οὕτως αὐτὴ ἡ ΑΔ

τοῦ

τοῦ ΑΒΔ τριγώνου, ὑποτείνουσα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν, πρὸς τὴν ΔΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὑπὸ ΔΑΓ τοῦ ΑΔΓ τριγώνου, ἴσην τῇ πρὸς τῷ Β· καὶ ἔτι ἡ ΒΑ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΒ πρὸς τὴν ΑΓ ὑποτείνουσαν τὴν ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΑΔΓ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΑΔΓ τριγώνῳ.

Ἐὰν ἄρα ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· καὶ ἔτι τῆς βάσεως καὶ ἑνὸς ὁποτερουοῦν τῶν τμημάτων ἡ πρὸς τῷ τμήματι πλευρὰ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Πρότασις θ'.

Τῆς δοθείσης εὐθείας τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν. 9.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τῆς ΑΒ τὸ προσταχθὲν μέρος ἀφελεῖν. Fig. 9.

Ἐπιτετάχθω δὴ τὸ τρίτον· καὶ διήχθω τις εὐθεῖα ἀπὸ τοῦ Α ἡ ΑΓ, γωνίαν περιέχουσα μέτα τῆς ΑΒ τυχοῦσαν· καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΓ τὸ Δ, καὶ κείσθωσαν τῇ ΑΔ ἴσαι αἱ ΔΕ ΕΓ. καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΖ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Διπλῆ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΑ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΒΖ τῆς ΖΑ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΑ τῆς ΑΖ.

Τῆς ἄρα δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τὸ ἐπιταχθὲν τρίτον μέρος ἀφήρηται τὸ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ι.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄτμητον τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν. 10.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ, ἡ δὲ τετμημένη ἡ ΑΓ, κατὰ τὰ Δ Ε σημεῖα· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ ἄτμητον τῇ ΑΓ τετμημένῃ ὁμοίως τεμεῖν. Fig. 10

Κείσθωσαν ὥςτε γωνίαν τυχοῦσαν περιέχειν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΒ, καὶ διὰ τῶν Δ Ε τῇ ΒΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΔΖ ΕΗ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΘΚ.

Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΖΘ ΘΒ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΘ τῇ ΖΗ, ἡ δὲ ΘΚ τῇ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΔΚΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΚΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΘΕ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΔ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΒΗ, ἡ δὲ ΘΔ τῇ ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΗΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΗ ἦκται ἡ ΖΔ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα ἄτμητος ἡ ΑΒ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τετμημένῃ τῇ ΑΓ ὁμοίως τέτμηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ια.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. 1

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ ΑΓ τρίτην ἀνάλογον προσευρεῖν. Fig. 1

Κείσθωσαν γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν αἱ ΑΒ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Δ Ε σημεῖα, καὶ κείσθω τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω ἡ ΔΕ.

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΑΔΕ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΔΕ ἦκται ἡ ΒΓ· ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΕ.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΑΓ, τρίτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΓΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ.

Τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν. 12.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α Β Γ· Fig. 12. δεῖ δὴ τῶν Α Β Γ εὐθειῶν τετάρτην ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἐκκείσθωσαν δύο εὐθεῖαι, αἱ ΔΕ ΔΖ, γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· καὶ κείσθω τῇ μὲν Α ἴση ἡ ΔΗ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΗΕ, καὶ ἔτι τῇ Γ ἴση ἡ ΔΘ· καὶ ἐπιζευχθείσης τῆς ΗΘ, παράλληλος αὐτῇ ἤχθω διὰ τοῦ Ε ἡ ΕΖ·

Ἐπεὶ οὖν τριγώνου τοῦ ΔΕΖ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΕΖ ἦκται ἡ ΗΘ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΘ πρὸς τὴν ΘΖ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΗ τῇ Α, ἡ δὲ ΗΕ τῇ Β, ἡ δὲ ΔΘ τῇ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν ΘΖ.

Τριῶν ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν Α Β Γ τετάρτη ἀνάλογον προσεύρηται ἡ ΘΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προςευρεῖν. 13.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσην ἀνάλογον προςευρεῖν. Fig. 13

Κείσθωσαν ἐπ' εὐθείας, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐν ἡμικυκλίῳ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΔΓ· ὀρθή ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΔΓ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΔΒ· ἡ ΔΒ ἄρα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΒ ΒΓ μέση ἀνάλογόν ἐστιν.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ, μέση ἀνάλογον προςεύρηται ἡ ΒΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιδ'.

Τῶν ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 14.

Ἔστω ἴσα τε καὶ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒ ΒΓ, ἴσας ἔχοντα τὰς πρὸς τῷ Β γωνίας, λέγω ὅτι τῶν ΑΒ ΒΓ ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Fig. 14

Κείσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας αἱ ΔΒ ΒΕ, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΖΒ ΒΗ· καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΖΕ· ἔστιν

ἄρα ὡς τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ὡς δὲ τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ. Τῶν ΑΒ ΒΓ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλὰ δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΒ πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΕ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΖΕ, οὕτως τὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΖΕ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων τε καὶ ἰσογωνίων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Τῶν ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· καὶ ὧν μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. **15.**

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΑΔΕ μίαν μιᾷ ἴσην ἔχοντα γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΔΑΕ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓ ΑΔΕ τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, τοῦτ' ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ. *Fig.* 15.

Κείσθω γὰρ ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΓΑ τῇ ΑΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ, ἄλλο δέ τι τὸ ΑΒΔ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΑΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΔΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΑΒ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ΕΑΔ πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· τῶν ΑΒΓ ΑΔΕ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ, αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας.

Ἀλλα δὴ ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ πλευραὶ τῶν ΑΒΓ ΑΔΕ τριγώνων, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΔΕ τριγώνῳ.

Ἐπιζευχθείσης γὰρ πάλιν τῆς ΒΔ, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ τρίγωνον· ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ, οὕτως τὸ ΕΑΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΑΔ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒΓ ΑΔΕ πρὸς τὸ ΒΑΔ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΑΔ τριγώνῳ.

Τῶν ἄρα ἴσων καὶ μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ'.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, 16.
τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων πε-

ριεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ ΓΔ Ε Ζ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ. Fig. 16.

Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Α Γ σημείων ταῖς ΑΒ ΓΔ εὐθείαις πρὸς ὀρθὰς αἱ ΑΗ ΓΘ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Ζ ἴση ἡ ΑΗ, τῇ δὲ Ε ἴση ἡ ΓΘ. καὶ συμπεπληρώσθωσαν τὰ ΒΗ ΔΘ παραλληλόγραμμα.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ, ἴση δὲ ἡ μὲν Ε τῇ ΓΘ, ἡ δὲ Ζ τῇ ΑΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ΒΗ ΔΘ ἄρα παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΘ παραλληλογράμμῳ. Καί ἐστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ· τὸ δὲ ΔΘ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ Ε, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ Ε περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· λέγω ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ Ε, καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ Ζ τὸ ΒΗ, ἴση γὰρ ἡ ΑΗ τῇ Ζ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ Ε τὸ ΔΘ, ἴση γὰρ ἡ ΓΘ τῇ Ε· τὸ ἄρα ΒΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· καί εἰσιν ἰσο-

γώνια. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΘ πρὸς τὴν ΑΗ· ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΘ τῇ Ε, ἡ δὲ ΑΗ τῇ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ Ε πρὸς τὴν Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ· καὶ ἐὰν τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ᾖ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 17.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α Β Γ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ. Fig. 17.

Κείσθω τῇ Β ἴση ἡ Δ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β Δ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν Β Δ τὸ ἀπὸ τῆς Β ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Γ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β τετραγώνῳ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ ἴσον ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ὑπὸ τῶν Β Δ ἐστὶν, ἴση γὰρ ἡ Β τῇ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Β Δ. Ἐὰν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Γ. Ἴση δὲ ἡ Β τῇ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι. 18.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΓΕ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγράψαι. Fig. 18.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΖ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Α Β τῇ μὲν πρὸς τῷ Γ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΑΒ, τῇ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΓΔ τρίγωνον τῷ ΗΑΒ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ. Πάλιν συνεστάτω πρὸς τῇ ΒΗ εὐθείᾳ καὶ τοῖς πρὸς αὐτῇ σημείοις τοῖς Β Η τῇ μὲν ὑπὸ ΔΖΕ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΗΘ, τῇ δὲ ὑπὸ ΖΔΕ ἴση ἡ ὑπὸ ΗΒΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε λοιπῇ τῇ πρὸς τῷ Θ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔΕ τρίγωνον τῷ ΗΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΖ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς

τὴν ΗΘ, καὶ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΖΔ πρὸς τὴν ΗΒ, οὕτως ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς τὴν ΑΗ, οὕτως ἥ τε ΓΔ πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔτι ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΘΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΓΖΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΗΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΗΘ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΖΕ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΒΘ ἐστὶν ἴση, ἔστι δὲ καὶ ἡ μὲν πρὸς τῷ Γ τῇ πρὸς τῷ Α ἴση, ἡ δὲ πρὸς τῷ Ε τῇ πρὸς τῷ Θ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ τῷ ΓΕ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΘ εὐθύγραμμον τῷ ΓΕ εὐθυγράμμῳ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΓΕ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον ἀναγέγραπται τὸ ΑΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιθ'.

Τὰ ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα ἐν δι- 19.
πλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Ἔστω ὅμοια τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἴσην *Fig.* 19.
ἔχοντα τὴν πρὸς τῷ Β γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Ε, ὡς δὲ τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὴν ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ, ὥςτε ὁμόλογον εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν ΒΓ ΕΖ τρίτη ἀνάλογον ἡ ΒΗ, ὥςτε εἶναι ὡς τὴν ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως τὴν ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΑ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἀλλ' ὡς

ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ· τῶν ΑΒΗ ΔΕΖ ἄρα τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. Ὧν δὲ, μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν τριγώνων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΗ, ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην διπλασίονα λόγον ἔχειν λέγεται, ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν· ἡ ΒΓ ἄρα πρὸς τὴν ΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΗ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ· καὶ τὸ ΑΒΓ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια τρίγωνα πρὸς ἄλληλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. (Ἐπείδηπερ ἐδείχθη, ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΒΗ τρίγωνον, τοῦτ' ἔστι τὸ ΔΕΖ.)

Πρότασις κ΄.

Τὰ ὅμοια πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις· καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς 20.

τὸ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Ἔστω ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, Fig. 20. ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ πολύγωνα εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΕΓ ΗΛ ΛΘ.

Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ· καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΖΛ. Ἐπεὶ οὖν δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΕ ΖΗΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, ὥςτε καὶ ὅμοιον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΛ, Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἴση, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΛΗΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΕ ΖΗΛ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΖ, ἀλλὰ μὴν καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνον ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ περὶ τὰς ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΒΓ ΛΗΘ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ, ὥςτε καὶ ὅμοιον ἔτι τὸ ΕΒΓ τριγώνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΛΘΚ τριγώνῳ· τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ εἴς τε ὅμοια τρίγωνα διῄρηται καὶ εἰς ἴσα τὸ πλῆθος.

Λέγω ὅτι καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, τοῦτ' ἔστιν, ὥςτε ἀνάλογον εἶναι τὰ τρίγωνα, καὶ ἡγούμενα μὲν εἶναι τὰ ΑΒΕ ΕΒΓ ΕΓΔ, ἑπόμενα δὲ αὐτῶν τὰ ΖΗΛ ΛΗΘ ΛΘΚ, καὶ ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογὸς πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τοῦτ' ἔστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΖΘ.

Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν πολυγώνων ἴση ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ, καὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΖΗ πρὸς τὴν ΗΘ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΖΗΘ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΘ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΜ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΝ, ἐδείχθη δὲ καί ἡ ὑπὸ ΑΒΜ τῇ ὑπὸ ΖΗΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΜΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ ΒΜΓ τρίγωνον ἰσογώνιον ἐστὶ τῷ ΗΝΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν, ὡς μὲν ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΒ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΜΓ, οὕτως ἡ ΗΝ πρὸς τὴν ΝΘ· ὥςτε καὶ διίσου, ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΜΒΓ, καὶ τὸ ΑΜΕ πρὸς τὸ ΕΜΓ, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπόμενων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ΑΜΒ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΓΒΕ· Ἀλλ' ὡς τὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ΒΜΓ, οὕτως ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΜ πρὸς τὴν ΜΓ, οὕτως τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον

πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. Καί ἐστιν ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΜΓ, οὕτως ἡ ΖΝ πρὸς τὴν ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΖΗΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΘΛ τρίγωνον, καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ἐπιζευχθεισῶν τῶν ΒΔ ΗΚ, ὅτι καὶ ὡς τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, καὶ ἔτι τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. Ἀλλὰ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν· τὰ γὰρ ὅμοια τρίγωνα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΒΓΔΕ ἄρα πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΒ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΗ ὁμόλογον πλευράν.

Τὰ ἄρα ὅμοια πολύγωνα εἴς τε . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα ά.

Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ὁμοίων τετραπλεύρων δειχθήσεται, ὅτι ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥςτε καὶ καθόλου τὰ ὅμοια εὐθύγραμμα σχήματα πρὸς ἄλληλα ἐν διπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

Πόρισμα β'.

Καί ἐὰν τῶν ΑΒ ΖΗ τρίτην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Ξ, ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ πολύγωνον, καὶ τὸ τετράπλευρον πρὸς τὸ τετράπλευρον διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΖΗ· ἐδείχθη δὲ τοῦτο καὶ ἐπὶ τῶν τριγώνων· ὥςτε καὶ καθόλου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον.

Πρότασις κά.

Τὰ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· 21.

Ἔστω γὰρ ἑκάτερον τῶν Α Β εὐθυγράμμων Fig. 21.
τῷ Γ ὅμοιον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶν ὅμοιον.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ· ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ. ἰσογώνιόν τέ ἐστιν αὐτῷ, καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει. Ἑκάτερον ἄρα τῶν Α Β τῷ Γ ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει, ὥςτε καὶ τὸ Α τῷ Β ἰσογώνιόν τέ ἐστι καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον ἔχει· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, 22.
καὶ τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ

ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ' αὐτῶν εὐθύγραμμα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα ἀνάλογον ᾖ, καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ ΓΔ ΕΖ ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΚΑΒ ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΜΖ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ. Fig. 22

Εἰλήφθω γὰρ τῶν μὲν ΑΒ ΓΔ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ξ, τῶν δὲ ΕΖ ΗΘ τρίτη ἀνάλογον ἡ Ο. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν Ο· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Ξ, οὕτως τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν Ο, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΛΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· λέγω ὅτι ἐστὶ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Γεγονέτω γὰρ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΠΡ ὁποτέρῳ τῶν ΜΖ ΝΘ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον εὐθύγραμμον τὸ ΣΡ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΑΒ ΓΔ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΚΑΒ ΛΓΔ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ ΠΡ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα τὰ ΜΖ ΣΡ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ

ΛΓΔ

ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὡς τὸ ΚΑΒ πρὸς τὸ ΑΓΔ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΣΡ, οὕτως τὸ ΜΖ πρὸς τὸ ΝΘ· τὸ ΜΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΝΘ ΣΡ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΝΘ τῷ ΣΡ· Ἔστι δὲ αὐτῷ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον· ἴση ἄρα ἐστιν ἡ ΗΘ τῇ ΠΡ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΠΡ, ἴση δὲ ἡ ΠΡ τῇ ΗΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

(Ὅτι δὲ, ἐὰν εὐθύγραμμα ἴσα ᾖ καὶ ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι αὐτῶν πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, δείξομεν οὕτως.

Ἔστω ἴσα καὶ ὅμοια εὐθύγραμμα τὰ ΝΘ ΣΡ, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΠΣ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΡΠ τῇ ΘΗ.

Εἰ γὰρ ἄνισοί εἰσι· μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. Ἔστω μείζων ἡ ΡΠ τῆς ΘΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΡΠ πρὸς τὴν ΠΣ, οὕτως ἡ ΘΗ πρὸς τὴν ΗΝ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΠΡ πρὸς τὴν ΘΗ, οὕτως ἡ ΠΣ πρὸς τὴν ΗΝ. Μείζων δὲ ἡ ΠΡ τῆς ΘΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΠΣ τῆς ΗΝ· ὥςτε καὶ τὸ ΡΣ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΘΝ· ἀλλὰ καὶ ἴσον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΠΡ τῆς ΗΘ, ἴση ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.)

Πρότασις κγ'.

Τὰ ἰσογώνια παραλληλόγραμμα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. 23.

Ἔστω ἰσογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ΑΓ ΓΖ, ἴσην ἔχοντα τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΗ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν, τοῦ τε, ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Fig. 23

Κείσθω γὰρ ὥςτε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΓΗ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ. καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΔΗ παραλληλόγραμμον, καὶ ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ Κ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ.

Οἱ ἄρα λόγοι τῆς τε Κ πρὸς τὴν Λ καὶ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ οἱ αὐτοί εἰσι τοῖς λόγοις τῶν πλευρῶν, τῆς τε ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ καὶ τῆς ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ. Ἀλλ' ὁ τῆς Κ πρὸς τὴν Μ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς Κ πρὸς τὴν Λ λόγου καὶ τοῦ τῆς Λ πρὸς τὴν Μ· ὥςτε καὶ ἡ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ· ἀλλ' ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ Κ πρὸς τὴν Λ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΘ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ· ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΕ, οὕτως ἡ Λ πρὸς τὴν Μ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν ἐδείχθη, ὡς μὲν ἡ Κ πρὸς τὴν Λ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ Λ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΓΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Κ πρὸς τὴν Μ, οὕτως τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΓΖ παραλληλόγραμμον. Ἡ δὲ Κ πρὸς τὴν Μ λόγον ἔχει τὸν

συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ τὸ ΑΓ ἄρα πρὸς τὸ ΓΖ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν.

Τὰ ἄρα ἰσογώνια παραλληλόγραμμα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τὰ περὶ τὴν διάμετρον παραλληλόγραμμα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ καὶ ἀλλήλοις. 24.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα ἔστω τὰ ΕΗ ΘΚ· λέγω ὅτι ἑκάτερον τῶν ΕΗ ΘΚ παραλληλογράμμων ὅμοιόν ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓΔ καὶ ἀλλήλοις. Fig. 24.

Ἐπεὶ γὰρ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΓ ἦκται ἡ ΕΖ· ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ. Πάλιν, ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΓΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΓΔ ἦκται ἡ ΖΗ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΑ, οὕτως ἐδείχθη καὶ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΑ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΗΑ, καὶ συντεθέντι ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΕΑ πρὸς τὴν ΑΗ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ ΕΗ παραλληλαγράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὴν κοινὴν γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΔ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΖ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΖΑ τῇ ὑπὸ ΔΓΑ, καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τῶν ΑΔΓ ΑΗΖ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΖ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΓΒ τρίγωνον ἰσογώνιόν ἐστι τῷ ΑΖΕ τριγώνῳ, καὶ ὅλον τὸ

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΖ· ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ· ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ἔτι ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΑ. Καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς μὲν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΑ, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΕ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΕ· τῶν ἄρα ΑΒΓΔ ΕΗ παραλληλογράμμων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΗ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστιν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΕΗ ΘΚ παραλληλογράμμων τῷ ΑΒΓΔ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι. Τὰ δὲ τῷ αὐτῷ εὐθυγράμμῳ ὅμοια καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ὅμοια· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου τὰ περὶ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. 25.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ὅμοιον συστήσασθαι, τὸ ΑΒΓ, ᾧ δὲ ἴσον, τὸ Δ· δεῖ δὴ τῷ μὲν ΑΒΓ ὅμοιον, τῷ δὲ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συστήσασθαι. Fig. 2

Παραβεβλήσθω παρὰ μὲν τὴν ΒΓ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕ, παρὰ δὲ τὴν ΓΕ τῷ Δ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΓΕ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ ὑπὸ ΓΒΑ· ἐπ.

εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΜ. Καὶ εἰλήφθω τῶν ΒΓ ΓΖ μέση ἀνάλογον ἡ ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΗΘ τῷ ΑΒΓ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΚΗΘ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΓΖ· ἐὰν δὲ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, ἐστίν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΗΘ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ ΚΗΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον. Ἴσον δὲ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΕ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ΚΗΘ τρίγωνον τῷ ΕΖ παραλληλογράμμῳ. Ἀλλὰ τὸ ΕΖ παραλληλόγραμμον τῷ Δ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΚΗΘ ἄρα τῷ Δ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ τὸ ΚΗΘ καὶ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓ ὅμοιον καὶ ἄλλῳ τῷ δοθέντι τῷ Δ ἴσον τὸ αὐτὸ συνέσταται τὸ ΚΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κϛʹ.

Ἐὰν ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον ἀφαιρεθῇ ὅμοιόν τε τῷ ὅλῳ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ· περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τῷ ὅλῳ. 26.

Ἀπὸ γὰρ παραλληλογράμμου τοῦ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ἀφῃρήσθω τὸ ΑΕΖΗ, ὅμοιον τῷ ΑΒΓΔ καὶ ὁμοίως κείμενον, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ Fig. 26.

τὴν ὑπὸ ΔΑΒ· λέγω ὅτι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΑΕΖΗ.

Μὴ γάρ· ἀλλ' εἰ δυνατὸν, ἔστω αὐτοῦ ἡ διάμετρος ἡ ΑΘΓ, καὶ ἐκβληθεῖσα ἡ ΗΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΔ ΒΓ παράλληλος ἡ ΘΚ.

Ἐπεὶ οὖν περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΚΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ. Ἔστι δὲ καὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒΓΔ ΕΗ, ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΕ· ἡ ΗΑ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΑΚ ΑΕ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΚ, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οὐκ ἐστι περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΗ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα ἐστὶ διάμετρον τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΕΖΗ παραλληλογράμμῳ.

Ἐὰν ἄρα ἀπὸ παραλληλογράμμου παραλληλόγραμμον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ.

Πάντων τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφομένῳ μέγιστόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλόμενον παραλληλόγραμμον, ὅμοιον ὂν τῷ ἐλλείμματι. 27.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΓΕ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ Fig. 27.

ἀπὸ τῆς ἡμισείας ἀναγραφέντι τῆς ΑΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τῆς ΓΒ· λέγω ὅτι πάντων τῶν παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλλομένων παραλληλογράμμων καὶ ἐλλειπόντων εἴδεσι παραλληλογράμμοις ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως κειμένοις τῷ ΓΕ μέγιστόν ἐστι τὸ ΑΔ. Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΚΘ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ΓΕ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΔ τοῦ ΑΖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΘ παραλληλογράμμῳ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον. Ἤχθω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΔΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΚΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΘ ὅλῳ τῷ ΚΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΓΘ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΗΓ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστὶν. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΓΖ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΖ τῷ ΛΜΝ γνώμονί ἐστιν ἴσον· ὥςτε καὶ τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΑΔ, τοῦ ΑΖ παραλλολογράμμου μεῖζόν ἐστιν.

Ἔστω πάλιν ἡ ΑΒ τμηθεῖσα δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ παραβληθὲν τὸ ΑΛ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΓΜ, καὶ παραβεβλήσθω πάλιν παρὰ τὴν ΑΒ τὸ ΑΕ παραλλόγραμμον ἐλλεῖπον τῷ ΔΖ, ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ, τῷ ΓΜ· λέγω ὅτι μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβληθὲν τὸ ΑΛ τοῦ ΑΕ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΔΖ τῷ ΓΜ, περὶ τὴν αὐτήν εἰσι διάμετρον· ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΛΖ τῷ ΛΘ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ΛΖ τοῦ ΚΕ. Ἴσον δὲ τὸ ΛΖ τῷ ΔΛ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΕΚ.

Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΔ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΛ ὅλου τοῦ ΑΕ μεῖζόν ἐστιν.

Πάντων ἄρα τῶν παρὰ τὴν αὐτὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κη΄.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ δοθέντι· δεῖ δὲ τὸ διδόμενον εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παραβαλεῖν, μὴ μεῖζον εἶναι τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας παραβαλλομένου, ὁμοίων ὄντων τῷ ἐλλείματι τοῦ τε ἀπὸ τῆς ἡμισείας καὶ τοῦ, ᾧ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν. 28.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, μὴ μεῖζον ὂν τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ΑΒ παραβαλλομένου ὁμοίου τῷ ἐλλείματι, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ἐλλείπειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ. Fig. 28.

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ ΕΒΖΗ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον.

Εἰ μὲν οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ Γ, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· παραβέβληται γὰρ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΑΗ, ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΕΖ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ· Εἰ δὲ οὔ· μεῖζόν ἐστι τὸ ΘΕ τοῦ Γ. Ἴσον δὲ τὸ ΘΕ τῷ ΗΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΗΒ τοῦ Γ. Ὧι

δὴ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΒ τοῦ Γ, ταύτῃ τῇ ὑπεροχῇ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΚΛΜΝ. Ἀλλὰ τὸ Δ τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΚΜ ἄρα τῷ ΗΒ ἐστὶν ὅμοιον. Ἔστω ὁμόλογος ἡ μὲν ΚΛ τῇ ΗΕ, ἡ δὲ ΛΜ τῇ ΗΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῖς Γ ΚΜ, μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΒ τοῦ ΚΜ μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΗΕ τῆς ΚΛ, ἡ δὲ ΗΖ τῆς ΛΜ. Κείσθω τῇ μὲν ΚΛ ἴση ἡ ΗΞ, τῇ δὲ ΛΜ ἴση ἡ ΗΟ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΞΗΟΠ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ. Ἀλλὰ τὸ ΚΜ τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· καὶ τὸ ΗΠ ἄρα τῷ ΗΒ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΗΠ τῷ ΗΒ. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΗΠΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΗ τοῖς Γ ΚΜ, ὧν τὸ ΗΠ τῷ ΚΜ ἐστὶν ἴσον· λοιπὸς ἄρα ὁ ΥΦΧ γνώμων λοιπῷ τῷ Γ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΟΡ τῷ ΞΣ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΠΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΟΒ ὅλῳ τῷ ΞΒ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ ΞΒ τῷ ΤΕ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΕ πλευρᾷ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση· καὶ τὸ ΤΕ ἄρα τῷ ΟΒ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΞΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΤΣ ὅλῳ τῷ ΥΦΥ γνώμονι ἴσον ἐστί. Ἀλλὰ ὁ ΥΦΧ γνώμων τῷ Γ ἐδείχθη ἴσος· καὶ τὸ ΣΤ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΣΤ ἐλλεῖπον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΒ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ (ἐπειδήπερ τὸ ΠΒ τῷ ΗΠ ὅμοιόν ἐστιν)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κθ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον πα- 29.

ραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ δοθέντι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν εὐθύγραμμον, ᾧ δεῖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβαλεῖν, τὸ Γ, ᾧ δὲ δεῖ ὅμοιον ὑπερβάλλειν, τὸ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν τῷ Γ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ ὁμοίῳ τῷ Δ. Fig. 29

Τετμήσθω ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΕΒ τῷ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΖ, καὶ συναμφοτέροις μὲν τοῖς ΒΖ Γ ἴσον, τῷ δὲ Δ ὅμοιον καὶ ὁμοίως κείμενον τὸ αὐτὸ συνεστάτω τὸ ΗΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ. Ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ μὲν ΚΘ τῇ ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῇ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΘ τοῦ ΖΒ, μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΚΘ τῆς ΖΛ, ἡ δὲ ΚΗ τῆς ΖΕ. Ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΛ ΖΕ, καὶ τῇ μὲν ΚΘ ἴση ἔστω ἡ ΖΛΜ, τῇ δὲ ΚΗ ἴση ἡ ΖΕΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΜΝ· τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΗΘ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΛ ὅμοιόν ἐστι· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὸ ΕΛ τῷ ΜΝ. Ἤχθω αὐτῶν ἡ διάμετρος ἡ ΖΞ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα.

Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ΗΘ τοῖς ΕΛ Γ ἀλλὰ τὸ ΗΘ τῷ ΜΝ ἴσον ἐστί· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τοῖς ΕΛ Γ ἴσον ἐστί. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΨΧΦ γνώμων τῷ Γ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἴσον ἐστὶ καί τὸ ΑΝ τῷ ΝΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ ΛΟ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΕΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ΦΧΨ γνώμονι. Ἀλλὰ ὁ ΦΧΨ γνώμων τῷ Γ ἴσος ἐστί· καὶ τὸ ΑΞ ἄρα τῷ Γ ἴσον ἐστίν.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ

δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΑΞ, ὑπερβάλλον εἴδει παραλληλογράμμῳ τῷ ΠΟ ὁμοίῳ ὄντι τῷ Δ, (ἐπεὶ καὶ τῷ ΕΛ ἐστὶν ὅμοιον τὸ ΟΠ)· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λ'.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. 30.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν. Fig. 30.

Ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΒΓ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΓ τῷ ΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΓΔ ὑπερβάλλον εἴδει τῷ ΑΔ ὁμοίῳ τῷ ΒΓ.

Τετράγωνον δή ἐστι τὸ ΒΓ· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΓ τῷ ΓΔ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΖ λοιπῷ τῷ ΑΔ ἐστὶν ἴσον. Ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον· τῶν ΒΖ ΑΔ ἄρα ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΕ τῇ ΑΓ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΑΒ, ἡ δὲ ΕΔ τῇ ΑΕ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· Μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΕ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ.

Ἡ ἄρα ΑΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ε, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστι τὸ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λά.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρ- 31.

θὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν Fig. 31.
ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἀπὸ τῆς πρὸς τὸ Α ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν ΒΓ βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ· τὰ ΑΒΔ ΑΔΓ ἄρα πρὸς τῇ καθέτῳ τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΒΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· ὡς ἄρα ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ. ὥςτε καὶ ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὰς ΒΔ ΔΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τὰ ὅμοια, καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα. Ἴση δὲ ἡ ΒΓ ταῖς ΒΔ ΔΓ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λβ.

Ἐὰν δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν 32.
γωνίαν, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥςτε τὰς ὁμολόγους

αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι· αἱ λοιπαὶ τῶν τριγώνων πλευραὶ ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ ΔΓΕ, τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΒΑ ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΓΔ ΔΕ ἀνάλογον ἔχοντα, ὡς μὲν τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΔΓ πρὸς τὴν ΔΕ, παράλληλον δὲ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΕ· λέγω ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ. Fig. 32.

Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΑΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστὶν ἴση· ὥςτε καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ ΔΓΕ μίαν γωνίαν τὴν πρὸς τῷ Α μιᾷ γωνίᾳ τῇ πρὸς τῷ Δ ἴσην ἔχοντα, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον, ὡς τὴν ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὴν ΓΔ πρὸς τὴν ΔΕ· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΓΕ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΕ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΒΑΓ ἴση ἐστί. Κοινὴ προςκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΕ ΑΓΒ ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ ΑΒΓ ΑΓΒ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλ᾽ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΑΒΓ ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΕ ΑΓΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσί. Πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΓ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Γ δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ ΓΕ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΓΕ ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΓΕ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ'.

Ἐν τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐ- 33.
τὸν λόγον ἔχουσι ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι (ἔτι δὲ καὶ οἱ τομεῖς, ἅτε πρὸς τοῖς κέντροις συνιστάμενοι.)

Ἔστωσαν ἴσοι κύκλοι οἱ ΑΒΓ ΔΕΖ, καὶ πρὸς μὲν Fig. 33.
τοῖς κέντροις αὐτῶν τοῖς Η Θ γωνίαι ἔστωσαν αἱ ὑπὸ ΒΗΓ ΕΘΖ, πρὸς δὲ ταῖς περιφερείαις αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ· (καὶ ἔτι ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.)

Κείσθωσαν γὰρ τῇ μὲν ΒΓ περιφερείᾳ ἴσαι κατὰ τὸ ἑξῆς ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΓΚ ΚΛ, τῇ δὲ ΕΖ περιφερείᾳ ἴσαι ὁσοιδηποτοῦν αἱ ΖΜ ΜΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ ΗΛ ΘΜ ΘΝ.

Ἐπεὶ οὖν ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΓ ΓΚ ΚΛ πιριφέρειαι ἀλλήλαις, ἴσαι εἰσὶ καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΓ ΓΗΚ ΚΗΛ γωνίαι ἀλλήλαις· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΒΗΓ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ, τοσαυπλασίων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΖ. Εἰ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΗΛ τῇ ὑπὸ ΕΘΝ· καὶ εἰ μείζων ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, μείζων ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν περιφερειῶν τῶν ΒΓ ΕΖ, δύο δὲ γωνιῶν τῶν ὑπὸ ΒΗΓ ΕΘΖ, εἴληπται τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΒΗΓ γωνίας ἰσάκις πολλαπλασίων, ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ

γωνία, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τῆς ὑπὸ ΕΘΖ γωνίας ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΝ γωνία· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ἡ ὑπὸ ΒΗΛ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΘΝ γωνίας· καὶ εἰ ἴση, ἴση· καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ, διπλασίων γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ἥ τε ὑπὸ ΒΗΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΘΖ, καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ πρὸς τὴν ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐν ἄρα τοῖς ἴσοις κύκλοις αἱ γωνίαι τὸν αὐτὸν ἔχουσι λόγον ταῖς περιφερείαις, ἐφ' ὧν βεβήκασιν· ἐάν τε πρὸς τοῖς κέντροις, ἐάν τε πρὸς ταῖς περιφερείαις ὦσι βεβηκυῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Λέγω ὅτι καὶ ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ περιφέρειαν, οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΓ ΓΚ. καὶ ληφθέντων ἐπὶ τῶν ΒΓ ΓΚ περιφερειῶν τῶν Ξ Ο σημείων, ἐπεζεύχθωσαν καὶ αἱ ΒΞ ΞΓ ΓΟ ΟΚ.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΗ ΗΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ ΗΚ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι καὶ βάσις ἡ ΒΓ τῇ ΓΚ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ περιφέρεια τῇ ΓΚ περιφερείᾳ, καὶ ἡ λοιπὴ ἡ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφέρεια ἴση ἐστὶ τῇ λοιπῇ τῇ εἰς τὸν ὅλον κύκλον περιφερείᾳ· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΞΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΟΚ ἐστὶν ἴση· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· καὶ εἰσιν ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν τῶν ΒΓ ΓΚ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων εὐθειῶν ὅμοια τμήματα κύκλων ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΞΓ τμῆμα τῷ ΓΟΚ τμήματι· Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΒΗΓ τρίγωνον τῷ ΗΓΚ τριγώνῳ

ἴσον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΗΒΓ τομεὺς ὅλῳ τῷ ΗΓΚ τομεῖ ἴσος ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΗΚΛ τομεὺς ἑκατέρῳ τῶν ΗΚΓ ΗΓΒ ἴσος ἐστίν· οἱ τρεῖς ἄρα τομεῖς οἱ ΗΒΓ ΗΓΚ ΗΚΛ ἴσοι ἀλλήλοις εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΘΕΖ ΘΖΜ ΘΜΝ τομεῖς ἴσοι ἀλλήλοις εἰσίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΗΒΓ τομέως. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΕΝ περιφέρεια τῆς ΕΖ περιφερείας, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ ὁ ΘΕΝ τομεὺς τοῦ ΘΕΖ τομέως. Εἰ δὲ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΛ περιφέρεια τῇ ΕΝ περιφερείᾳ, ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τῷ ΘΕΝ τομεῖ· καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν τῶν ΒΓ ΕΖ περιφερειῶν, δύο δὲ τῶν ΗΒΓ ΘΕΖ τομέων, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τῆς μὲν ΒΓ περιφερείας καὶ τοῦ ΗΒΓ τομέως ἥ τε ΒΛ περιφέρεια καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς, τῆς δὲ ΕΖ περιφερείας καὶ τοῦ ΘΕΖ τομέως ἰσάκις πολλαπλάσια, ἥ τε ΕΝ περιφέρεια καὶ ὁ ΘΕΝ τομεύς· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΒΛ περιφέρεια τῆς ΕΝ περιφερείας, ὑπερέχει καὶ ὁ ΗΒΛ τομεὺς τοῦ ΘΕΝ τομέως· καὶ εἰ ἴση, ἴσος· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ὁ ΗΒΓ τομεὺς πρὸς τὸν ΘΕΖ τομέα.)

Πόρισμα.

(Καὶ δῆλον ὅτι καὶ ὡς ὁ τομεὺς πρὸς τὸν τομέα οὕτως καὶ ἡ γωνία πρὸς τὴν γωνίαν.)

Τέλος τοῦ ἕκτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ἙΒΔΟΜΟΝ.

Ὅροι.

α. Μονάς ἐστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων 1.
ἓν λέγεται,

β. Ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον 2.
πλῆθος.

γ. Μέρος ἐστὶν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ, ὁ ἐλάσσων 3.
τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸν μείζονα.

δ. Μέρη δὲ, ὅταν μὴ καταμετρῇ. 4.

ε. Πολλαπλάσιος δὲ ὁ μείζων τοῦ ἐλάττο- 5.
νος, ὅταν καταμετρῆται ὑπὸ τοῦ ἐλάττονος.

ς. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρού- 6.
μενος.

ζ. Περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα, ἢ ὁ 7.
μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ.

η. Ἀρτιάκις ἄρτιος ἀριθμός ἐστιν ὁ ὑπὸ 8.
ἀρτίου ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

θ. Ἀρτιάκις δὲ περισσὸς ὁ ὑπὸ ἀρτίου 9.
ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ περισσὸν ἀριθμόν.

ι. (Περισσάκις δὲ ἀρτιός ἐστιν, ὁ ὑπὸ πε- 10.
ρισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν.

ια. Περισσάκις δὲ περισσὸς ἀριθμός 11.
ἐστιν ὁ ὑπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ μετρούμενος κατὰ πε-
ρισσὸν ἀριθμόν.

ιβ. Πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ 12.
μετρούμενος.

ιγ΄. Πρῶτοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί 13.
εἰσιν οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ιδ΄. Σύνθετος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἀριθμῷ τινι 14.
μετρούμενος.

ιε΄. Σύνθετοι δὲ πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί 15.
εἰσιν οἱ ἀριθμῷ τινι μετρούμενοι κοινῷ μέτρῳ.

ις΄. Ἀριθμὸς ἀριθμὸν πολλαπλασιάζειν 16.
λέγεται, ὅταν ὅσαι εἰσὶν ἐν αὐτῷ μονάδες τοσαυτάκις συντεθῇ ὁ πολλαπλασιαζόμενος, καὶ γένηταί τις.

ιζ΄. Ὅταν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 17.
ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος ἐπίπεδος καλεῖται· πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιη΄. Ὅταν δὲ τρεῖς ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 18.
ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς καλεῖται, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ἀριθμοί.

ιθ΄. Τετράγωνος ἀριθμός ἐστιν ὁ ἰσάκις 19.
ἴσος, ἢ ὁ ὑπὸ δύο ἴσων ἀριθμῶν περιεχόμενος.

κ΄. Κύβος δὲ ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις, ἢ ὁ ὑπὸ 20.
τριῶν ἀριθμῶν ἴσων περιεχόμενος.

κα΄. Ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, ὅταν ὁ πρῶ- 21.
τος τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τρίτος τοῦ τετάρτου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιος, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.

κβ΄. Ὅμοιαι ἐπίπεδοι καὶ στερεοὶ ἀριθ- 22.
μοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς.

κγ΄. Τέλειος ἀριθμός ἐστιν, ὁ τοῖς ἑαυτοῦ 23.
μέρεσιν ἴσος ὤν.

Πρότασις α΄.

Δύο ἀριθμῶν ἀνισῶν ἐκκειμένων, ἀνθυφαιρουμένου δὲ ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ἐὰν ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρῇ τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 1.

Δύο γὰρ ἀνίσων ἀριθμῶν τῶν ΑΒ ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος ὁ λειπόμενος μηδέποτε καταμετρείτω τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ἕως οὗ ληφθῇ μονάς· λέγω ὅτι οἱ ΑΒ ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τουτ᾽ ἔστιν, ὅτι τοὺς ΑΒ ΓΔ μονὰς μόνη μετρεῖ. Fig. 1.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε· καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΑ, ὁ δὲ ΖΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΗΓ, ὁ δὲ ΗΓ τὸν ΖΑ μετρῶν λειπέτω μονάδα τὴν ΘΑ.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΖΒ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΒ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΖ μετρήσει. Ὁ δὲ ΑΖ τὸν ΔΗ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΔΗ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΗ μετρήσει. Ὁ δὲ ΓΗ τὸν ΖΘ μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν ΖΘ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΖΑ· καί λοιπὴν ἄρα τὴν ΑΘ μονάδα μετρήσει, ἀριθμὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ ΓΔ ἀριθμοὺς μετρήσει τις ἀριθμός· οἱ ΑΒ ΓΔ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β΄.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 2.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΓΔ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Fig. 2.

Εἰ μὲν οὖν ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ ΓΔ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον· οὐδεὶς γὰρ μείζων τοῦ ΓΔ τὸν ΓΔ μετρήσει.

Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ ΓΔ τὸν ΑΒ, τῶν ΑΒ ΓΔ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάττονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, ληφθήσεταί τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Μονὰς μὲν γὰρ οὐ ληφθήσεται· εἰ δὲ μή· ἔσονται οἱ ΑΒ ΓΔ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. Ληφθήσεται ἄρα τις ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ. Καὶ ὁ μὲν ΓΔ τὸν ΑΒ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΕΑ. ὁ δὲ ΕΑ τὸν ΔΓ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΖΓ, ὁ δὲ ΓΖ τὸν ΕΑ μετρείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ ΓΖ τὸν ΑΕ μετρεῖ, ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΔ μετρήσει. Ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ ΓΖ ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΑ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΒΑ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΓΔ· ὁ ΓΖ ἄρα τοὺς ΑΒ ΓΔ μετρεῖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ ΓΖ τῶν ΑΒ ΓΔ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς ΑΒ ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ ΓΖ. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Η. Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν ΓΔ μετρεῖ, ὁ δὲ ΓΔ τὸν ΒΕ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΒΕ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΒΑ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΑΕ μετρήσει. Ὁ δὲ ΑΕ τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸν ΔΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσει, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ ΓΔ ἀριθμοὺς ἀριθμός

τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ ΓΖ· ὁ ΓΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Πρότασις γ.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 3.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ μὴ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α Β Γ· δεῖ δὴ τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Fig. 3.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ· ὁ δὴ Δ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον· μετρεῖ δὲ καὶ τοὺς Α Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α Β Γ μετρεῖ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α Β Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Δ τῶν Α Β Γ μέγιστον κοινὸν μέτρον· μετρήσει τις τοὺς Α Β Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Δ. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Ε τοὺς Α Β Γ μετρεῖ· καὶ τοὺς Α Β ἄρα μετρήσας καὶ τὸ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α Β Γ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Δ· ὁ Δ ἄρα τῶν Α Β Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Δ τὸν Γ· λέγω πρῶτον, ὅτι οἱ Δ Γ οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β Γ οὐκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός· ὁ δὲ τοὺς Α Β Γ μετρῶν καὶ

τοὺς Α Β μετρήσει, καὶ τὸ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· τους Δ Γ ἄρα ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ Δ Γ ἄρα οὔκ εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, ὁ δὲ Δ τοὺς Α Β μετρεῖ· καὶ ὁ Ε ἄρα τοὺς Α Β μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α Β Γ μετρεῖ· ὁ Ε ἄρα τῶν Α Β Γ κοινόν ἐστι μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ Ε τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, μετρήσει τις τοὺς Α Β Γ ἀριθμοὺς ἀριθμὸς μείζων ὢν τοῦ Ε. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τοὺς Α Β Γ μετρεῖ, καὶ τοὺς Α Β μετρεῖ, καὶ τὸ τῶν Α Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Δ· ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ· μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ζ ἄρα τοὺς Δ Γ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Δ Γ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Γ Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶν ὁ Ε· ὁ Ζ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς Α Β Γ ἀριθμός τις μετρήσει μείζων ὢν τοῦ Ε· ὁ Ε ἄρα τῶν Α Β Γ μέγιστόν ἐστι κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Π ό ρ ι σ μ α.

(Ἐκ δὴ τούτων φανερὸν, ὅτι ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοὺς τρεῖς μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Τὸν αὐτὸν δὲ τρόπον καὶ πλειόνων ἀριθμῶν δοθέντων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρήσομεν.)

Π ρ ό τ α σ ι ς δ'.

Π ᾶ ς ἀ ρ ι θ μ ὸ ς π α ν τ ὸ ς ἀ ρ ι θ μ ο ῦ, ὁ ἐ λ ά σ σ ω ν τ ο ῦ μ ε ί ζ ο ν ο ς, ἤ τ ο ι μ έ ρ ο ς ἐ σ τ ὶ ν ἢ μ έ ρ η. 4.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ, οἱ Α ΒΓ, καὶ ἔστω ἐλάσσων ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ ΒΓ τοῦ Α ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη. Fig. 4.

Οἱ Α ΒΓ γὰρ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν, ἢ οὔ. Ἔστωσαν πρότερον πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Διαιρεθέντος δὴ τοῦ ΒΓ εἰς τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας, ἔσται ἑκάστη μονὰς τῶν ἐν τῷ ΒΓ μέρος τι τοῦ Α, ὥςτε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὁ δὴ ΒΓ τὸν Α ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Εἰ μὲν οὖν καταμέτρει ὁ ΒΓ τὸν Α· μέρος ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α. Εἰ δὲ οὔ· εἰλήφθω τῶν Α ΒΓ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ διηρήσθω ὁ ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΒΕ ΕΖ ΖΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, μέρος ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Α· ἴσος δὲ ἑκάστῳ τῶν ΒΕ ΕΖ ΖΓ· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν ΒΕ ΕΖ ΖΓ τοῦ Α μέρος ἐστίν· ὥςτε μέρη ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός. 5.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ Α Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ. Fig. 5.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ

ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· καὶ οἱ ΒΗ ΕΘ ἄρα τοῖς Α Δ ἴσοι εἰσί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΗΓ ΘΖ τοῖς Α Δ ἴσοι εἰσίν· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΓ ΕΖ ἴσοι τοῖς Α Δ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΒΓ τοῦ Α, τοσαυταπλασίων ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ ΕΖ συναμφοτέρου τοῦ Α Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ Α Δ συναμφοτέρου τοῦ ΒΓ ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ς'.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτε- 6.
ρος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ συναμφότερος συναμφοτέρου τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ εἷς τοῦ ἑνός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, Fig 6.
καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ Γ.

Ἐπεὶ γάρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διηρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ

τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΗ ΔΘ συναμφοτέρου τοῦ Γ Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΗΒ ΘΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ Ζ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΑΒ ΔΕ συναμφοτέρου τοῦ Γ Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ὅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. 7.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρος ἔστω, ὅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Fig. 7.

Ὃ γὰρ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἔστω καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΓΗ. ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ· ὃ δὲ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ὑπόκειται καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΗΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὁ ΑΒ ἄρα ἑκατέρου τῶν ΗΖ ΓΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ΗΖ τῷ ΓΔ. Κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΓΖ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιπῷ τῷ ΖΔ ἴσος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΗΓ, ἴσος δὲ ὁ ΗΓ τῷ ΖΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ. Ἀλλὰ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, τὸ αὐτὸ

μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΕΒ τοῦ ΖΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ἀφαιρεθέντος· καὶ ὁ λοιπὸς τοῦ λοιποῦ τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται, ἅπερ ὁ ὅλος τοῦ ὅλου. 8.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ ΓΔ μέρη ἔστω, ἅπερ ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ ἀφαιρεθέντος τοῦ ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ. Fig. 8.

Κείσθω γὰρ τῷ ΑΒ ἴσος ὁ ΗΘ· ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΗΘ τοῦ ΓΔ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΗΘ εἰς τὰ τοῦ ΓΔ μέρη τὰ ΗΚ ΚΘ, ὁ δὲ ΑΕ εἰς τὰ τοῦ ΓΖ μέρη τὰ ΑΛ ΛΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΗΚ ΚΘ τῷ πλήθει τῶν ΑΛ ΛΕ. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΛ τοῦ ΓΖ· μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΗΚ τοῦ ΑΛ. Κείσθω τῷ ΑΛ ἴσος ὁ ΗΜ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΗΚ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΜ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὅλος ὁ ΗΚ ὅλου τοῦ ΓΔ. Πάλιν, ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΛΕ τοῦ ΓΖ, μείζων δὲ ὁ ΓΔ τοῦ ΓΖ· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΚΘ τοῦ ΛΕ. Κείσθω τῷ ΛΕ ἴσος ὁ ΚΝ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΚΘ τοῦ ΓΔ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΚΝ τοῦ ΓΖ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΝΘ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν,

ὅπερ ὅλος ὁ ΚΘ ὅλου τοῦ ΓΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ λοιπὸς ὁ ΜΚ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ὢν, ὅπερ ὅλος ὁ ΚΗ ὅλου τοῦ ΔΓ· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ ΜΚ ΝΘ τοῦ ΔΖ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ ΘΗ ὅλου τοῦ ΔΓ. Ἴσος δὲ συναμφότερος μὲν ὁ ΜΚ ΝΘ τῷ ΕΒ, ὁ δὲ ΘΗ τῷ ΒΑ· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὅλος ὁ ΑΒ ὅλου τοῦ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ′.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρος ᾖ, καὶ ἕτερος ἑτέρου τὸ αὐτὸ μέρος· καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου, τὸ αὐτὸ μέρος ἔσται, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου. 9.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἀριθμοῦ τοῦ ΒΓ μέρος ἔστω, καὶ ἕτερος ὁ Δ ἑτέρου τοῦ ΕΖ τὸ αὐτὸ μέρος, ὅπερ ὁ Α τοῦ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Fig. 9.

Ἐπεὶ γὰρ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ ΒΓ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Δ τοῦ ΕΖ· ὅσοι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Α, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἴσοι τῷ Δ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τοὺς τῷ Α ἴσους τοὺς ΒΗ ΗΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους τοὺς ΕΘ ΘΖ· ἴσον ἔσται δὴ τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ ΘΖ.

Καὶ ἐπεὶ ἴσοι εἰσὶν οἱ ΒΗ ΗΓ ἀριθμοὶ ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ ΗΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ ΘΖ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΓ τοῦ ΘΖ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥςτε καὶ ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΒΗ τοῦ

ΕΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ συναμφότερος ὁ ΒΓ συναμφοτέρου τοῦ ΕΖ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἴσος δὲ ὁ μὲν ΒΗ τῷ Α, ὁ δὲ ΕΘ τῷ Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Δ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΕΖ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἀριθμοῦ μέρη ᾖ, καὶ ἕτε- 10.
ρος ἑτέρου τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ πρῶτος τοῦ τρίτου ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἔσται καὶ ὁ δεύτερος τοῦ τετάρτου, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ ΑΒ ἀριθμοῦ τοῦ Γ μέρη ἔστω, Fig. 10.
καὶ ἕτερος ὁ ΔΕ ἑτέρου τοῦ Ζ τὰ αὐτὰ μέρη· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ, ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος.

Ἐπεὶ γὰρ, ἃ μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ Γ, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ ΔΕ τοῦ Ζ· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΑΒ μέρη τοῦ Γ, τοσαῦτα καὶ ἐν τῷ ΔΕ μέρη τοῦ Ζ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΑΒ εἰς τὰ τοῦ Γ μέρη τὰ ΑΗ ΗΒ, ὁ δὲ ΔΕ εἰς τὰ τοῦ Ζ μέρη τὰ ΔΘ ΘΕ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ πλήθει τῶν ΔΘ ΘΕ. Καὶ ἐπεὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ Γ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΔΘ τοῦ Ζ, καὶ ἐναλλὰξ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ὥστε καὶ, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΘΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΗΒ τοῦ ΘΕ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΘ, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ, ἢ τὰ αὐτὰ

μέρη· ἀλλ' ὃ μέρος ἐστὶν ὁ ΔΗ τοῦ ΔΘ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐδείχθη καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἃ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΔΕ ἢ μέρος, τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Ζ, ἢ τὸ αὐτὸ μέρος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια΄.

Ἐὰν ᾖ ὡς ὅλος πρὸς ὅλον, οὕτως ἀφαιρεθεὶς πρὸς ἀφαιρεθέντα· καὶ ὁ λοιπὸς πρὸς τὸν λοιπὸν ἔσται, ὡς ὅλος πρὸς ὅλον. 11.

Ἔστω ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ, οὕτως Fig. 11. ἀφαιρεθεὶς ὁ ΑΕ πρὸς ἀφαιρεθέντα τὸν ΓΖ· λέγω ὅτι καὶ λοιπὸς ὁ ΕΒ πρὸς λοιπὸν τὸν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ὅλος ὁ ΑΒ πρὸς ὅλον τὸν ΓΔ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΑΕ πρὸς τὸν ΓΖ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ ΑΕ τοῦ ΓΖ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΕΒ λοιποῦ τοῦ ΖΔ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν ἢ μέρη, ἅπερ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΔ. Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον· ἔσται ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους. 12.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α Β Fig. 12. Γ Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως οἱ Α Γ πρὸς τοὺς Β Δ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ, ἢ τὰ αὐτὰ

μέρη· καὶ συναμφότερος ἄρα ὁ Α Γ συναμφοτέρου τοῦ Β Δ τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη, ἅπερ ὁ Α τοῦ Β. Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως οἱ Α Γ πρὸς τοὺς Β Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ΄.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσι· καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται. 13.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α Γ Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Fig. 13.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β, ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη· ἐναλλὰξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ, ἢ τὰ αὐτὰ μέρη. Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται. 14.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ Ε Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Fig. 14

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ

ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· Ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιε.

Ἐὰν μονὰς ἀριθμόν τινα μετρῇ, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν μετρῇ· καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ μονὰς τὸν τρίτον ἀριθμὸν μετρήσει, καὶ ὁ δεύτερος τέταρτον. 15.

Μονὰς γὰρ ἡ Α ἀριθμόν τινα τὸν ΒΓ μετρείτω, ἰσάκις δὲ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ ἄλλον τινὰ ἀριθμὸν τὸν ΕΖ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ. Fig. 15

Ἐπεὶ γὰρ ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν ΒΓ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Δ τὸν ΕΖ· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΓ μονάδες, τοσοῦτοί εἰσι καὶ ἐν τῷ ΕΖ ἀριθμοὶ ἴσοι τῷ Δ. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΒΓ εἰς τὰ ἐν αὐτῷ μονάδας τὰς ΒΗ ΗΘ ΘΓ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τοὺς τῷ Δ ἴσους, τοὺς ΕΚ ΚΛ ΛΖ. Ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ ΗΘ ΘΓ τῷ πλήθει τῶν ΕΚ ΚΛ ΛΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΒΗ ΗΘ ΘΓ μονάδες ἀλλήλαις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΚ ΚΛ ΛΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΒΗ ΗΘ ΘΓ μονάδων τῷ πλήθει τῶν ΕΚ ΚΛ ΛΖ ἀριθμῶν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν, οὕτως ἡ ΗΘ μονὰς πρὸς τὸν ΚΛ ἀριθμὸν, καὶ ἡ ΘΓ μονὰς πρὸς τὸν ΛΖ ἀριθμόν. Ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΗ μονὰς πρὸς τὸν ΕΚ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΒΗ μονὰς τῇ

Α μονάδι, ὁ δὲ ΕΚ ἀριθμὸς τῷ Δ ἀριθμῷ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΕΖ. Ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ ΒΓ τὸν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες 16.
ἀλλήλους ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἴσοι ἀλλήλοις ἔσονται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ ὁ μὲν Α Fig. 16.
τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Γ· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Β μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Β κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Α τὸν Δ. Ἰσάκις δὲ ἡ Ε μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Α ἑκάτερον τῶν Γ Δ μετρεῖ. Ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ τῷ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλα- 17.
σιάσας ποιῇ τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἕξουσι τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν.

Ἀριθμὸς

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ Ε ποιείτω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Fig. 17.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Β τὸν Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. Ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας· οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασι. 18.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ Ε ποιείτωσαν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Fig. 18.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν. Ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α Β παλλαπλασιάσας τοὺς Δ Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος 19.

ἀριθμὸς ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου γενομένῳ ἀριθμῷ· καὶ ἐὰν ὁ ἐκ τοῦ πρώτου καὶ τετάρτου γενόμενος ἀριθμὸς ἴσος ᾖ τῷ ἐκ τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α Β Γ Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ. Fig. 1[illegible]

Ὁ γὰρ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Γ Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκε· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Α Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η Ζ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ· ὁ Η ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Ε Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ Ε τῷ Ζ.

Ἔστω δὴ πάλιν ἴσος ὁ Ε τῷ Ζ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Η Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ε. Ἴσος δὲ ὁ Ε τῷ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Η πρὸς

τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ Η πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ἔσται τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου· ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τοῦ μέσου, οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον ἔσονται. 20.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α Β Γ, Fig. 20.
ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Κείσθω γὰρ τῷ Β ἴσος ὁ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β Δ. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Β Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἴσος γὰρ ὁ Β τῷ Δ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β.

Ἀλλὰ δὴ ὁ ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ Β· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἴσος τῷ ὑπὸ τῶν Β Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Ἴσος δὲ ὁ Β τῷ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε 21.

μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα.

Ἔστωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β, οἱ ΓΔ ΕΖ· λέγω ὅτι ἰσάκις ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β. Fig.

Ὁ ΓΔ γὰρ τοῦ Α οὐκ ἔστι μέρη. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ὁ ΕΖ ἄρα τοῦ Β τὰ αὐτὰ μέρη ἐστὶν, ἅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ὅσα ἄρα ἐστὶν ἐν τῷ ΓΔ μέρη τοῦ Α, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ ΕΖ μέρη τοῦ Β. Διῃρήσθω ὁ μὲν ΓΔ εἰς τὰ τοῦ Α μέρη τὰ ΓΗ ΗΔ, ὁ δὲ ΕΖ εἰς τὰ τοῦ Β μέρη τὰ ΕΘ ΘΖ· ἔσται δὴ ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ ΘΖ. Καὶ ἐπεὶ ἴσοι οἱ ΓΗ ΗΔ εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΕΘ ΘΖ ἀριθμοὶ ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΓΗ ΗΔ τῷ πλήθει τῶν ΕΘ ΘΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΗΔ πρὸς τὸν ΘΖ· ἔσται ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΗ πρὸς τὸν ΕΘ, οὕτως ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΕΖ· οἱ ΓΗ ΕΘ ἄρα τοῖς ΓΔ ΕΖ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάττονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἀδύνατον· ὑπόκεινται γὰρ οἱ ΓΔ ΕΖ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. οὐκ ἄρα μέρη ἐστὶν ὁ ΓΔ τοῦ Α· μέρος ἄρα· καὶ ὁ ΕΖ τοῦ Β τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶν, ὅπερ ὁ ΓΔ τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ὁ ΓΔ τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ ΕΖ τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ'.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς ἀριθμοὶ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, ᾖ δὲ τεταραγμένη 2

αὐτῶν ἡ ἀναλογία· καὶ διΐσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ, οἱ Α Β Γ, καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος καὶ σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, οἱ Δ Ε Ζ, ἔστω δὲ τεταραγμένη αὐτῶν ἡ ἀναλογία, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ διΐσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Fig. 22.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Ζ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β Ε, Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Γ Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β Ε. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν Α Ζ ἴσος τῷ ἐκ τῶν Β Ε· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α Ζ ἄρα ἴσος ἐστὶν τῷ ἐκ τῶν Γ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ΄.

Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι εἰσὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 23.

Ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οἱ Α Β· λέγω ὅτι οἱ Α Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Fig. 23.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ἔσονταί τινες τῶν Α Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α Β. Ἔστωσαν οἱ Γ Δ.

Ἐπεὶ οὖν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τουτ᾽ ἔστιν, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Γ

τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Β. Ὁσάκις δὴ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Α Β ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α Β. Οἱ Α Β ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχοντῶν αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 24.

Ἔστωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ Α Β· λέγω ὅτι οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Fig. 2

Εἰ γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α Β, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Δ Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Α Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Δ Ε ἄρα τοῖς Α Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν, ἐλάσσονες ὄντες αὐτῶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-

νατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Α Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. Οἱ Α Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

25. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ τὸν ἕνα αὐτῶν μετρῶν ἀριθμὸς πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους Fig. 25. οἱ Α Β, τὸν δὲ Α μετρείτω τις ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι καὶ οἱ Β Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, ὁ δὲ Γ τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Β· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Α Β ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. Οἱ Γ Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ΄.

26. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσιν, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν αὐτὸν πρῶτος ἔσται.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β πρός τινα ἀριθμὸν Fig. 26. τὸν Γ πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ οἱ Γ Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Γ Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Ε. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, τὸν δὲ Γ μετρεῖ τις ἀριθμὸς ὁ Ε· οἱ Ε Α ἄρα

πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε Ζ τῷ ἐκ τῶν Α Β. Ἐὰν δὲ ὁ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσος ᾖ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον εἰσίν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Α Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτ' ἔστιν, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Γ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Β Γ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Γ Δ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. Οἱ Γ Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτος ἔσται. 27.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους οἱ Α Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Γ Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Fig. 27.

Κείσθω γὰρ τῷ Α ἴσος ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ Α τῷ Δ· καὶ οἱ Δ Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Δ Α πρὸς τὸν Β πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Δ Α ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Β πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Α Δ γενόμενος ἀριθμός ἐστιν ὁ Γ.

Οἱ Γ Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κη.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς δύο ἀριθμοὺς, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ὦσι· καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν γενόμενοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται. 28.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β πρὸς δύο ἀριθμοὺς Fig. 28. τοὺς Γ Δ, ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον, πρῶτοι ἔστωσαν, καὶ ὁ μὲν Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Ε Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Α Β πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστι, καὶ ὁ ἐκ τῶν Α Β ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Γ πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Α Β γενόμενός ἐστιν ὁ Ε· οἱ Ε Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ Ε Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Γ Δ πρὸς τὸν Ε πρῶτός ἐστι. καὶ ὁ ἐκ τῶν Γ Δ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν Ε πρῶτος ἔσται. Ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ Δ γενόμενός ἐστιν ὁ Ζ. Οἱ Ε Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ πολλαπλασιάσας ἑκάτερος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, καὶ ἐκεῖνοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται· καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει. 29.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους Fig. 29
οἱ Α Β, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω, τὸν δὲ Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· λέγω ὅτι οἵ τε Γ Ε καὶ οἱ Δ Ζ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Γ Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Ἐπεὶ οὖν οἱ Γ Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, οἱ Γ Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· οἱ Α Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ οὖν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Γ πρὸς δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β Δ ἀμφότεροι πρὸς ἑκάτερον πρῶτοί εἰσι· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α Γ ἄρα γενόμενος πρὸς τὸν ἐκ τῶν Β Δ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἐκ τῶν Α Γ ὁ Ε, ὁ δὲ ἐκ τῶν Β Δ ὁ Ζ. Οἱ Ε Ζ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή- 30.
λους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν πρῶτος ἔσται· καὶ ἐὰν συναμφότερος πρὸς ἕνα τινὰ αὐτῶν πρῶτος ᾖ, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔσονται.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς Fig. 30.
ἀλλήλους οἱ ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ συναμφότερος ὁ ΑΓ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΒΓ πρῶτός ἐστιν

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΓΑ ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ

ἔστω ὁ Δ. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τοὺς ΓΑ ΑΒ μετρεῖ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΒΑ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΑΒ ΒΓ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τοὺς ΓΑ ΑΒ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει· οἱ ΓΑ ΑΒ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ οἱ ΑΓ ΓΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὁ ΓΑ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΒΓ πρῶτός ἐστιν.

Ἔστωσαν δὴ πάλιν οἱ ΓΑ ΑΒ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι καὶ οἱ ΑΒ ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ ΑΒ ΒΓ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΒΓ μετρεῖ· καὶ ὅλον ἄρα τὸν ΓΑ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΑΒ· ὁ Δ ἄρα τοὺς ΓΑ ΑΒ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς ΑΒ ΒΓ ἀριθμοὺς ἀριθμός τις μετρήσει. Οἱ ΑΒ ΒΓ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λά.

Ἅπας πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτός ἐστιν. 31.

Ἔστω πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Α, καὶ τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οἱ Β Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Fig. 31.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Β Α πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Α τὸν Β οὐ μετρεῖ· ὁ Γ ἄρα τῷ Α οὐκ ἔστιν ὁ αὐτός. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τοὺς Β Α μετρεῖ· καὶ τὸν Α ἄρα μετρεῖ πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοὺς Β Α μετρήσει τις ἀριθμός.

Οἱ Α Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λβ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμός· καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει. 32.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τὸν Γ ποιείτωσαν, τὸν δὲ Γ μετρείτω τις πρῶτος ἀριθμὸς ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Δ ἕνα τῶν Α Β μετρεῖ. Fig. 32.

Τὸν γὰρ Α μὴ μετρείτω· καὶ ἔστι πρῶτος ὁ Δ· οἱ Α Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ Ε τῷ ἐκ τῶν Α Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Δ Α πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτ᾽ ἔστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἐὰν ὁ Δ τὸν Β μὴ μετρῇ, τὸν Α μετρήσει. Ὁ Δ ἄρα ἕνα τῶν Α Β μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ.

Ἅπας σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. 33.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Fig. 33.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Β. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Β, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ὁ δὲ Β τὸν Α μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ. Καὶ εἰ μὲν πρῶτός ἐστιν ὁ Γ, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον· εἰ δὲ σύνθετος, μετρήσει τις αὐτὸν ἀριθμός. Τοιαύτης δὴ γενομένης ἐπισκέψεως ληφθήσεταί τις πρῶτος ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει. Εἰ γὰρ μὴ ληφθήσεται· μετρήσουσι τὸν Α ἀριθμὸν ἄπειροι ἀριθμοὶ, ὧν ὁ ἕτερος τοῦ ἑτέρου ἐλάσσων ἐστὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον ἐν ἀριθμοῖς. Ληφθήσεταί τις ἄρα πρῶτος ἀριθμὸς, ὃς μετρήσει τὸν πρὸ ἑαυτοῦ, ὃς καὶ τὸν Α μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ΄.

Ἅπας ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. 34.

Ἔστω ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω ὅτι ὁ Α ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Fig. 34.

Εἰ μὲν οὖν πρῶτός ἐστιν ὁ Α, δῆλον ἂν εἴη τὸ ζητούμενον· εἰ δὲ σύνθετος· μετρήσει τις αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ἅπας ἄρα ἀριθμὸς ἤτοι πρῶτός ἐστιν ἢ ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λε΄.

Ἀριθμῶν δοθέντων ὁποσωνοῦν εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 35.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α Β Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν τοὺς ἐλαχίστους τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β Γ. Fig. 35.

Οἱ Α Β Γ ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Εἰ μὲν οὖν οἱ Α Β Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς.

Εἰ δὲ οὔ· εἰλήφθω τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ὁ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ ἕκαστον τῶν Α Β Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν ἑκάστῳ τῶν Ε Ζ Η· καὶ ἕκαστος ἄρα τῶν Ε Ζ Η ἕκαστον τῶν Α Β Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· οἱ Ε Ζ Η ἄρα τοὺς Α Β Γ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Ε Ζ Η ἄρα τοῖς Α Β Γ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ε Ζ Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β Γ, ἔσονταί τινες τῶν Ε Ζ Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α Β Γ· Ἔστωσαν οἱ Θ Κ Λ· ἰσάκις ἄρα ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ καὶ ἑκάτερος τῶν Κ Λ ἑκάτερον τῶν Β Γ. Ὁσάκις δὲ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Μ· καὶ ἑκάτερος ἄρα τῶν Κ Λ ἑκάτερον τῶν Β Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· καὶ ὁ Μ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Θ μονάδας. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Μ ἑκάτερον τῶν Β Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν ἑκατέρῳ τῶν Κ Λ μονάδας· ὁ Μ ἄρα τοὺς Α Β Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Μ μονάδας· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Ε Δ τῷ ἐκ τῶν Θ Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Δ. Μείζων δὲ ὁ Ε τοῦ Θ· μείζων ἄρα καὶ ὁ Μ τοῦ Δ, καὶ

μετρεῖ τοὺς Α Β Γ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, ὑπόκειται γὰρ ὁ Δ τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ε Ζ Η ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α Β Γ. Οἱ Ε Ζ Η ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛ'.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. 36.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν, *Fig.* 36.

Οἱ Α Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Ἔστωσαν πρότερον οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μή· μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρείτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὁσάκις ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε· ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α Ε τῷ ἐκ τῶν Β Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὡς ἑπόμενος ἑπόμενον. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Β Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Γ Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Ε· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύ-

νατον. Οὐκ ἄρα οἱ Α Β μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ (ὅταν οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν)· ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α Β μετρεῖται.

Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β, οἱ Ζ Ε· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α Ε τῷ ἐκ τῶν Β Ζ. Καὶ ὁ Α τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· οἱ Α Β ἄρα τὸν Γ μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μή· μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α Β ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Γ. Μετρείτωσαν τὸν Δ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η, ὁσάκις δὲ ὁ Β τὸν Δ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Θ· ὁ μὲν Α ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Α Η τῷ ἐκ τῶν Β Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Οἱ δὲ Ζ Ε ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· ὁ Ε ἄρα τὸν Η μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Ε Η πολλαπλασιάσας τοὺς Γ Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ὁ δὲ Ε τὸν Η μετρεῖ· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α Β μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα τοῦ Γ· Ὁ Γ ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α Β μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις λζ.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα μετρῶσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπ' αὐτῶν μετρούμενος τὸν αὐτὸν μετρήσει. 37.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β ἀριθμόν τινα τὸν ΓΔ μετρείτωσαν, ἐλάχιστον δὲ τὸν Ε· λέγω ὅτι καὶ ὁ Ε τὸν ΓΔ μετρεῖ. Fig. 37.

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ, ὁ Ε τὸν ΖΔ μετρῶν λειπέτω ἑαυτοῦ ἐλάσσονα τὸν ΓΖ· Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β τὸν Ε μετροῦσιν, ὁ δὲ Ε τὸν ΔΖ μετρεῖ· καὶ οἱ Α Β ἄρα τὸν ΔΖ μετρήσουσι. Μετροῦσι δὲ καὶ ὅλον τὸν ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸν ΓΖ μετρήσουσιν, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οὐ μετρεῖ ὁ Ε τὸν ΓΔ· μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων, εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. 38.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ὃν ἐλάχιστον μετροῦσιν ἀριθμόν. Fig. 38.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ δύο τῶν Α Β ἐλάχιστος μετρούμενος ὁ Δ. Ὁ δὴ Γ τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον. Μετροῦσι δὲ καὶ οἱ Α Β τὸν Δ· οἱ Α Β Γ ἄρα τὸν Δ μετρήσουσι. Λέγω ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μή· μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν οἱ Α Β Γ ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ. Μετρείτωσαν τὸν Ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ Α Β Γ τὸν Ε μετροῦσι, καὶ οἱ Α Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β μετρούμενος τὸν Ε μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οἱ Α Β Γ μετρήσουσί τινα

ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Δ· οἱ Α Β Γ ἄρα ἐλάχιστον τὸν Δ μετροῦσι.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ, καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν Γ Δ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Ε. Ἐπεὶ οὖν οἱ Α Β τὸν Δ μετροῦσιν, ὁ δὲ Δ τὸν Ε μετρεῖ· καὶ οἱ Α Β ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ε· καὶ οἱ Α Β Γ ἄρα τὸν Ε μετροῦσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστον. Εἰ γὰρ μὴ, μετρήσουσί τινα οἱ Α Β Γ, ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. Μετρείτωσαν τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β Γ τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ οἱ Α Β ἄρα τὸν Ζ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α Β μετρούμενός ἐστιν ὁ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Γ τὸν Ζ· οἱ Δ Γ ἄρα τὸν Ζ μετροῦσιν· ὥςτε καὶ ὁ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ Γ μετρούμενος τὸν Ζ μετρήσει. Ὁ δὲ ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Δ Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα οἱ Α Β Γ μετρήσουσί τινα ἀριθμὸν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Ε. Ὁ Ε ἄρα ἐλάχιστος ὢν ὑπὸ τῶν Α Β Γ μετρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετρῆται ὁ μετρούμενος ὁμώνυμον μέρος ἕξει τῷ μετροῦντι. 39.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ὑπό τινος ἀριθμοῦ τοῦ Β μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὁμώνυμον μέρος ἔχει τῷ Β. Fig. 39.

Ὁσάκις γὰρ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Γ· καὶ ἐπεὶ ὁ Β τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Β

τὸν Α· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Γ τὸν Α· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Α. Ἡ δὲ Δ μονὰς τοῦ Β ἀριθμοῦ μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον αὐτῷ· καὶ ὁ Γ ἄρα τοῦ Α μέρος ἐστὶν ὁμώνυμον τῷ Β. Ὥςτε ὁ Α μέρος ἔχει τὸν Γ ὁμώνυμον ὄντα τῷ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρτασις μ΄.

Ἐὰν ἀριθμὸς μέρος ἔχῃ ὁτιοῦν· ὑπὸ ὁμωνύμου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται τῷ μέρει. 40.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μέρος ἐχέτω ὁτιοῦν τὸν Β, καὶ τῷ Β μέρει ὁμώνυμος ἔστω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Α μετρεῖ.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Α μέρος ἐστὶ καὶ ὁμώνυμον Fig. 40. τῷ Γ, ἔστι δὲ καὶ ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ μέρος ὁμώνυμον αὐτῷ· ὃ μέρος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ μονὰς τοῦ Γ ἀριθμοῦ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Δ μονὰς τὸν Γ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Β τὸν Α· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Δ μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Α. Ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μα΄.

Ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ δοθέντα μέρη. 41.

Ἔστω τὰ δοθέντα μέρη τὰ Α Β Γ· δεῖ δὴ Fig. 41. ἀριθμὸν εὑρεῖν, ὃς ἐλάχιστος ὢν ἕξει τὰ Α Β Γ μέρη.

Ἔστωσαν τοῖς Α Β Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί, οἱ Δ Ε Ζ, καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν Δ Ε Ζ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η.

Ἐπεὶ οὖν ὁ Η ὑπὸ τῶν Δ Ε Ζ μετρεῖται· ὁ Η ἄρα ὁμώνυμα μέρη ἔχει τοῖς Δ Ε Ζ. Τοῖς δὲ Δ Ε Ζ ὁμώνυμα

μέρη ἐστὶ τὰ Α Β Γ· ὁ Η ἄρα ἔχει τὰ Α Β Γ μέρη. Λέγω δὴ ὅτι ἐλάχιστος ὤν. Εἰ γὰρ μὴ ὁ Η ἐλάχιστος ὢν ἔχει τὰ Α Β Γ μέρη· ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἕξει τὰ Α Β Γ μέρη. Ἔστω ὁ Θ· καὶ ἐπεὶ ὁ Θ ἔχει τὰ Α Β Γ μέρη· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ ὁμωνύμων ἀριθμῶν μετρηθήσεται τοῖς Α Β Γ μέρεσι. Τοῖς δὲ Α Β Γ μέρεσιν ὁμώνυμοι ἀριθμοί εἰσιν οἱ Δ Ε Ζ· ὁ Θ ἄρα ὑπὸ τῶν Δ Ε Ζ μετρεῖται, καὶ ἔστιν ἐλάσσων τοῦ Η. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἔσται τις τοῦ Η ἐλάσσων ἀριθμὸς, ὃς ἕξει τὰ Α Β Γ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ἑβδόμου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ.

Πρότασις α΄

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. 1.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α Β Γ Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν, οἱ Α Δ, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οἱ Α Β Γ Δ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς. Fig. 1.

Εἰ γὰρ μή· ἔστωσαν ἐλάττονες τῶν Α Β Γ Δ οἱ Ε Ζ Η Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες αὐτοῖς. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β Γ Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Ε Ζ Η Θ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ τῷ πλήθει τῶν Ε Ζ Η Θ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τοῦτ᾽ ἔστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Ε, ὁ μείζων τὸν ἐλάσσονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Ε Ζ Η Θ ἐλάσσονες ὄντες τῶν Α Β Γ Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶν αὐτοῖς· οἱ Α Β Γ Δ ἄρα ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἂν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ δοθέντι λόγῳ. 2.

Ἔστω ὁ δοθεὶς λόγος ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ὁ τοῦ Α πρὸς τὸν Β· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους, ὅσους ἄν τις ἐπιτάξῃ, ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Fig.

Ἐπιτετάχθωσαν δὴ τέσσαρες, καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Α τοὺς Γ Δ Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ Η Θ ποιείτω, ὁ δὲ Β τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ἀριθμὸς δὴ ὁ Α δύο τοὺς Α Β πολλαπλασιάσας τοὺς Γ Δ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ δὲ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ἑκάτερος ἄρα τῶν Α Β τὸν Β πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Δ Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Γ Δ πολλαπλασιάσας τοὺς Ζ Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ἦν ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τοὺς Δ Ε πολλαπλασιάσας τοὺς Η Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕ-

τως ὁ Α πρὸς τὸν Β. καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Θ Κ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὅ τε Ζ πρός τὸν Η, καὶ ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὅ τε Η πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· οἱ Γ Δ Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ Η Θ Κ ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ δὲ ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· οἱ Α Β ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Καὶ ἑκάτερος μὲν τῶν Α Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ Ε πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Γ Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ζ Κ πεποίηκεν· οἱ Γ Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ Κ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ Γ Δ Ε ἄρα καὶ οἱ Ζ Η Θ Κ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ἐλάχιστοι ὦσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ ἄκροι αὐτῶν τετράγωνοί εἰσιν· ἐὰν δὲ τέσσαρες, κύβοι.

Πρότασις γ.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. 3

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α Β Γ Δ· λέγω ὅτι οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Fig. 3.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α Β Γ Δ λόγῳ, οἱ Ε Ζ, τρεῖς δὲ οἱ Η Θ Κ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν τὸ λαμβανόμενον πλῆθος ἴσον γένηται τῷ πλήθει τῶν Α Β Γ Δ. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Λ Μ Ν Ξ.

Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε Ζ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε Ζ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Η Κ πεποίηκεν, ἑκάτερον δὲ τῶν Η Κ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ Ξ πεποίηκεν· οἱ Η Κ ἄρα καὶ οἱ Λ Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β Γ Δ ἐλάχιστοί εἰσι των τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Λ Μ Ν Ξ ἐλάχιστοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ὄντες τοῖς Α Β Γ Δ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ Δ τῷ πλήθει τῶν Λ Μ Ν Ξ· ἕκαστος ἄρα τῶν Α Β Γ Δ ἑκάστῳ τῶν Λ Μ Ν Ξ ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Α τῷ Λ, ὁ δὲ Δ τῷ Ξ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Λ Ξ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἴσος δὲ ὁ μὲν Λ τῷ Α, ὁ δὲ Ξ τῷ Δ· καὶ οἱ Α Δ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ΄.

Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις. 4.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες λόγοι ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς, ὅ τε τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ὁ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ὁ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ· δεῖ δὴ ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἐλαχίστους, ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς Fig. 4.

τὸν Β λόγῳ, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Β Γ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Η. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Β τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Α τὸν Θ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Γ τὸν Η μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Δ τὸν Κ μετρείτω· ὁ δὲ Ε τὸν Κ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον. Καὶ ὁσάκις ὁ Ε τὸν Κ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Λ μετρείτω. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Α τὸν Θ μετρεῖ, καὶ ὁ Β τὸν Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Κ, καὶ ἔτι ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· οἱ Θ Η Κ Λ ἄρα ἑξῆς εἰσὶν ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Θ Η Κ Λ ἑξῆς ἐλάχιστοι, ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· ἔσονταί τινες τῶν Θ Η Κ Λ ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. Ἔστωσαν οἱ Ν Ξ Μ Ο. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οἱ δὲ Α Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων τὸν ἐλάττονα, τοῦτ᾽ ἔστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ξ μετρεῖ· οἱ Β Γ ἄρα τὸν Ξ μετροῦσι, καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὁ ὑπὸ τῶν Β Γ μετρούμενος τὸν Ξ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Α Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ξ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Θ Η Κ Λ

ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἔν τε τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β, καὶ ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι ἐν τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγῳ.

Μὴ μετρείτω δὴ ὁ Ε τὸν Κ. Καὶ εἰλήφθω ὁ ὑπὸ τῶν Ε Κ ἐλάχιστος μετρούμενος ἀριθμὸς, ὁ Μ. Καὶ ὁσάκις μὲν ὁ Κ τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ Η ἑκάτερον τῶν Ν Ξ μετρείτω, ὁσάκις δὲ ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ὁ Ζ τὸν Ο μετρείτω. Καὶ ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Θ τὸν Ν μετρεῖ καὶ ὁ Η τὸν Ξ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Μ. Πάλιν, ἐπεὶ ἰσάκις ὁ Ε τὸν Μ μετρεῖ, καὶ ὁ Ζ τὸν Ο, ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Ο· οἱ Ν Ξ Μ Ο ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἐν τοῖς τοῦ τε Α πρὸς τὸν Β, καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι. Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Ν Ξ Μ Ο ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α Β Γ Δ Ε Ζ λόγοις· ἔσονταί τινες τῶν Ν Ξ Μ Ο ἐλάττονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς Α Β Γ Δ Ε Ζ λόγοις. Ἔστωσαν οἱ Π Ρ Σ Τ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, οἱ δὲ Α Β ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ὁ Β ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ, Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Ρ μετρεῖ· οἱ Β Γ ἄρα τὸν Ρ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Β Γ μετρούμενος τὸν Ρ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Β Γ μετρούμενός ἐστιν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τὸν Ρ μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Ρ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Σ· καὶ ὁ Κ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὁ Ε τὸν Σ· οἱ Ε Κ ἄρα

τὸν Σ μετροῦσι· καὶ ὁ ἐλάχιστος ἄρα ὑπὸ τῶν Ε Κ μετρούμενος τὸν Σ μετρήσει. Ἐλάχιστος δὲ ὑπὸ τῶν Ε Κ μετρουμενός ἐστιν ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα τὸν Σ μετρεῖ, ὁ μείζων τὸν ἐλάττονα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσονταί τινες τῶν Ν Ξ Μ Ο ἐλάσσονες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἔν τε τοῖς τοῦ Α πρὸς τὸν Β καὶ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ καὶ ἔτι τοῦ Ε πρὸς τὸν Ζ λόγοις· οἱ Ν Ξ Μ Ο ἄρα ἑξῆς ἐλάχιστοί εἰσιν ἐν τοῖς Α Β. Γ Δ Ε Ζ λόγοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις έ.

Οἱ ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσι τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. 5.

Ἔστωσαν ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε Ζ· λέγω ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Fig. 5.

Λόγων γὰρ δοθέντων, τοῦ τε ὃν ἔχει ὁ Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Γ Ε Δ Ζ λόγοις, οἱ Η Θ Κ, ὥςτε εἶναι ὡς μὲν τὸν Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Η πρὸς τὸν Θ, ὡς δὲ τὸν Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ. Καὶ ὁ Δ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω.

Οἱ ἄρα Η Θ Κ πρὸς ἀλλήλους ἔχουσι τοῦς τῶν πλευρῶν λόγους. Ἀλλ' ὁ τοῦ Η πρὸς τὸν Κ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ Η πρὸς τὸν Θ καὶ τοῦ τοῦ Θ πρὸς τὸν Κ· ὁ Η ἄρα πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Λ. Πάλιν,

ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Λ πρός τὸν Δ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Η πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β. Ὁ δὲ Η πρὸς τὸν Κ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν δεύτερον μὴ μετρῇ· οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. 6.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α Β Γ Δ Ε, ὁ δὲ Α τὸν Β μὴ μετρείτω· λέγω ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· Fig. 6.

Ὅτι μὲν οὖν οἱ Α Β Γ Δ Ε ἑξῆς ἀλλήλους οὐ μετροῦσι, φανερόν· οὐδὲ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνατόν· μετρείτω ὁ Α τὸν Γ. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Α Β Γ τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β Γ οἱ Ζ Η Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ζ Η Θ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ τοῖς Α Β Γ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α Β Γ τῷ πλήθει τῶν Ζ Η Θ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β, οὐ μετρεῖ ἄρα οὐδὲ ὁ Ζ τὸν Η· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Ζ, ἡ γὰρ μονὰς πάντα ἀριθμὸν μετρεῖ, καί εἰσιν οἱ Ζ Θ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ζ πρὸς

τὸν Θ. οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· οὐδὲ ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρεῖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ· καὶ τὸν δεύτερον μετρήσει. 7.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α Β Γ Δ, ὁ δὲ Α τὸν Δ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, Fig. 7.

Εἰ γὰρ μὴ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, οὐδὲ ἄλλος οὐδεὶς οὐδένα μετρήσει· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ὁ Α τὸν Δ μετρῶν· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 8.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοί, οἱ Γ Δ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Fig. 8.

Ὅσοι γάρ εἰσι τῷ πλήθει οἱ Α Γ Δ Β, τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν οἱ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ Δ Β, οἱ Η Θ Κ Λ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Η Λ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους

εἰσί. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Γ Δ Β τοῖς Η Θ Κ Λ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Α Γ Δ Β τῷ πλήθει τῶν Η Θ Κ Λ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Η πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Οἱ δὲ Η Λ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα· τοῦτ᾽ ἔστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον. Ἰσάκις ἄρα ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, καὶ ὁ Λ τὸν Ζ· ὁσάκις δὴ ὁ Η τὸν Ε μετρεῖ, τοσαυτάκις καὶ ἑκάτερος τῶν Θ Κ ἑκάτερον τῶν Μ Ν μετρείτω· οἱ Η Θ Κ Λ ἄρα τοὺς Ε Μ Ν Ζ ἰσάκις μετροῦσιν· οἱ Η Θ Κ Λ ἄρα τοῖς Ε Μ Ν Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Ἀλλὰ οἱ Η Θ Κ Λ τοῖς Α Γ Δ Β ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν· καὶ οἱ Α Γ Δ Β ἄρα τοῖς Ε Μ Ν Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσίν. Οἱ δὲ Α Γ Δ Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· καὶ οἱ Ε Μ Ν Ζ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Ε Ζ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλή- 9.
λους ὦσι, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, οἱ Α Β, καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ Δ καὶ ἐκκείσθω ἡ Ε μονάς· λέγω ὅτι ὅσοι εἰς τοὺς Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α Β καὶ τῆς μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Fig. 9.

Εἰλήφθωσαν γὰρ δύο μὲν ἀριθμοὶ ἐλάχιστοι ἐν τῷ τῶν Α Γ Δ Β λόγῳ ὄντες, οἱ Ζ Η, τρεῖς δὲ οἱ Θ Κ Λ, καὶ ἀεὶ ἑξῆς ἑνὶ πλείους, ἕως ἂν ἴσον γένηται τὸ πλῆθος αὐτῶν τῷ πλήθει τῶν Α Γ Δ Β. Εἰλήφθωσαν, καὶ ἔστωσαν οἱ Μ Ν Ξ Ο. Φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκε, τὸν δὲ Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκε, καὶ ὁ Η ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Λ πεποίηκε, τὸν δὲ Λ πολλαπλασιάσας τὸν Ο πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ οἱ Μ Ν Ξ Ο ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ Η, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Α Γ Δ Β ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Ζ Η, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Μ Ν Ξ Ο τῷ πλήθει τῶν Α Γ Δ Β· ἕκαστος ἄρα τῶν Μ Ν Ξ Ο ἑκάστῳ τῶν Α Γ Δ Β ἴσος ἐστίν· ἴσος ἄρα ἐστὶν ὁ μὲν Μ τῷ Α, ὁ δὲ Ο τῷ Β, Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ζ τὸν Θ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ὁ Θ ἄρα τὸν Μ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ζ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ Ε μονὰς τὸν Ζ ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Θ τὸν Μ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν,

οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Μ· Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Μ. Ἴσος δὲ ὁ Μ τῷ Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Ζ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ε μονὰς πρὸς τὸν Η ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Λ, καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· ὅσοι ἄρα εἰς τοὺς Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ ἑκατέρου τῶν Α Β καὶ μονάδος τῆς Ε μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοί· ὅσοι ἑκατέρου αὐτῶν καὶ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς αὐτοὺς μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. 10

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ οἵ τε Δ Ε καὶ οἱ Ζ Η· λέγω ὅτι ὅσοι ἑκατέρου τῶν Α Β καὶ μονάδος τῆς Γ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. Fig.

Ὁ Δ γὰρ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Δ Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ Λ ποιείτω.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε. Ἡ δὲ Γ μονὰς

νὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Δ ἄρα ἀριθμὸς τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Γ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Α· ἰσάκις ἄρα ἡ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἡ δὲ Γ μονὰς τὸν Δ ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὁ Δ ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ μὲν Ζ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Θ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ε Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Δ Ζ τὸν Θ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ Λ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Κ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἔτι ἐπεὶ ὁ Ζ ἑκάτερον τῶν Θ Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Λ Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Θ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Λ πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Κ,

καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Κ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὁ Λ πρὸς τὸν Β· οἱ Α Κ Λ Β ἄρα κατὰ τὸ συνεχὲς ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον· ὅσοι ἄρα ἑκατέρου τῶν Α Β καὶ τῆς Γ μονάδος μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς Α Β μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιά.

Δύο τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνά- 11
λογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ τοῦ Fig.
μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ τετράγωνός ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ἔστιν ὁ Γ· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α Ε πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· δύο δὴ ἀριθμοὶ οἱ Γ Δ ἕνα ἀριθμὸν καὶ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιάσαντες τοὺς Ε Β πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Β. Τῶν Α Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς ὁ Ε.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τρεῖς ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α Ε Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ε· Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ Γ πλευρὰ πρὸς τὴν Δ πλευράν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Δύο κύβων ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ κύβος πρὸς τὸν κύβον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν. 12.

Ἔστωσαν κύβοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι τῶν Α Β δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Fig. 12

Ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ Κ ποιείτω.

Καὶ ἐπεὶ κύβος ἐστὶν ὁ Α, πλευρὰ δὲ αὐτοῦ ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Δ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Γ Δ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ε Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ ἑκάτερον τῶν Ε Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Α Θ πεποίηκεν·

ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Γ Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ Κ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑκάτερον τῶν Ζ Η πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Κ Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Β· Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Θ, καὶ ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Κ, καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Β· τῶν Α Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Θ Κ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογόν εἰσιν, οἱ Α Θ Κ Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Ὡς δὲ ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προτασις ιγ'.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς 13.
ἀνάλογον, καὶ πολλαπλασιάσας ἕκαστος ἑαυτὸν ποιῇ τινα, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν ἀνάλογον ἔσονται· καὶ ἐὰν οἱ ἐξ ἀρχῆς τοὺς γενομένους πολλαπλασιάσαντες ποιῶσι τινας, καὶ αὐτοὶ ἀνάλογον ἔσονται, καὶ ἀεὶ περὶ τοὺς ἄκρους τοῦτο συμβαίνει.

Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Fig.
Α Β Γ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ, καὶ οἱ Α Β Γ ἑαυτοὺς μὲν πολλαπλασιάσαντες

τοὺς Δ Ε Ζ ποιείτωσαν, τοὺς δὲ Δ Ε Ζ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Η Θ Κ ποιείτωσαν· λέγω ὅτι οἵ τε Δ Ε Ζ καὶ οἱ Η Θ Κ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν.

Ὁ μὲν γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω· ἑκάτερος δὲ τῶν Α Β τὸν Λ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Μ Ν ποιείτω. Καὶ πάλιν, ὁ μὲν Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Β Γ τὸν Ξ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ο Π ποιείτω.

Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι οἱ Δ Λ Ε καὶ οἱ Η Μ Ν Θ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Α πρὸς τὸν Β λόγῳ, καὶ ἔτι οἱ Ε Ξ Ζ καὶ οἱ Θ Ο Π Κ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Β πρὸς τὸν Γ λόγῳ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ οἱ Δ Λ Ε ἄρα τοῖς Ε Ξ Ζ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἔτι οἱ Η Μ Ν Θ τοῖς Θ Ο Π Κ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν τῶν Δ Λ Ε πλῆθος τῷ τῶν Ε Ξ Ζ πλήθει, τὸ δὲ τῶν Η Μ Ν Θ τῷ τῶν Θ Ο Π Κ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς μὲν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ὡς δὲ ὁ Η πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ΄.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. 14.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν οἱ Γ Δ, ὁ δὲ Α τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ. Fig. 14.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω· οἱ Α Ε Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Ε Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ

Α τὸν Ε. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Πάλιν δὴ ὁ Γ τὸν Δ μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι οἱ Α Ε Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ε, μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Ε. Καί εἰσιν οἱ Α Ε Β ἑξῆς ἀνάλογον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Α τὸν Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιέ.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μετρῇ, καὶ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρῇ, καὶ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει. 15.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ μετρεῖ. Fig. 15.

Ὁ Γ γὰρ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω, καὶ ἔτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ἑκάτερος δὲ τῶν Γ Δ τὸν Ζ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Θ Κ ποιείτω. Φανερὸν δὴ ὅτι οἱ Ε Ζ Η καὶ οἱ Α Θ Κ Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ· καὶ ἐπεὶ οἱ Α Θ Κ Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸν Θ. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ.

Ἀλλὰ δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οἱ Α Θ Κ Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ

μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Θ μετρεῖ· ὥςτε καὶ τὸν Β μετρεῖ ὁ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ΄.

Ἐὰν τετράγωνος ἀριθμὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει· καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ τετράγωνος τὸν τετράγωνον μετρήσει. 16.

Ἔστωσαν τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β, πλευραὶ δὲ αὐτῶν ἔστωσαν οἱ Γ Δ, καὶ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Β· λέγω ὅτι οὐδ᾽ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Fig. 16.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, μετρήσει καὶ ὁ Α τὸν Β. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ᾽ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ πάλιν ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ᾽ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Α τὸν Β, μετρήσει καὶ ὁ Γ τὸν Δ· Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ᾽ ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ΄.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μετρήσει. καὶ ἐὰν ἡ πλευρὰ τὴν πλευρὰν μὴ μετρῇ, οὐδὲ ὁ κύβος τὸν κύβον μετρήσει. 17.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β μὴ μετρείτω, καὶ τοῦ μὲν Α πλευρὰ ἔστω ὁ Γ, τοῦ δὲ Β ὁ Δ· λέγω ὅτι ὁ Γ τὸν Δ οὐ μετρήσει. Fig. 17.

Εἰ γὰρ μετρεῖ ὁ Γ τὸν Δ, καὶ ὁ Α τὸν Β μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Β· οὐδ᾽ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ· λέγω ὅτι οὐδ᾽ ὁ Α τὸν Β μετρήσει.

Εἰ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ μετρήσει. Οὐ μετρεῖ δὲ ὁ Γ τὸν Δ· οὐδ' ἄρα ὁ Α τὸν Β μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη.

Δύο ὁμοίων ἐπιπέδων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός· καὶ ὁ ἐπίπεδος πρὸς τὸν ἐπίπεδον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 18.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοι οἱ Α Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ Δ ἀριθμοὶ, τοῦ δὲ Β οἱ Ε Ζ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Λέγω οὖν ὅτι τῶν Α Β εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ, ὁ Γ, πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Fig. 1

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Καὶ ἐπεὶ ἐπίπεδός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Γ Δ· ὁ Δ ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ὁ Δ δὴ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Ἀλλ' ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Ε τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν

Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β· οἱ Α Η Β ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι· τῶν Α Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ᾽ ἔστιν, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Η Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ Α πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Η, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ε καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ε, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ΄.

Δύο ὁμοίων στερεῶν ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· καὶ ὁ στερεὸς πρὸς τὸν ὅμοιον στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν. 19.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι στερεοὶ οἱ Α Β, καὶ τοῦ μὲν Α πλευραὶ ἔστωσαν οἱ Γ Δ Ε, τοῦ δὲ Β οἱ Ζ Η Θ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευράς· ἔστιν ἄρα ὡς μὲν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ὡς δὲ ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ. Λέγω ὅτι τῶν Α Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Fig. 19.

Ὁ Γ γὰρ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Κ ποιείτω, ὁ δὲ Ζ τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Λ ποιείτω. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ Δ τοῖς Ζ Η ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ, καὶ ἐκ μὲν τῶν Γ Δ ἐστὶν ὁ Κ, ἐκ δὲ τῶν Ζ Η ὁ Λ· οἱ Κ Λ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Κ Λ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός. Ἔστω ὁ

ὁ Μ· ὁ Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ Ζ ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου θεωρήματι ἐδείχθη. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τὸν μὲν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Κ πεποίηκε, τὸν δὲ Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Μ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ. Ἀλλ' ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Μ πρὸς τὸν Λ· οἱ Κ Μ Λ ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Η. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Θ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· οἱ Κ Μ Λ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἔν τε τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Ζ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Δ πρὸς τὸν Η καὶ ἔτι τῷ τοῦ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἑκάτερος δὴ τῶν Ε Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν Ξ ποιείτω· Καὶ ἐπεὶ στερεός ἐστιν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Γ Δ Ε· ὁ Ε ἄρα τὸν ἐκ τῶν Γ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ δὲ ἐκ τῶν Γ Δ ἐστὶν ὁ Κ· ὁ Ε ἄρα τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Θ τὸν Λ πολλαπλασιάσας τὸν ἐκ τῶν Ζ Η, τὸν Β, πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ν πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ὡς δὲ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Πάλιν, ἐπεὶ ἑκάτερος τῶν Ε Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Ν Ξ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η· ἔστιν

ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὅ τε Α πρὸς τὸν Ν, καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Θ τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν Ξ πεποίηκεν, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Ξ πρὸς τὸν Β. Ἀλλ' ὡς ὁ Μ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως οὐ μόνον ὁ Ξ πρὸς τὸν Β, ἀλλὰ καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Ν, καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ· οἱ Α Ν Ξ Β ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τοῖς εἰρημένοις τῶν πλευρῶν λόγοις.

Λέγω ὅτι καὶ ὁ Α πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἔστιν ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, ἢ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ. Ἐπεὶ γὰρ τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α Ν Ξ Β· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ὁ Α πρὸς τὸν Ν. Ἀλλ' ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ν, οὕτως ἐδείχθη ὅ τε Γ πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ' ἔστιν, ἤπερ ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ζ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔτι ὁ Ε πρὸς τὸν Θ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ ἀριθμὸς· ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται οἱ ἀριθμοί. 20.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α Β εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπιπτέτω ἀριθμὸς ὁ Γ· λέγω ὅτι οἱ Α Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί. Fig. 20.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ, οἱ Δ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Ε τὸν Γ. Ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ζ· ὁ Ζ ἄρα τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὥςτε ὁ Α ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ οἱ Δ Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Δ Ε ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ, τοῦτ᾿ ἔστιν τοῖς Γ Β· ὡς γὰρ ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ καὶ ὁ Ε τὸν Β. Ὁσάκις δὴ ὁ Δ τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Η· καὶ ὁ Ε ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Η μονάδας· ὁ Η ἄρα τὸν Ε πολλαλαπσιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Β ἄρα ἐπίπεδός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Ε Η· οἱ Α Β ἄρα ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ ἑκάτερος τῶν Ζ Η τὸν Ε πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν Γ Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Ὡς δὲ ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Δ πρὸς τόν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ ἐναλλὰξ ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η· οἱ Α Β ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοί εἰσιν, αἱ γὰρ πλευραὶ αὐτῶν ἀνάλογόν εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

Ἐὰν δύο ἀριθμῶν δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί. 21.

Δύο γὰρ ἀριθμῶν τῶν Α Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπιπτέτωσαν ἀριθμοὶ, οἱ Γ Δ· λέγω ὅτι οἱ Α Β ὅμοιοι στερεοί εἰσιν. Fig. 21

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ Δ, οἱ Ε Ζ Η· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε Η πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ τῶν Ε Η εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπέπτωκεν ἀριθμὸς ὁ Ζ· οἱ Ε Η ἄρα ἀριθμοὶ ὅμοιοι ἐπιπεδοί εἰσιν. Ἔστωσαν οὖν τοῦ μὲν Ε πλευραὶ οἱ Θ Κ, τοῦ δὲ Η οἱ Λ Μ· φανερὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τοῦ πρὸ τούτου ὅτι οἱ Ε Ζ Η ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἔν τε τῷ τοῦ Θ πρὸς τὸν Λ λόγῳ καὶ τῷ τοῦ Κ πρὸς τὸν Μ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Ε Ζ Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ Δ, καί ἐστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν Ε Ζ Η τῷ πλήθει τῶν Α Γ Δ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ. Οἱ δὲ Ε Η πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα καὶ ὁ ἐλάσσων τὸν ἐλάσσονα, τουτ᾽ ἔστιν ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, καὶ ὁ Η τὸν Δ. Ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ν· ὁ Ν ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν. Ὁ δὲ Ε ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Θ Κ· ὁ Ν ἄρα τὸν ἐκ τῶν Θ Κ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Α, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Θ Κ Ν. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Ε Ζ Η ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Γ Δ Β· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ὁ Η τὸν Β. Ὁσάκις δὴ ὁ Ε τὸν Γ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ξ· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ξ μονάδας· ὁ Ξ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ὁ δὲ Η ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Λ Μ· ὁ Ξ ἄρα τὸν μὲν ἐκ τῶν Λ Μ πολλαπλασιάσας τὸν μὲν Β πεποίηκε, τὸν δέ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· στερεὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Β, πλευραὶ

δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Λ Μ Ξ· οἱ Α Β ἄρα στερεοί εἰσι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὅμοιοι. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Ν Ξ τὸν Ε πολλαπλασιάσαντες τοὺς Α Γ πεποιήκασιν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τοῦτ' ἔστιν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ' ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, καὶ ὁ Κ πρὸς τὸν Μ· καὶ ὡς ἄρα ὁ Θ πρὸς τὸν Λ, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, καὶ ὁ Ν πρὸς τὸν Ξ. Καί εἰσιν οἱ μὲν Θ Κ Ν πλευραὶ τοῦ Α, οἱ δὲ Ξ Λ Μ πλευραὶ τοῦ Β· οἱ Α Β ἄρα ὅμοιοι στερεοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοί ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ τρίτος τετράγωνος ἔσται. 22.

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α Β Γ, ὁ δὲ πρῶτος, ὁ Α, τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ τρίτος, ὁ Γ, τετράγωνός ἐστιν. Fig. 22.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α Γ εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμὸς, ὁ Β· οἱ Α Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. Τετράγωνος δὲ ὁ Α· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ.

Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος κύβος ἔσται. 23.

Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α Β Γ Δ, ὁ δὲ Α κύβος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Δ κύβος ἐστίν. Fig. 23.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν Α Δ δύο μέσοι ἀνάλογόν εἰσιν ἀριθμοὶ, οἱ Β Γ· οἱ Α Δ ἄρα ὅμοιοί εἰσι στερεοὶ ἀριθμοί. Κύβος δὲ ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος τετράγωνος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος τετράγωνος ἔσται. 24.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Δ, ὁ δὲ Α τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Β τετράγωνός ἐστιν. Fig. 24.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ Δ τετράγωνοί εἰσιν· οἱ Γ Δ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Γ Δ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμὸς. Καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Β ἄρα τετράγωνός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε'.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμὸν, ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ δεύτερος κύβος ἔσται. 25.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β πρὸς ἀλλήλους λόγον ἐχέτωσαν, ὃν κύβος ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς κύβον ἀριθμὸν τὸν Δ, κύβος δὲ ἔστω ὁ Α· λέγω ὅτι καὶ ὁ Β κύβος ἐστίν. Fig. 25.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Γ Δ κύβοι εἰσὶν, οἱ Γ Δ ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Γ Δ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ὅσοι δὲ εἰς τοὺς Γ Δ μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοὶ, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς· ὥςτε καὶ τῶν Α Β δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπιπτέτωσαν οἱ Ε Ζ. Ἐπεὶ οὖν τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α Ε Ζ Β ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα καὶ ὁ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κς'.

Οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλή- 26
λους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθ-
μὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β· λέγω Fig.
ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β ἐπίπεδοί εἰσι· τῶν Α Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐμπιπτέτω, καὶ ἔστω ὁ Γ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ Β, οἱ Δ Ε Ζ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Δ Ζ τετράγωνοί εἰσι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β, καί εἰσιν οἱ Δ Ζ τετράγωνοι· ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ'.

Οἱ ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλή- 27
λους λόγον ἔχουσιν, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς
κύβον ἀριθμόν.

Ἔστωσαν ὅμοιοι στερεοὶ ἀριθμοὶ, οἱ Α Β· λέγω Fig.
ὅτι ὁ Α πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν.

Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Α Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Ἐμπιπτέτωσαν οἱ Γ Δ, καὶ εἰλήφθωσαν ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Γ Δ Β ἴσοι αὐτοῖς τὸ πλῆθος, οἱ Ε Ζ Η Θ· οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ Ε Θ κύβοι εἰσί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Θ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ ὁ Α ἄρα πρὸς τὸν Β λόγον ἔχει, ὃν κύβος ἀριθμὸς πρὸς κύβον ἀριθμόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ὀγδόου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΝΑΤΟΝ.

Πρότασις α΄

Ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνος ἔσται. 1.

Ἔστωσαν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Fig. 1.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί· τῶν Α Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν μεταξὺ κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν ἀριθμοὶ, ὅσοι εἰς αὐτοὺς ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας· ὥςτε καὶ τῶν Δ Γ εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Δ· τετράγωνος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσι τετράγωνον· ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί. 2.

Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β, καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τετράγωνον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι οἱ Α Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν ἀριθμοί.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ τετράγωνός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ὁ Γ· οἱ Δ Γ ἄρα ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. Τῶν Δ Γ ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει ἀριθμός, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α Β ἄρα εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτῃ, ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσιν οἱ ἀριθμοί· οἱ ἄρα Α Β ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι·

Πρότασις γ΄.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλα- 3
σιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιά- Fig.
σας τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν.

Εἰλήφθω γὰρ τοῦ Α πλευρά, ὁ Γ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· φανερὸν δή ἐστιν ὅτι ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκεν· ὁ Δ ἄρα τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ,

ὁ Δ πρὸς τὸν Α. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Δ πρὸς τὸν Α· τῆς ἄρα μονάδος καὶ τοῦ Α ἀριθμοῦ δύο μέσοι ἀνάλογον κατὰ τὸ συνεχὲς ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ, οἱ Γ Δ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Α κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Β. Τῆς δὲ μονάδος καὶ τοῦ Α δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν ἀριθμοὶ· καὶ τῶν Α Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς κύβον ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἔσται. 4.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α κύβον ἀριθμὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ κύβος ἐστίν. Fig. 4.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Α Β κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσιν οἱ Α Β· τῶν Α Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί· ὥστε καὶ τῶν Δ Γ δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Δ· κύβος ἄρα καὶ ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν κύβος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ ὁ πολλαπλασιασθεὶς κύβος ἔσται. 5.

Κύβος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Β κύβος ἐστίν. Fig.

Ὁ γὰρ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· κύβος ἄρα ἐστίν ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Δ πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Δ Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Δ Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστι κύβος ὁ Α· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ.

Ἐὰν ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται. 6.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β ποιείτω· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α κύβος ἐστίν. Fig.

Ὁ γὰρ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β Γ κύβοι εἰσὶν, ὅμοιοι στερεοί εἰσι· τῶν Β Γ ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· καὶ τῶν Α Β ἄρα δύο μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν ἀριθμοί.

Καὶ ἔστι κύβος ὁ Β· κύβος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν σύνθετος ἀριθμὸς ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος στερεὸς ἔσται. 7.

Σύνθετος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἀριθμόν τινα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ στερεός ἐστιν. Fig. 7.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α σύνθετός ἐστιν, ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος μετρηθήσεται. Μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Δ, καὶ ὁσάκις ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε. Ἐπεὶ οὖν ὁ Δ τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας· ὁ Ε ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν, ὁ δὲ Α ἐστὶν ὁ ἐκ τῶν Δ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Δ Ε τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν ἐκ τῶν Δ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα στερεός ἐστι, πλευραὶ δὲ αὐτοῦ εἰσιν οἱ Δ Ε Β· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος τετράγωνος ἔσται καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες. 8.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α Β Γ Δ Ε Ζ· λέγω ὅτι ὁ μὲν τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ τέταρτος ὁ Γ κύβος καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, ὁ δὲ ἕβδομος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνος καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες. Fig. 8.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε· τετράγωνος ἄρα ἐστὶν ὁ Β. Καὶ ἐπεὶ οἱ Β Γ Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Β τετράγωνός ἐστι· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ζ τετράγωνός ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες τετράγωνοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ, καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ, καὶ ὁ Β τὸν Γ. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἐπεὶ οὖν ὁ Α ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, τὸν δὲ Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε· κύβος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. Καὶ ἐπεὶ οἱ Γ Δ Ε Ζ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ Γ κύβος ἐστί· καὶ ὁ Ζ ἄρα κύβος ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες κύβοι εἰσί. Λέγω δὴ πάλιν ὅτι καὶ ὁ ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Ζ κύβος ἅμα καὶ τετράγωνός ἐστι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ κύβος ἐστὶν, ἐδείχθη δὲ καὶ τετράγωνος· ὁ Ζ ἄρα κύβος τέ ἐστι καὶ τετράγωνος. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ πέντε διαλείποντες πάντες κύβοι τέ εἰσι καὶ τετράγωνοι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ 9.
ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα

τετράγωνος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος ᾖ· καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι ἔσονται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Α Β Γ Δ Ε Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα, ὁ Α, τετράγωνος ἔστω· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοι ἔσονται. Fig. 9.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τρίτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Β τετράγωνός ἐστι, καὶ οἱ ἕνα διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ Α Β Γ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α τετράγωνος· καὶ ὁ Γ ἄρα τετράγωνός ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ οἱ Β Γ Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Β τετράγωνος· καὶ ὁ Δ ἄρα τετράγωνός ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες τετράγωνοί εἰσιν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ Α κύβος· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ τέταρτος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ Γ κύβος ἐστὶ καὶ οἱ δύο διαλείποντες πάντες, δέδεικται· λέγω ὅτι καὶ οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Β· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Α μετρεῖ καὶ ὁ Α τὸν Β. Ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος. Ἐὰν δὲ κύβος ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος κύβος ἐστί· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεὶ τέσσαρες ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ Δ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσι, καὶ ἔστιν ὁ Α κύβος· καὶ ὁ Δ ἄρα κύβος ἐστί· Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Ε κύβος ἐστὶ, καὶ ὁμοίως οἱ λοιποὶ πάντες κύβοι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα μὴ ᾖ τετράγωνος· οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων πάντων. Καὶ ἐὰν ὁ μετὰ τὴν μονάδα κύβος μὴ ᾖ, οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων πάντων. 10.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογον ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ Δ Ε Ζ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α μὴ ἔστω τετράγωνος· λέγω ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνος ἔσται, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων. Fig. 1

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Γ τετράγωνος. Ἔστι δὲ καὶ ὁ Β τετράγωνος· οἱ Β Γ ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Α πρὸς τὸν Β· οἱ Α Β ἄρα πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥςτε οἱ Α Β ὅμοιοι ἐπίπεδοί εἰσι. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ Β· τετράγωνος ἄρα ἐστὶ καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Γ τετράγωνός ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς τετράγωνός ἐστι, χωρὶς τοῦ τρίτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν ἕνα διαλειπόντων.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ Α κύβος. Λέγω ὅτι οὐδ᾽ ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἔσται, χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὁ Δ κύβος. Ἔστι δὲ καὶ ὁ Γ κύβος, τέταρτος γάρ ἐστιν ἀπὸ τῆς μονάδος, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα πρὸς τὸν Γ λόγον ἔχει, ὃν κύβος πρὸς κύβον.

Καὶ ἔστιν ὁ Γ κύβος· καὶ ὁ Β ἄρα κύβος ἐστί. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Β, ἡ δὲ μονὰς τὸν Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Α ἄρα τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ὁ Α ἄρα ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον τὸν Β πεποίηκεν. Ἐὰν δὲ ἀριθμὸς ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας κύβον ποιῇ, καὶ αὐτὸς κύβος ἔσται· κύβος ἄρα καὶ ὁ Α, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὔκ ἄρα ὁ Δ κύβος ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδ' ἄλλος οὐδεὶς κύβος ἐστὶ χωρὶς τοῦ τετάρτου ἀπὸ τῆς μονάδος καὶ τῶν δύο διαλειπόντων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιά.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ ἐλάττων τὸν μείζονα μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς. 11.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος τῆς Α ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Β Γ Δ Ε· λέγω ὅτι τῶν Β Γ Δ Ε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα τῶν Γ Δ. Fig. 11.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α μονὰς πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἰσάκις ἄρα ἡ Α μονὰς τὸν Β ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Δ τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ἰσάκις ἡ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Ε. Ἡ δὲ Α μονὰς τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Ε μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας· ὥςτε ὁ ἐλάσσων ὁ Β τὸν μείζονα τὸν Ε μετρεῖ κατά τινα τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν· ὑφ' ὅσων ἂν ὁ ἔσχατος 12.

πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ παρὰ τὴν μονάδα μετρηθήσεται.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον οἱ Α Β Γ Δ· λέγω ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται. Fig. 12

Μετρείσθω γὰρ ὁ Δ ὑπό τινος πρώτου ἀριθμοῦ τοῦ Ε· λέγω ὅτι ὁ Ε καὶ τὸν Α μετρεῖ. Μὴ γὰρ μετρείτω ὁ Ε τὸν Α· καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος, ἅπας δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ, πρῶτος ἐστίν· οἱ Ε Α ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκε. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Α τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Γ μονάδας· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Γ. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η· ὁ Ε ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν διὰ τὸ πρὸ τούτου καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε Η· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Οἱ δὲ Α Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Ε τὸν Β. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ· ὁ Ε ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολ-

λαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Θ. Οἱ δὲ Α Ε πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε μείζων τὸν μείζονα, καὶ ὁ ἐλάττων, τὸν ἐλάττονα, τοῦτ᾽ ἔστιν ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Ε τὸν Α. Ἀλλὰ μὴν καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα οἱ Α Ε πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί· σύνθετοι ἄρα. Οἱ δὲ σύνθετοι ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετροῦνται· οἱ Α Ε ἄρα ὑπό τινος ἀριθμοῦ μετροῦνται. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρῶτος ὑπόκειται, ὁ δὲ πρῶτος ὑφ᾽ ἑτέρου ἀριθμοῦ οὐ μετρεῖται ἢ ὑφ᾽ ἑαυτοῦ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α Ε μετρεῖ· ὥςτε καὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Δ· ὁ Ε ἄρα τοὺς Α Δ μετρεῖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὑφ᾽ ὅσων ἂν ὁ Δ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται, ὑπὸ τῶν αὐτῶν καὶ ὁ Α μετρηθήσεται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ΄.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα 13.
πρῶτος ᾖ· ὁ μέγιστος ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν ὑπαρχόντων ἐν τοῖς ἀνάλογον ἀριθμοῖς.

Ἔστωσαν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς Fig. 13.
ἀνάλογον οἱ Α Β Γ Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτος ἔστω· λέγω ὅτι ὁ μέγιστος αὐτῶν ὁ Δ ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν Α Β Γ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Α Β Γ ἔστω ὁ αὐτός. Φανερὸν δὴ ὅτι ὁ Ε πρῶτος οὐκ ἐστιν. Εἰ γὰρ ὁ Ε πρῶτός ἐστι καὶ μετρεῖ τὸν Δ, καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ

ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Ε πρῶτός ἐστι· σύνθετος ἄρα. Ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ε ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Λέγω δὴ ὅτι ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται πρώτου, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ὑφ' ἑτέρου μετρεῖται ὁ Ε, ὁ δὲ Ε τὸν Δ μετρεῖ· κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥςτε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτός, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ε μετρεῖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ. Λέγω ὅτι ὁ Ζ οὐδενὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς, καὶ μετρεῖ τὸν Δ κατὰ τὸν Ε· καὶ εἷς ἄρα τῶν Α Β Γ τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε. Ἀλλὰ εἷς τῶν Α Β Γ τὸν Δ μετρεῖ κατά τινα τῶν Α Β Γ· καὶ ὁ Ε ἄρα ἑνὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ὁ Ζ ἑνὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτὸς. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι μετρεῖται ὁ Ζ ὑπὸ τοῦ Α, δεικνύντες πάλιν ὅτι ὁ Ζ οὐκ ἐστι πρῶτος. (Εἰ γὰρ πρῶτος, καὶ μετρεῖ τὸν Δ· καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα πρῶτός ἐστιν ὁ Ζ· σύνθετος ἄρα. Ἅπας δὲ σύνθετος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται· ὁ Ζ ἄρα ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Λέγω δὴ ὅτι ὑφ' ἑτέρου πρώτου οὐ μετρηθήσεται, πλὴν τοῦ Α. Εἰ γὰρ ἕτερός τις πρῶτος τὸν Ζ μετρεῖ, ὁ δὲ Ζ τὸν Δ μετρεῖ· κἀκεῖνος ἄρα τὸν Δ μετρήσει· ὥςτε καὶ τὸν Α μετρήσει πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ὁ Α ἄρα τὸν Ζ μετρεῖ.) Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Γ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ε Ζ· ἀνάλογον

ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Γ. Ὁ δὲ Α τὸν Ε μετρεῖ· καὶ ὁ Ζ ἄρα τὸν Γ μετρεῖ. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Η. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α Β ἐστὶν ὁ αὐτὸς καὶ ὅτι μετρεῖται ὑπὸ τοῦ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ζ τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Η· ὁ Ζ ἄρα τὸν Η πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Β ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Ζ Η· ἀνάλογον ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Ζ, οὕτως ὁ Η πρὸς τὸν Β. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Ζ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Η τὸν Β. Μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Θ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ὁ Θ τῷ Α οὐκ ἐστιν ὁ αὐτὸς, Καὶ ἐπεὶ ὁ Η τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Θ· ὁ Η ἄρα τὸν Θ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Α ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Θ Η ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Α τετραγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Θ πρὸς τὸν Α, ὁ Α πρὸς τὸν Η. Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Η· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Θ τὸν Α, πρῶτον ὄντα, μὴ ὢν αὐτῷ ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ μέγιστος, ὁ Δ, ὑφ᾽ ἑτέρου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν Α Β Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Ἐὰν ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν μετρῆται· ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρούντων. 14.

Ἐλάχιστος γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ὑπὸ πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β Γ Δ μετρείσθω· λέγω ὅτι ὁ Α ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου πρώτου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, παρὲκ τῶν Β Γ Δ. Fig. 14.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Ε, καὶ ὁ Ε μηδενὶ τῶν Β Γ Δ ἔστω ὁ αὐτός. Καὶ

ἐπεὶ ὁ Ε τὸν Α μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Ζ· ὁ Ε ἄρα τὸν Ζ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε. Καὶ μετρεῖται ὁ Α ὑπὸ τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν Β Γ Δ. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, τὸν δὲ γενόμενον ἐξ αὐτῶν μετρῇ τις πρῶτος ἀριθμὸς· καὶ ἕνα τῶν ἐξ ἀρχῆς μετρήσει· οἱ Β Γ Δ ἄρα ἕνα τῶν Ε Ζ μετρήσουσι. Τὸν μὲν οὖν Ε οὐ μετρήσουσιν, ὁ γὰρ Ε πρῶτός ἐστι, καὶ οὐδενὶ τῶν Β Γ Δ ὁ αὐτός· τὸν Ζ ἄρα μετρήσουσιν ἐλάσσονα ὄντα τοῦ Α, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ Α ὑπόκειται ἐλάχιστος ὑπὸ τῶν Β Γ Δ μετρούμενος· οὐκ ἄρα τὸν Α μετρήσει πρῶτος ἀριθμὸς, παρὲκ τῶν Β Γ Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιέ.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν 15.
ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν·

Ἔστωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἐλάχιστοι Fig. 15.
τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, οἱ Α Β Γ· λέγω ὅτι τῶν Α Β Γ δύο ὁποιοῦν συντεθέντες πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτοί εἰσιν, οἱ μὲν Α Β πρὸς τὸν Γ, οἱ δὲ Β Γ πρὸς τὸν Α, καὶ ἔτι οἱ Γ Α πρὸς τὸν Β.

Εἰλήφθωσαν γὰρ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων τοῖς Α Β Γ δύο οἱ ΔΕ ΕΖ. Φανερὸν δὴ ὅτι ὁ μὲν ΔΕ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ ΕΖ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκε, καὶ ἔτι ὁ ΕΖ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκε. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΔΕ ΕΖ ἐλάχιστοί εἰσι· πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσι, καὶ συναμφότερος πρὸς ἑκάτερον πρῶτός ἐστι· καὶ ὁ ΔΖ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ ΔΕ

πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· οἱ ΔΖ ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτοί εἰσιν. Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμοὶ πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτοι ὦσι, καὶ ὁ ἐξ αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν· ὁ ἐκ τῶν ΖΔ ΔΕ ἄρα πρὸς τὸν ΕΖ πρῶτός ἐστιν· ὥςτε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ ΔΕ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν, ὁ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος πρὸς τὸν λοιπὸν πρῶτός ἐστιν. Ἀλλ᾽ ὁ ἐκ τῶν ΖΔ ΔΕ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΕ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ· ὁ ἄρα ἀπὸ τοῦ ΔΕ μετὰ τοῦ ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρῶτός ἐστι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α Β ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Γ πρῶτοί εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ οἱ Β Γ πρὸς τὸν Α πρῶτοί εἰσι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ οἱ Α Γ πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσιν. Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΔΖ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΕ ΕΖ πρῶτός ἐστιν· καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΖ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρῶτός ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΖ ἴσοι εἰσιν οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ ΕΖ μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ· καὶ οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ ΕΖ ἄρα μετὰ τοῦ δὶς ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ ΕΖ μετὰ τοῦ ἅπαξ ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἔτι διελόντι οἱ ἀπὸ τῶν ΔΕ ΕΖ ἄρα πρὸς τὸν ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ πρῶτοί εἰσι. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ἀπὸ τοῦ ΔΕ ὁ Α, ὁ δὲ ἐκ τῶν ΔΕ ΕΖ ὁ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ ΕΖ ὁ Γ· οἱ Α Γ ἄρα συντεθέντες πρὸς τὸν Β πρῶτοί εἰσι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ΄.

Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς ἄλλον τινά. 16.

Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς ἄλλον τινά. Fig. 1

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ. Οἱ δὲ Α Β πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α Β μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ΄.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὦσιν· οὐκ ἔσται ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ ἔσχατος πρὸς ἄλλον τινά. 17.

Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ Α Β Γ Δ, οἱ δὲ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α Δ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἔστωσαν· λέγω ὅτι οὐκ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά. Fig. 1

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, ὁ Β πρὸς τὸν Ε. Οἱ δὲ Α Δ πρῶτοι, οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον. καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ Α τὸν Β. Καὶ ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Γ· καὶ ὁ Β ἄρα τὸν Γ μετρεῖ, ὥστε καὶ ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ,

Δ, μετρεῖ δὲ ὁ Β τὸν Γ· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ Γ τὸν Δ. Ἀλλ' ὁ Α τὸν Γ μετρεῖ· ὥςτε καὶ τὸν Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ Α ἄρα τοὺς Α Δ μετρεῖ, πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἔσται ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς ἄλλον τινά· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιή.

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν. 18.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β· καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Fig. 18.

Οἱ δὴ Α Β ἤτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν, ἢ οὔ. Εἰ μὲν οὖν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν οἱ Α Β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω. Ὁ Α δὴ τὸν Γ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Δ· ὁ Α ἄρα τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· τοῖς Α Β ἄρα τρίτος ἀριθμὸς ἀνάλογον προσεύρηται, ὁ Δ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Γ· λέγω ὅτι τοῖς Α Β ἀδύνατόν ἐστι τρίτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατόν· προσευρήσθω ὁ Δ. ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ Β, ὁ δὲ ἀπὸ τοῦ Β ἐστὶν ὁ Γ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Δ ἴσος ἐστὶ τῷ Γ· ὥςτε ὁ Α τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Γ

πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Γ μετρεῖ κατὰ τὸν Δ. Ἀλλὰ μὴν ὑπόκειται καὶ μὴ μετρῶν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α Β τρίτον ἀνάλογον προςευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Γ μὴ μετρῇ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Τριῶν ἀριθμῶν δοθέντων ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προςευρεῖν. 19.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ, καὶ δέον ἔστω ἐπισκέψασθαι, εἰ δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προςευρεῖν. Fig. 1

Οἱ δὴ Α Β Γ ἤτοι ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν· ἢ οὔ.

Εἰ μὲν οὖν οἱ Α Β Γ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον, καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οἱ Α Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, δέδεικται ὅτι ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προςευρεῖν ἀριθμόν.

Εἰ δὲ οὔ, ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω· ὁ δὴ Α τὸν Δ ἤτοι μετρεῖ, ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον κατὰ τὸν Ε· ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Β τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β Γ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· τοῖς Α Β Γ ἄρα τέταρτος ἀνάλογον προςεύρηται ὁ Ε.

Ἀλλὰ δὴ μὴ μετρείτω ὁ Α τὸν Δ· λέγω ὅτι ἀδύνατόν ἐστι τοῖς Α Β Γ τέταρτον ἀνάλογον προςευρεῖν ἀριθμόν. Εἰ γὰρ δυνατόν· προςευρήσθω ὁ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Α Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β Γ. Ἀλλ'

ὁ ἐκ τῶν Β Γ ἐστὶν ὁ Δ· καὶ ὁ ἐκ τῶν Α Ε ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Δ. ὁ Α ἄρα τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν· ὁ Α ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὸν Ε· ὥςτε μετρεῖ ὁ Α τὸν Δ· Ἀλλὰ καὶ οὐ μετρεῖ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα δυνατόν ἐστι τοῖς Α Β Γ τέταρτον ἀνάλογον προςευρεῖν ἀριθμὸν, ὅταν ὁ Α τὸν Δ μὴ μετρῇ.

Πρότασις κ'.

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους εἰσὶ παντὸς τοῦ προτεθέντος πλήθους πρώτων ἀριθμῶν. 20.

Ἔστωσαν οἱ προτεθέντες πρῶτοι ἀριθμοὶ, οἱ Α Β Γ· λέγω ὅτι τῶν Α Β Γ πλείους εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοί. Fig. 20.

Εἰλήφθω γὰρ ὁ ὑπὸ τῶν Α Β Γ ἐλάχιστος μετρούμενος, καὶ ἔστω ὁ ΔΕ, καὶ προςκείσθω τῷ ΔΕ μονὰς ἡ ΔΖ. ὁ δὴ ΕΖ ἤτοι πρῶτός ἐστιν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ οἱ Α Β Γ ΕΖ πλείους τῶν Α Β Γ.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ὁ ΕΖ πρῶτος· ὑπὸ πρώτου ἄρα τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται. Μετρείσθω ὑπὸ πρώτου τοῦ Η· λέγω ὅτι ὁ Η οὐδενὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Εἰ γὰρ ὁ Η ἑνὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτός, οἱ δὲ Α Β Γ τὸν ΔΕ μετροῦσι· καὶ ὁ Η ἄρα τὸν ΔΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν ΕΖ· καὶ λοιπὴν ἄρα τὴν ΔΖ μονάδα μετρήσει ὁ Η, ἀριθμὸς ὢν, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ Η ἑνὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Καὶ ὑπόκειται πρῶτος· εὑρημένοι ἄρα εἰσὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ πλείους τοῦ προτεθέντος πλήθους τῶν Α Β Γ, οἱ Α Β Γ Η· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

Ἐὰν ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστι. 21.

Συγκείσθωσαν γὰρ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν, οἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ· λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν. Fig. 21

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥςτε καὶ ὅλος ὁ ΑΕ ἔχει μέρος ἥμισυ. Ἄρτιος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ δίχα διαιρούμενος· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΕ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ'.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν ἄρτιον ᾖ· ὁ ὅλος ἄρτιος ἔσται. 22.

Συγκείσθωσαν γὰρ περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁσοιδηποτοῦν ἄρτιοι τὸ πλῆθος, οἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ· λέγω ὅτι ὅλος ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν, Fig 22.

Ἐπεὶ γὰρ ἕκαστος τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ περιττός ἐστιν, ἀφαιρεθείσης μονάδος ἀφ' ἑκάστου, ἕκαστος τῶν λοιπῶν ἄρτιος ἔσται· ὥςτε καὶ ὁ συγκείμενος ἐξ αὐτῶν ἄρτιος ἔσται, Ἔστι δὲ καὶ τὸ πλῆθος τῶν μονάδων ἄρτιον· καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ'.

Ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ· καὶ ὁ ὅλος περισσὸς ἔσται. 23.

Συγκείσθωσαν γὰρ ὁποσοιοῦν περισσοὶ ἀριθμοὶ, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν ἔστω, οἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ὅλος ὁ ΑΔ περισσός ἐστιν. Fig. 23.

Ἀφηρήσθω ἀπὸ τοῦ ΓΔ μονὰς ἡ ΔΕ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΕ ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΓΑ ἄρτιος·

καὶ ὅλος ἄρα ὁ ΑΕ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστιν ἡ μονὰς ἡ ΔΕ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, καὶ ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. 24.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω ἄρτιος ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Fig. 24.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ ἄρτιός ἐστιν, ἔχει μέρος ἥμισυ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΒΓ ἔχει μέρος ἥμισυ· ὥςτε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἔχει μέρος ἥμισυ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κε'.

Ἐὰν ἀπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται. 25.

Ἀπὸ γὰρ ἀρτίου τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν. Fig. 25.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ἀπὸ τοῦ ΒΓ μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΒ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Καὶ ἔστι μονὰς ἡ ΓΔ· ὁ ΓΑ ἄρα περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ'.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ περισσὸς ἀφαιρεθῇ, ὁ λοιπὸς ἄρτιος ἔσται. 26.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ τοῦ ΑΒ περισσὸς ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν. Fig. 26.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ ΑΒ περισσός ἐστιν, ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΒΔ· λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΔ ἄρτιός ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν· ὥςτε καὶ λοιπὸς ὁ ΓΑ ἄρτιός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ΄.

Ἐὰν ἀπὸ περισσοῦ ἀριθμοῦ ἄρτιος ἀφαιρεθῇ· ὁ λοιπὸς περισσὸς ἔσται. 27.

Ἀπὸ γὰρ περισσοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ΑΒ ἄρτιος ἀφῃρήσθω ὁ ΒΓ· λέγω ὅτι ὁ λοιπὸς ὁ ΓΑ περισσός ἐστιν. Fig. 27.

Ἀφῃρήσθω γὰρ μονὰς ἡ ΑΔ· ὁ ΔΒ ἄρα ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΒΓ ἄρτιος· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΓΔ ἄρτιός ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ ΓΑ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κη΄.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος ἄρτιος ἔσται. 28.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ ἄρτιός ἐστιν. Fig. 28.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ Β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ὁ Β ἄρτιος· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐξ ἀρτίων. Ἐὰν δὲ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσιν, ὁ ὅλος ἄρτιός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ΄.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς περισσὸν ἀριθμὸν πολλαπλασιάσας ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος περισσὸς ἔσται. 29.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α περισσὸν τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ ποιείτω· λέγω ὅτι ὁ Γ περισσός ἐστιν. Fig. 29.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ τοσούτων ἴσων τῷ

Β, ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Α μονάδες. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν Α Β περισσός· ὁ Γ ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὥςτε ὁ Γ περισσός ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ'.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς ἄρτιον ἀριθμὸν μετρῇ. καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. 30.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α ἄρτιον τὸν Β μετρείτω· λέγω ὅτι καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει. Fig. 30.

Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ, μετρείτω αὐτὸν κατὰ τὸν Γ· λέγω ὅτι ὁ Γ οὐκ ἐστι περισσός. Εἰ γὰρ δυνατόν· ἔστω. Καὶ ἐπεὶ ὁ Α τὸν Β μετρεῖ κατὰ τὸν Γ· ὁ Α ἄρα τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Β πεποίηκεν. ὁ Β ἄρα σύγκειται ἐκ περισσῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσόν ἐστιν· ὁ Β ἄρα περισσός ἐστιν, ὅπερ ἄτοπον, ὑπόκειται γὰρ ἄρτιος· οὐκ ἄρα ὁ Γ περισσός ἐστιν· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ Γ. ὥςτε ὁ Α τὸν Β μετρεῖ ἀρτιάκις, διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ μετρήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λά.

Ἐὰν περισσὸς ἀριθμὸς πρός τινα ἀριθμὸν πρῶτος ᾖ· καὶ πρὸς τὸν διπλασίονα αὐτοῦ πρῶτος ἔσται. 31.

Περισσὸς γὰρ ἀριθμὸς ὁ Α πρός τινα ἀριθμὸν τὸν Β πρῶτος ἔστω, τοῦ δὲ Β διπλασίων ἔστω ὁ Γ· λέγω ὅτι ὁ Α καὶ πρὸς τὸν Γ πρῶτός ἐστιν. Fig. 31.

Εἰ γὰρ μή εἰσιν οἱ Α Γ πρῶτοι, μετρήσει τις αὐτοὺς ἀριθμός. Μετρείτω, καὶ ἔστω ὁ Δ. Καὶ ἔστιν ὁ Α περισσός· περισσὸς ἄρα καὶ ὁ Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ περισσὸς ὢν τὸν Γ μετρεῖ, καὶ ἔστιν ὁ Γ ἄρτιος· καὶ τὸν ἥμισυν ἄρα τοῦ Γ μετρήσει ὁ Δ. Τοῦ δὲ Γ ἥμισύς ἐστιν ὁ Β· ὁ Δ ἄρα τὸν Β μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸν Α· ὁ Δ ἄρα τοὺς Α Β μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους· ὅπερ ἐστὶν

ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Γ πρῶτος οὐκ ἐστιν· οἱ Α Γ ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λβ.

Τῶν ἀπὸ δύαδος διπλασιοζομένων ἀριθμῶν ἕκαστος ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. 32.

Ἀπὸ γὰρ δύαδος τῆς Α δεδιπλασιάσθωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ, οἱ Β Γ Δ· λέγω ὅτι οἱ Β Γ Δ ἀρτιάκις ἄρτιοί εἰσι μόνον. Fig. 32

Ὅτι μὲν οὖν ἕκαστος τῶν Β Γ Δ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι, φανερόν· ἀπὸ γὰρ δυάδος ἐστὶ διπλασιασθείς. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. Ἐκκείσθω γὰρ μονὰς ἡ Ε. Ἐπεὶ οὖν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν, ὁ μέγιστος τῶν Α Β Γ Δ, ὁ Δ, ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α Β Γ. Καὶ ἔστιν ἕκαστος τῶν Α Β Γ ἄρτιος· ὁ Δ ἄρα ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἑκάτερος τῶν Β Γ ἀρτιάκις ἄρτιός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ.

Ἐὰν ἀριθμὸς τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. 33.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον. Fig. 33

Ὅτι μὲν οὖν ἀρτιάκις περισσός ἐστι, φανερόν· ὁ γὰρ ἥμισυς αὐτοῦ περισσὸς ὢν μετρεῖ αὐτὸν ἀρτιάκις. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μόνον. Εἰ γὰρ ἔσται ὁ Α καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος, μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν· ὥςτε καὶ ὁ ἥμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπ' ἀρτίου ἀριθμοῦ, περισσὸς ὤν, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις περισσός ἐστι μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λδ'.

Ἐὰν ἄρτιος ἀριθμὸς μήτε τῶν ἀπὸ δυά- 34.
δος διπλασιαζομένων ᾖ, μήτε τὸν ἥμισυν ἔχῃ περισσόν· ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α μήτε τῶν ἀπὸ δυάδος διπλα- Fig. 34.
σιαζομένων ἔστω, μήτε τὸν ἥμισυν ἐχέτω περισσόν· λέγω ὅτι ὁ Α ἀρτιάκις τε ἐστιν ἄρτιος, καὶ ἀρτιάκις περισσός.

Ὅτι μὲν οὖν ὁ Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος, φανερόν· τὸν γὰρ ἥμισυν οὐκ ἔχει περισσόν, Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἄρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐὰν γὰρ τὸν Α τέμνωμεν δίχα, καὶ τὸν ἥμισυν αὐτοῦ δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιῶμεν, καταντήσομεν εἴς τινα ἀριθμὸν περισσὸν, ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ οὔ· καταντήσομεν εἰς δυάδα, καὶ ἔσται ὁ Α τῶν ἀπὸ δυάδος διπλασιαζομένων, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ὥςτε ὁ Α ἀρτιάκις περισσός ἐστιν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἀρτιάκις ἄρτιος· ὁ Α ἄρα ἀρτιάκις τε ἄρτιός ἐστι, καὶ ἀρτιάκις περισσός· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λέ.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς 35.
ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ· ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.

Ἔστωσαν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον Fig. 35.
οἱ Α ΒΓ Δ ΕΖ, ἀρχόμενοι ὑπὸ ἐλαχίστου τοῦ Α, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΒΓ καὶ τοῦ ΕΖ τῷ Α ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΗΓ ΖΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Α ΒΓ Δ.

Κείσθω γὰρ τῷ μὲν ΒΓ ἴσος ὁ ΖΚ, τῷ δὲ Δ

ἴσος ὁ ΖΛ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΖΚ τῷ ΒΓ ἴσος ἐστιν, ὧν ὁ ΖΘ τῷ ΗΓ ἴσος· λοιπὸς ἄρα ὁ ΘΚ λοιπῷ τῷ ΗΒ ἐστὶν ἴσος. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν ΒΓ, καὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν Α, ἴσος δὲ ὁ μὲν Δ τῷ ΖΛ, ὁ δὲ ΒΓ τῷ ΖΚ, ὁ δὲ Α τῷ ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΖ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΖ πρὸς τὸν ΖΚ, καὶ ὁ ΚΖ πρὸς τὸν ΖΘ· διελόντι, ὡς ὁ ΕΛ πρὸς τὸν ΛΖ, οὕτως ὁ ΛΚ πρὸς τὸν ΖΚ, καὶ ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς εἷς τῶν ἡγουμένων πρὸς ἕνα τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντες οἱ ἡγούμενοι πρὸς ἅπαντας τοὺς ἑπομένους· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΚΘ πρὸς τὸν ΖΘ, οὕτως οἱ ΕΛ ΛΚ ΚΘ πρὸς τοὺς ΛΖ ΚΖ ΘΖ. Ἴσος δὲ ὁ μὲν ΚΘ τῷ ΒΗ, ὁ δὲ ΖΘ τῷ Α, οἱ δὲ ΛΖ ΚΖ ΖΘ τοῖς Δ ΒΓ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΒΗ πρὸς τὸν Α, οὕτως ὁ ΕΘ πρὸς τοὺς Δ ΒΓ Α· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λϛʹ.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα· ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται. 36.

Ἀπὸ γὰρ μονάδος ἐκκείσθωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, οἱ Α Β Γ Δ, καὶ τῷ σύμπαντι ἴσος ἔστω ὁ Ε, καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ ποιείτω. λέγω ὅτι ὁ ΖΗ τέλειός ἐστιν. Fig. 36.

Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ Α Β Γ Δ τῷ πλήθει, τοσοῦτοι ἀπὸ τοῦ Ε εἰλήφθωσαν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, οἱ Ε ΘΚ Λ Μ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Μ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Ε Δ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Α Μ. Καὶ ἔστιν ὁ ἐκ τῶν Ε

Δ ὁ ΖΗ. καὶ ὁ ἐκ τῶν Α Μ ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὁ Α ἄρα τὸν Μ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ὁ Μ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. Καὶ ἔστι δυὰς ὁ Α· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ τοῦ Μ. Εἰσὶ δὲ καὶ οἱ Μ Λ ΘΚ Ε ἑξῆς διπλάσιοι ἀλλήλων· οἱ Ε ΘΚ Λ Μ ΖΗ ἄρα ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ. Ἀφῃρήσθω δὴ ἀπὸ τοῦ δευτέρου τοῦ ΘΚ καὶ τοῦ ἐσχάτου τοῦ ΖΗ τῷ πρώτῳ τῷ Ε ἴσος, ἑκάτερος τῶν ΘΝ ΖΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΝΚ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ ΞΗ πρὸς τοὺς Μ Λ ΘΚ Ε. Καὶ ἔστιν ὁ ΝΚ ἴσος τῷ Ε· καὶ ὁ ΞΗ ἄρα ἴσος ἐστὶ τοῖς Μ Λ ΘΚ Ε. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΞΖ τῷ Ε ἴσος, ὁ δὲ Ε τοῖς Α Β Γ Δ καὶ τῇ μονάδι· ὅλος ἄρα ὁ ΖΗ ἴσος ἐστὶ τοῖς τε Ε ΘΚ Λ Μ καὶ τοῖς Α Β Γ Δ καὶ τῇ μονάδι, καὶ μετρεῖται ὑπ᾽ αὐτῶν. Λέγω ὅτι καὶ ὁ ΖΗ ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α Β Γ Δ Ε ΘΚ Λ Μ καὶ τῆς μονάδος. Εἰ γὰρ δυνατόν, μετρείτω τις τὸν ΖΗ ὁ Ο, καὶ ὁ Ο μηδενὶ τῶν Α Β Γ Δ Ε ΘΚ Λ Μ ἔστω ὁ αὐτός. Καὶ ὁσάκις ὁ Ο τὸν ΖΗ μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Π· ὁ Π ἄρα τὸν Ο πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὁ Ε τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν ΖΗ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ. Καὶ ἐπεὶ ἀπὸ μονάδος ἑξῆς ἀνάλογόν εἰσιν οἱ Α Β Γ Δ, ὁ δὲ μετὰ τὴν μονάδα ὁ Α πρῶτός ἐστιν· ὁ Δ ἄρα ὑπ᾽ οὐδενὸς ἄλλου ἀριθμοῦ μετρηθήσεται, πάρεξ τῶν Α Β Γ· καὶ ὑπόκειται ὁ Ο οὐδενὶ τῶν Α Β Γ ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα μετρήσει ὁ Ο τὸν Δ. Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Ο πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Π· οὐδὲ ὁ Ε ἄρα τὸν Π μετρεῖ. Καὶ ἔστιν ὁ Ε πρῶτος· πᾶς δὲ πρῶτος ἀριθμὸς πρὸς ἅπαντα ἀριθμὸν, ὃν μὴ μετρεῖ,

πρῶτός ἐστιν· οἱ Ε Π ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ἰσάκις, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, καὶ ἔστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν Π, ὁ Ο πρὸς τὸν Δ· ἰσάκις ἄρα ὁ Ε τὸν Ο μετρεῖ καὶ ὁ Π τὸν Δ. Ὁ δὲ Δ ὑπ' οὐδενὸς ἄλλου μετρεῖται, πάρεξ τῶν Α Β Γ· ὁ Π ἄρα ἑνὶ τῶν Α Β Γ ἐστὶν ὁ αὐτός. Ἔστω τῷ Β ὁ αὐτός. Καὶ ὅσοι εἰσὶν οἱ Β Γ Δ τῷ πλήθει τοσοῦτοι εἰλήφθωσαν ἀπὸ τοῦ Ε, οἱ Ε ΘΚ Λ. Καί εἰσιν οἱ Ε ΘΚ Λ τοῖς Β Γ Δ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Δ, ὁ Ε πρὸς τὸν Λ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν Β Λ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Δ Ε· Ἀλλ' ὁ ἐκ τῶν Δ Ε ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Π Ο· καὶ ὁ ἐκ τῶν Π Ο ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν Β Λ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Π πρὸς τὸν Β, ὁ Λ πρὸς τὸν Ο. Καὶ ἔστιν ὁ Π τῷ Β ὁ αὐτός· καὶ ὁ Λ ἄρα τῷ Ο ἐστὶν ὁ αὐτὸς, ὅπερ ἀδύνατον, ὁ γὰρ Ο ὑπόκειται μηδενὶ τῶν ἐκκειμένων ὁ αὐτός· οὐκ ἄρα τὸν ΖΗ μετρεῖ τις ἀριθμὸς, πάρεξ τῶν Α Β Γ Δ Ε ΘΚ Λ Μ, καὶ τῆς μονάδος. Καὶ ἐδείχθη ὁ ΖΗ τοῖς Α Β Γ Δ Ε ΘΚ Λ Μ, καὶ τῇ μονάδι ἴσος· τέλειος δὲ ἀριθμός ἐστιν ὁ τοῖς ἑαυτοῦ μέρεσιν ἴσος ὤν· τέλειος ἄρα ἐστὶν ὁ ΖΗ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ἐννάτου βιβλίου.

Appendix I.

Demonstrationes alterae in editionibus Elementorum Euclidis hic illic adscriptae.

1.

Ad Lib. II. prop. 4.

Καὶ ἄλλως. (*Ἑτέρα δεῖξις.*)

Λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΒ· καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ· τοῦ ΑΒΔ ἄρα τριγώνου αἱ τρεῖς γωνίαι, αἱ ὑπὸ ΑΒΔ ΑΔΒ ΒΑΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ, λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΔ ΑΔΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί· καὶ εἰσὶν ἴσαι· ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΑΔΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ πρὸς τῷ Α· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ ἡμίσειά ἐστιν ὀρθῆς· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΗΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΗ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΒΓ τῇ ΓΗ ἐστιν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΓΒ τῇ ΗΚ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ΓΗ τῇ ΒΚ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ. Ἔχει δὲ καὶ ὀρθὴν τὴν ὑπὸ ΓΒΚ γωνίαν· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΚ, καὶ ἔστιν ἀπὸ τῆς ΓΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΘΖ τετράγωνόν ἐστι, καὶ ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὰ ἄρα ΓΚ ΘΖ τετράγωνά ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗ τῷ ΗΕ, καὶ ἔστι τὸ ΑΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τὰ ἄρα ΑΗ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἔστι δὲ καὶ τὰ ΓΚ ΘΖ ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τὰ ἄρα ΓΚ ΘΖ ΑΗ ΗΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν

ΑΓ ΓΒ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τὰ ΓΚ ΘΖ καὶ τὰ ΑΗ ΗΕ ὅλον ἐστὶ τὸ ΑΕ, ὅ ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνοις καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

2.
Ad Lib. III. prop. 7.

Ἢ καὶ οὕτως. Ἐπεζεύχθω ἡ ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΕ τῇ ΕΚ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΚ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΗΕΖ τῇ ὑπὸ ΖΕΘ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ Ζ σημείου ἑτέρα τις προςπεσεῖται πρὸς τὸν κύκλον ἴση τῇ ΗΖ· μία ἄρα μόνη. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

3.
Ad Lib. III. prop. 8.

Ἢ καὶ ἄλλως. Καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΝ. Ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΜ τῇ ΜΝ, κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ, καὶ βάσις ἡ ΔΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΜΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἴση ἐστίν. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΚΜΔ τῇ ὑπὸ ΒΜΔ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΜΔ ἄρα τῇ ὑπὸ ΝΜΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάττων τῇ μείζονι, ὅπερ ἔστιν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα πλείους ἢ δύο ἴσαι πρὸς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἐφ' ἑκάτερα τῆς ΔΗ ἐλαχίστης προςπεσοῦνται. Ἐὰν ἄρα κύκλου, καὶ τὰ ἑξῆς.

4.
Ad Lib. III. prop. 9.

Ἄλλως.

Κύκλου γὰρ τοῦ ΑΒγ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τὸ Δ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ πρὸς τὸν ΑΒγ κύκλον προσπιπτέτωσαν πλείους ἢ δύο ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ΔΑ ΔΒ Δγ· λέγω ὅτι τὸ ληφθὲν σημεῖον τὸ Δ κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒγ κύκλου.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τὸ ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ Δε διήχθω ἐπὶ τὰ ζ η σημεῖα, ἡ ζη ἄρα διάμετρός ἐστι τοῦ ΑΒγ κύκλου. Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΑΒγ ἐπὶ τῆς ζη διαμέτρου εἴληπταί τι σημεῖον τὸ Δ, ὃ μή ἐστι κέντρον τοῦ κύκλου, μεγίστη μὲν ἔσται ἡ Δη, μείζων δὲ ἡ μὲν Δγ τῆς ΔΒ, ἡ δὲ ΔΒ τῆς ΔΑ. Ἀλλὰ καὶ ἴση, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὸ ε κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒγ

κύκλου. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλο τι πλὴν τοῦ Δ· τὸ Δ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΑΒγ κύκλου.

5.

Ad Lib. III. prop. 10.

Ἄλλως.

Κύκλος γὰρ πάλιν ὁ ΑΒΓ κύκλον τὸν ΔΕΖ τεμνέτω κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ δύο, τὰ Β Η Ζ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΑΒΓ κύκλου, τὸ κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ κΒ κΗ κΖ.

Ἐπεὶ οὖν κύκλου τοῦ ΔΕΖ εἴληπταί τι σημεῖον ἐντὸς, τὸ κ, καὶ ἀπὸ τοῦ κ πρὸς τὸν ΔΕΖ κύκλον προςπεπτώκασι πλείους ἢ δύο εὐθεῖαι ἴσαι, αἱ κΒ κΖ κΗ· τὸ κ ἄρα σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου. Ἐστὶ δὲ καὶ τοῦ ΑΒΓ κύκλου κέντρον τὸ κ· δύο ἄρα κύκλων τεμνόντων ἀλλήλους τὸ αὐτὸ κέντρον ἐστὶ τὸ κ, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα κύκλος, καὶ τὰ ἑξῆς.

6.

Ad Lib. III. prop. 11.

Ἄλλως.

Ἀλλὰ δὴ πιπτέτω ὡς ἡ ΗΖΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΖΓ ἐπὶ τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΗ ΑΖ.

Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ ΗΖ μείζους εἰσὶ τῆς ΑΖ, ἀλλὰ ἡ ΖΑ ἴση ἐστὶ τῇ ΖΓ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΘ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΖΗ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΗ λοιπῆς τῆς ΗΘ μείζων ἐστὶν, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΗΔ τῆς ΗΘ, ἡ ἐλάττων τῆς μείζονος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Ὁμοίως, κἂν ἐκτὸς ᾖ τοῦ μικροῦ τὸ κέντρον τοῦ μείζονος κύκλου, δείξομεν τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

7.

Ad Lib. III. prop. 31.

Ἄλλως.

(Ἡ ἀπόδειξις τοῦ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ.) Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ, ἴση γὰρ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον· ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΒ διπλῆ τῆς ὑπὸ ΕΑΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΒ ΑΕΓ διπλασιονές εἰσι τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. Ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΕΒ ΑΕΓ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΒΑΓ ὀρθή ἐστιν. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

8.

Ad Lib. VI. prop. 20.

Ἄλλως.

Δείξομεν δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον ὁμόλογα τὰ τρίγωνα.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ πάλιν τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, καὶ ἐπιζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΕΓ ΗΛ ΛΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ καὶ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΘΚΛ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ, τὸ ΑΒΕ ἄρα τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΒΕΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΛΘ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΗΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΕ τρίγωνον πρὸς τὸ ΖΗΛ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ. Πάλιν, ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΗΘ τριγώνῳ· τὸ ΕΒΓ ἄρα πρὸς τὸ ΛΗΘ διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΓΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΘΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΘΚ τρίγωνον διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΕΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΛΗΘ, οὕτως τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ ΕΒΓ πρὸς τὸ ΛΗΘ, οὕτως τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΕ πρὸς τὸ ΖΗΛ, οὕτως τὸ ΒΕΓ πρὸς τὸ ΗΛΘ καὶ τὸ ΕΓΔ πρὸς τὸ ΛΘΚ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

9.

Ad Lib. VI. prop. 30.

Ἄλλως.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμεῖν.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ κατὰ τὸ γ, ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Βγ ἴσον εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς Αγ τετραγώνῳ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ Βγ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς γΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν Αγ, οὕτως ἡ Αγ πρὸς τὴν γΒ. Ἡ ἄρα ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ γ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

10.

Ad Lib. VI. prop. 31.

Ἄλλως.

Ἐπεὶ τὰ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἄρα εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος διπλασίονα

πλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ. Ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον διπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ εἶδος, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τετράγωνον· ὥςτε καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ εἴδη, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τετράγωνα. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τετραγώνοις· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ εἶδος τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ εἴδεσι, τοῖς ὁμοίοις τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφομένοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

11.

Ad. Lib. VII. prop. 33.

Ἄλλως.

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α, λέγω ὅτι ὑπὸ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ μετρεῖται.

Ἐπεὶ γὰρ σύνθετός ἐστιν ὁ Α, μετρηθήσεται ὑπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἔστω ἐλάχιστος τῶν μετρούντων αὐτὸν ὁ Β· λέγω ὅτι ὁ Β πρῶτός ἐστιν. Εἰ γὰρ μή· σύνθετός ἐστιν, μετρηθήσεται ἄρα ὑπὸ ἀριθμοῦ τινος. Μετρείσθω· καὶ ἔστω ὁ Γ ὁ μετρῶν αὐτόν· ὁ Γ ἄρα τοῦ Β ἐλάσσων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ὁ Γ τὸν Β μετρεῖ, ἀλλὰ καὶ ὁ Β τὸν Α μέτρει· καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α μετρεῖ, ἐλάσσων ὢν τοῦ Β, ἐλαχίστου ὄντος τῶν μετρούντων· ὅπερ ἄτοπον. Οὐκ ἄρα ὁ Β σύνθετος ἀριθμός ἐστι· πρῶτος ἄρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Appendix II.

De claris mathematicis Graecorum ante Euclidem et de vita et scriptis hujus geometrae. (ex Proclo.)

Cum saepius disseratur de Graecorum in mathematicis disciplinis eruditione, multaque nomina clarorum virorum exhibeantur; pergratum me facturum putavi discentibus, si locum Procli exscriberem ex lib. II. ad Euclid. pag. 19. qui brevem quandam geometriae ante Euclidem continet historiam.

Παρ' Αἰγυπτίοις μὲν εὑρῆσθαι πρῶτον ἡ γεω- 1
μετρία παρὰ πολλῶν ἱστορεῖται ἐκ τῆς τῶν χωρίων
ἀναμετρήσεως λαβοῦσα τὴν γένεσιν.[1] *Ἀναγκαία γὰρ*
ἦν ἐκείνοις αὐτὴ διὰ τὴν ἄνοδον τοῦ Νείλου τοὺς
προσήκοντας ἑκάστοις ἀφανίζοντος ὅρους καὶ θαυ-
μαστὸν οὐδὲν, ἀπὸ τῆς χρείας ἄρξασθαι τὴν εὕρεσιν
καὶ ταύτης καὶ τῶν ἄλλων ἐπιστημῶν. Ἐπειδὴ πᾶν
τὸ ἐν γενέσει φερόμενον ἀπὸ τοῦ ἀτελοῦς πρὸς τὸ
τέλειον πρόεισιν .... Ὥςπερ οὖν παρὰ τοῖς Φοίνιξι
διὰ τὰς ἐμπορίας καὶ τὰ συναλλάγματα τὴν ἀρχὴν
ἔλαβεν ἡ τῶν ἀριθμῶν ἀκριβὴς γνῶσις, οὕτω δὴ καὶ
περὶ Αἰγυπτίοις ἡ γεωμετρία διὰ τὴν εἰρημένην αἰτίαν
εὕρηται. Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν 2
μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην· καὶ
πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρε, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς
μετ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπι-
βαλλων τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον. Μετὰ δὲ τοῦτον
Ἀμέριστος ὁ Στησιχόρου τοῦ ποιητοῦ ἀδελφὸς, ὡς 3
ἐφαψάμενος τῆς περὶ γεωμετρίας σπουδῆς μνημονεύε-
ται, καὶ Ἱππίας ὁ Ἠλεῖος ἱστόρησεν ὡς ἐπὶ γεωμε-
τρίας δόξαν αὐτοῦ λαβόντος. Ἐπὶ δὲ τούτοις Πυ- 4
θαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα
παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς
αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεω-
ρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων
(alii *ἀναλόγων*) *πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμι-*
κῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρε. Μετὰ δὲ τοῦτον 5
Ἀναξαγόρας ὁ Κλαζομενίος πολλῶν ἐφήψατο
κατὰ γεωμετρίαν, καὶ Οἰνοπίδης ὁ Χῖος,[2]
ὀλίγῳ νεώτερος ὢν τοῦ Ἀναξαγόρου, ὧν καὶ ὁ
Πλάτων ἐν τοῖς ἀντερασταῖς ἐμνημόνευσεν ὡς ἐπὶ
τοῖς μαθήμασι δόξαν λαβόντων· ἐφ' οἷς Ἱππο-
κράτης ὁ Χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισ- 6

μον εὑρὼν[3]) καὶ Θεώδωρος[4]) ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο
περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς· πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκρά-
της τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψε·
Πλάτων δὲ ἐπὶ τούτου γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν 7
ἐπίδοσιν τά τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν
λαβεῖν, διὰ τὴν περὶ αὐτὴν σπουδὴν, ὅςπερ δῆλός
ἐστι καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις
καταπυκνωσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαυμα-
στὸν φιλοσοφίας ἀντεχόμενον ἐπεγείρων. Ἐν δὲ τούτῳ
τῷ χρόνῳ καὶ Λεωδάμας ὁ Θάσιος ἦν καὶ Ἀρχύ- 8
τας[5]) ὁ Ταραντῖνος καὶ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος
παρ᾽ ὧν ἐπηυξήθη τὰ θεωρήματα καὶ προῆλθεν εἰς
ἐπιστημονικωτέραν σύστασιν. Λεωδάμαντος δὲ νεώ-
τερος ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων,
οἳ πολλὰ προςεπόρισαν τοῖς πρὸ αὐτῶν, ὥςτε τὸν
Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ
τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορι-
σμὸν εὑρεῖν, πότε δυνατόν ἐστι τὸ ζητούμενον πρό-
βλημα καὶ πότε ἀδύνατον. Εὔδοξος δὲ ὁ Κνίδιος 9
Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος, ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλά-
τωνα[6]) γενόμενος, πρῶτος τῶν καθόλου θεωρημάτων
τὸ πλῆθος ηὔξησε καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας
τρεῖς προςέθηκε καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν, ἀρχὴν λα-
βόντα παρὰ Πλάτωνος, εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ
ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ᾽ αὐτῶν χρησάμενος. Ἀμύκλας 10
δὲ ὁ Ἡρακλεώτης εἷς τῶν Πλάτωνος ἑταίρων καὶ
Μέναιχμος ἀκροατὴς ὢν Εὐδόξου καὶ Πλάτωνι
δὲ συγγεγονὼς καὶ ὁ ἀδελφὸς αὐτοῦ Δεινόστρατος[7])
ἔτι τελεώτεραν ἐποίησαν τὴν ὅλην γεωμετρίαν. Θεύ- 11
διος δὲ ὁ Μάγνης ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι
διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ
τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξε καὶ πολλὰ τῶν ὁρικῶν
καθολικώτερα ἐποίησεν. Καὶ μέντοι καὶ ὁ Κυζι- 12
κῖνος Ἀθηναῖος κατὰ τοὺς αὐτοὺς γεγονὼς χρόνους

καὶ ἐν τοῖς ἄλλοις μὲν μαθήμασι, μάλιστα δὲ κατὰ
γεωμετρίαν καταφανὴς ἐγένετο. Διῆγον οὖν οὗτοι
μετ᾽ ἀλλήλων ἐν ἀκαδημείᾳ κοινὰς ποιούμενοι τὰς
ζητήσεις. Ἑρμότιμος δὲ ὁ Κολοφώνιος τὰ ὑπ᾽ Εὐ- 13
δόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ
πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε καὶ τῶν τό-
πων τινὰ συνέγραψεν. Φίλιππος δὲ ὁ Μεταῖος 14
(Μεδμαῖος) Πλάτωνος ὢν μαθητὴς καὶ ὑπ᾽ ἐκείνου
προτραπεὶς εἰς τὰ μαθήματα καὶ τὰς ζητήσεις ἐποιεῖτο
κατὰ τὰς Πλάτωνος ὑφηγήσεις καὶ ταῦτα προὔβαλλεν
ἑαυτῷ ὅσα ᾤετο τῇ Πλάτωνος φιλοσοφίᾳ συντελεῖν.
Οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες (inter quos est
Εὔδημος ὁ Περίπατητικος) μέχρι τούτου προάγουσι
τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν· οὐ πολὺ δὲ τού- 15
των νεώτερός ἐστιν Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συνα-
γαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας πολλὰ
δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλα-
κώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους
ἀποδείξεις ἀναγαγών. Γέγονε δὲ οὗτος ὁ ἀνὴρ ἐπὶ
τοῦ πρώτου Πτολεμαίου· καὶ γὰρ ὁ Ἀρχιμήδης καὶ ἐν
τῷ πρώτῳ μνημονεύει Εὐκλείδους. Καὶ μέντοι καί
φασιν ὅτι Πτολεμαῖος ἤρετό ποτε αὐτόν· Εἰ τίς
ἐστι περὶ γεωμετρίαν (προχειρότερα θεωρία, αὐτὸς δὲ
ἀπεκρίνατο· μὴ εἶναι βασιλικὴν ἄτραπον πρὸς γεω-
μετρίαν). Νεώτερος μὲν οὖν ἐστι τῶν περὶ Πλάτωνα, 16
πρεσβύτερος δὲ Ἐρατοσθένους καὶ Ἀρχιμήδους· οὗτοι
γὰρ σύγχρονοι ἀλλήλοις, ὥςπερ καί φησιν Ἐρατοσθέ-
νης· καὶ τῇ προαιρέσει δὲ Πλατώνικός ἐστι καὶ τῇ
φιλοσοφίᾳ ταύτῃ οἰκεῖος· ὅθεν δὴ καὶ τῆς συμπάσης
στοιχειώσεως τέλος προεστήσατο τὴν τῶν καλουμένων
Πλατωνικῶν σχημάτων σύστασιν. Πολλὰ μὲν οὖν καὶ 17
ἄλλα τοῦ ἀνδρὸς τούτου μαθηματικὰ συγγράμματα
θαυμαστῆς ἀκριβείας καὶ ἐπιστημονικῆς θεωρίας μέστα·
τοιαῦτα γὰρ καὶ τὰ ὀπτικὰ καὶ τὰ κατοπτρικά,

*τοιαῦται δὴ καὶ αἱ κατὰ μουσικὴν στοιχειώσεις ἔτι
δὲ τὸ περὶ διαιρέσεων βιβλίον. Διαφερόντως δ' ἄν
τις αὐτὸν ἀγαθείη κατὰ τὴν γεωμετρικὴν στοιχεί-
ωσιν τῆς τάξεως ἕνεκα καὶ τῆς ἐκλογῆς τῶν πρὸς τὰ
στοιχεῖα πεποιημένων θεωρημάτων τε καὶ προβλημά-
των· καὶ γὰρ οὐχ ὅσα ἐνεχώρει λέγειν, ἀλλ' ὅσα στοι-
χειοῦν ἠδύνατο παρείληφεν . . . Μεθόδους παραδέ-* 18
*δωκε καὶ τῆς διορατικῆς φρονήσεως, ἃς ἔχοντες γυμ-
νάζειν δυνησόμεθα τοὺς ἀρχομένους τῆς θεωρίας ταύ-
της πρὸς τὴν εὕρεσιν τῶν παραλογισμῶν, ἀνεξαπάτητοι
δὲ διαμένειν καὶ τοῦτο δὴ τὸ σύγγραμμα δι' οὗ τὴν
παρασκευὴν ἡμῖν ταυτὴν ἐντίθησι Ψευδαρίων* [8]
*ἐπέγραψε, τρόπους τε αὐτῶν ποικίλους ἐν τάξει δια-
ριθμησάμενος καὶ καθ' ἕκαστον γυμνάσας ἡμῶν τὴν
διάνοιαν παντοίοις θεωρήμασι· τῷ δὲ ψεύδει τὸ
ἀληθὲς παραθεὶς καὶ τῇ πείρᾳ τὸν ἔλεγχον τῆς ἀπά-
της συναρμόσας (συναρμόσαντες)·* (pag. 80.) *καὶ . .
πορισματα Εὐκλείδης γέγραφε, βιβλία προβλημά-
των συντάξας.*

1) Cf. Herodot. II, 109. qui etiam addit, polum et diei partes duodecim a Babyloniis ad Graecos pervenisse. Platonis Phaedrus. Servius ad Virgil. eclog. III. Aristot. metaphys. I.

2) Hic locus in ed. Bas. corruptissimus est. conf. Mem. d. l'Acad. d. Berl. II. a. 1746. IV. a. 1748.

3) cf. Arist. de Soph. II. ubi Bryson tanquam *ψευδόγραφος* idem fere tentasse videtur. (Loquitur Aristot. de circuli quadratura per meniscos.)

4) Magister Platonis, cf. Laert: in Platone. *Εἰς Μέγαρα πρὸς Εὐκλείδην σὺν ἄλλοις τισὶ Σωκρατικοῖς ὑπεχώρησεν· ἔπειτα εἰς Κυρήνην ἀπῆλθε πρὸς Θεόδωρον τὸν μαθηματικὸν κἀκεῖθεν εἰς Ἰταλίαν πρὸς τοὺς Πυθαγορικοὺς Φιλόλαον καὶ Εὔρυτον.*

5) cf. Diog. Laert. VIII. Archytas.

6) cf. Diog. Laert. in Eud. *καὶ Πλάτωνα αὐτὸν ἀκοῦσαι.* Suidas *Πλάτωνος ἡλικιώτης.* Cicero Platonis auditor.

7) Dinostratus, inventor quadratricis (*τῆς τετραγονιζούσης*) cf. Papp. IV. 25. — Klügel. Lex. math. Tom. IV. pag. 49.

8) in quo libro *τῶν ψευδογράφων* (quos perstringit Aristot. de Soph. II.) libros refellisse videtur.

Appendix III.

De vita et scriptis Euclidis Geometrae.

De vita clarissimi hujus Graecorum mathematici, cujus subtilitatem in elementis geometricis illustrandis nemo non admiratur, parum nobis constare dolemus.

Graecum eum fuisse, nomen ipsius (*Εὐκλείδης*, Euclides, et apud Arabes Uklid's) operisque venustas ostendit, multorumque scriptorum testimonia probant, inter quos Proclus (Constantinopolitanus ann. 412 — 485 post Ch. n.) et Pappus (Alexandrinus 370 post Ch.) primum locum obtinent, quibus nimirum omnis fere nostra, quae minima est, vitae morumque celeberrimi Geometrae debetur notitia.

De parentibus ejus nihil accepimus, nihil de urbe, qua natus sit; nisi Arabum (Naszir-Eddini aliorumque) fabulosis credendum esse putas narrationibus, qui Naucratis filium, Zenarchi nepotem eum fuisse contenderunt, genere quidem graecum, domicilio autem Damascenum, ortu Tyrium. [1])

Quo floruerit tempore ex Procli commentario de primo Elementorum libro conscripto abunde patet, in quo legimus, recentiorem fuisse Euclidem Platonis discipulis, Eratosthene vero et Archimede [2]) (aequalibus circ. ann. 240. ant. Ch. n.) antiquiorem, vixisse enim temporibus Ptolomaei I (Lagi). Verisimile est Euclidem Alexandriae celebrem illam scholam mathematicam aut instituisse, [3]) aut certe ab aliis institutae inter primos operam et studium navasse. Ptolemaeus enim ex eo quaesisse dicitur, an faciliorem sibi tradere posset mathematicarum rerum discendarum methodum, responsumque retulisse: Nulla exstat regia ad mathematicam via. Haec a Proclo tradita nugis

quibusdam Arabici interpretis (Naszir-Eddini) ansam praebuisse videntur. Iste enim in operis praefatione: Regem quendam Graecorum, narrat, litterarum mathematicarum curiosum, Euclidis Thusini (Thus erat Eddini patria) fama audita, arcessisse virum et ab eo petiise, ut Elementorum libros, qui jam exstarent, sed regi displicerent, in ordinem certum redigeret illustraretque. Illum igitur regi obsequentem, a numero quindecim illorum veterum librorum duobus resectis, reliquos suo nomine promulgasse.

Moribus Euclides usus est temperatis suavissimisque, si Pappo [4]) fides habenda est, qui modestia ejus probata hoc maxime ei laudi tribuit, quod iis, qui studiis mathematicis ingenium accommodarent, amicissimum se praebuerit, nec de laudibus aliorum per nova inventa paratis detrahere studuerit. Tali enim invidia Apollonium Pergeum, quem magnum geometram vocabant, liberum non fuisse, idem Pappus memoriae tradidit.

Omnium, quae hucusque disputata sunt, ratione habita; quam falsa sit eorum opinio, qui Euclidem Megareum, celebrem illum Socratis discipulum, centum fere annos ante Ptolemaeum Athenis florentem, elementorum fuisse auctorem contenderunt, facile apparet. Quem in errorem cum multos alios tum Sebastianum Mattei apud Vitalem Giordanum,[5]) Italicum Euclidis interpretem, incidisse videmus; cujus imbecilla argumentatio jam eo refelli potest, quod, quamquam permulti Graecorum Romanorumque scriptorum de illo disserunt Megaricae scholae auctore, viro vehemente et litigioso, ut perhibet Laertius; [6]) mathematicas disciplinas ab eo egregie auctas vel provectas esse, ex tanto numero nemo commemorat; nisi Valerium Maximum tale quid sensisse putas, qui cum

Platonem ad Euclidem Geometram conductores quosdam misisse narret, aut tempora aut nomina confudisse aut ficta narasse videtur. [7])

At Euclidem geometram Platonis doctrina imbutum fuisse a Proclo [8]) docemur, qui summum Elementorum finem in constructione quinque figurarum mundanarum, quas etiam Platonicas appellant, positum esse existimat; quem ad finem monente Keplero [9]) omnes omnino referri possunt propositiones omnium librorum, exceptis iis, quae ad numerum perfectum inveniendum excogitata sunt. Sed utut est; nemo infitias ibit, omnia Euclidis opera ita instituta esse, ut singularis philosophi schola nulla reperiatur, quae sua haec omnia propria vindicare possit; adeo ille simplicissimis notionibus, quae omnibus hominibus nedum philosophis communia sunt, praemissis, nunquam aut ornandi causa aut ut placita quaedam philosophorum confirmaret, a proposito deflectit. Quod si philosophorum morem imitari voluisset, multis locis occasionem ei oblatam fuisse, quis non videt. Legas ad primum Elementorum librum Procli locupletissimi scriptoris commentarium, ut intelligas, quae de punctis, lineis, de unitate multisque aliis, quae ad mathematicen pertinent, inepta et a mathematica ratione prorsus aliena celeberrimi philosophi disputaverint, somniaverint. [10]) Admirandum igitur est Geometrae illustris ingenium, qui ex minimis et per se notis ad rerum abditissimarum cognitionem perveniendi certam aperuit viam, quam ingressi omnes, qui post eum per bis mille annos exstiterunt clarissimi mathematici, scientiam suam ad eam perfectionem perduxere, a qua ceteras disciplinas longe abesse confitendum est.

Jam superest, ut Euclidis opera ipsa breviter enume-

remus, quae, quantopere ad omnes Mathematicas disciplinas, tum temporis hominibus cognitas, toto animo et studio incubuerit vir egregius, certissima sunt documenta. Pythagorei in quatuor partes universam, mathematicam dividere solebant, quae sunt Arithmetica, Musica, Geometria, Sphaerica, cujus divisionis rationem Proclus exposuit.

Arithmeticam et Geometriam Euclides egregie illustravit 1) praeclarissimo Elementorum opere, (*Στοιχεῖα*) quod ita, ut ab ipso scriptore confectum est, si pauca excipias, quae addita aut immutata esse videntur, ad nostra tempora integrum permansit. 2) Datis (*Δεδομένα*), quorum Proclus quidem mentionem non fecit [11]) sed quae testibus Pappo et Marino huic geometrae tribuenda sunt. Haec quoque nobis integra sunt relicta. [12]) 3) Libro de divisionibus (*Περὶ διαιρέσεων*), qui a Proclo laudatus ad nostra tempora non pervenit; ille enim ejusdem argumenti tractatus latino sermone conscriptus, cujus auctorem Gregorius nominat Mahomedum Bagdedinum, num ex graeco Euclidis libro translatus sit, nec ne, viri docti dubitant. 4) Tribus libris Porismatum (*Πορίσματα*), quorum nomen Proclus, exempla aliquot Pappus memoriae tradiderunt. 5) libro Fallaciarum (*Ψευδάρια*), quem nomine tantum ex Proclo novimus. 6) tribus libris Conicorum, quorum Pappus mentionem facit. 7) libro, qui Loci in plano (*τοποὶ πρὸς ἐπιφάνειαν*) incribitur, a Pappo laudato.

Musices elementa docuit Euclides duobus libris, quorum alter 8) Introductio Harmonica (*Εἰςαγωγὴ ἁρμονικὴ*), alter 9) Sectio canonis (*Κατατομὴ κάνονος*) inscriptus, uterque nobis relictus est.

Sphaericam uno quidem tantum libro 10) Phaenomenon (*Φαινόμενα*) illustravit, cui tamen duo adjungenda sunt 11) Optica (*Οπτικὰ*) et 12) Catoptrica

(*Κατροπτρικὰ*) quorum mentionem Proclus fecit. Relicti sunt nobis tres libri hujus argumenti graece conscripti; sed vera eorum origo ambigitur.

1) Conf. Gartz de interpretibus Euclidis Arab. pag. 3.

2) Archimedem in Aegypto edoctum esse scribit Diodor. Sicul. V p. 217. Conf. Procli locum supra exhibitum. 15. Ad ea, quae sequuntur, notandum est, Senecam Ep. 91. similia de Alexandro magno narrare. „Alexander Macedonum rex discere Geometriam infelix coe-„perat ... Erant illa, quae tradebantur subtilia et diligenti intentione „discenda: non quae percipere posset vesanus homo et trans Oceanum „cogitationes suas mittens: „Facilia" inquit: „me doce!" Cui prae-„ceptor „Ista" inquit, „omnibus eadem sunt aeque difficilia."

3) Apollonium Pergeum, qui teste Heraclide (apud Eutocium in vita Archimedis) sub Ptolemaeo Euergete (247 — 221 a. Ch.) vixit, Euclidis discipulis longo tempore operam Alexandriae dedisse scribit Pappus. Coll. Math. VII.

4) Pappus Collect. math. VII. *Εὐκλείδης ἀποδεχόμενος τὸν Ἀριστέα ἄξιον ὄντα ἐφ᾽ οἷς ἤδη παρεδεδώκει κωνικοῖς καὶ μὴ φθάσας ἢ μὴ θελήσας ἐπικαταβάλλεσθαι τούτων τὴν αὐτὴν πραγματείαν, ἐπιεικέστατος ὢν, καὶ πρὸς ἅπαντας εὐμενὴς τοὺς καὶ κατὰ πόσον συναύξειν δυναμένους τὰ μαθήματα, ὡς δεῖ, καὶ μηδαμῶς προσκρουστικὸς ὑπάρχων καὶ ἀκριβὴς μὲν οὐκ ἀλαζονικὸς δὲ καθάπερ οὗτος.* (Apollonius Pergeus qui paulo infra *σχολάσας* dicitur fuisse *τοῖς ὑπὸ Εὐκλείδου μαθηταῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ πλεῖστον χρόνον.*) ex Cod. Vindeb. Pappi.

5) Di questo Autore dubitano, ed anco ne fanno lunghe discussioni i Commentatori, se fu il Prencipe della Setta Megarense o altro Geometra celebre negli anni seguenti, perche del Megarense si sà, che nell' infantia d'Alesandro occupò la catedra ad Aristotele quando passava legato degli Ateniensi in Persia, e del Matematico si legge, che fù familiare a Tolomeo primo Rè d'Egitto, ma in venticinque o trenta anni soli di differenza non sò per qual ragione non possa essere il medesimo giovane nel tempo d'Alessandro, ed antiano in quel di Tolomeo. Euclide restituto pagina 9. (ab initio).

6) Diog. Laert. (Euclid.) Timonis versum exhibet de Euclide. *Εὐκλείδου, Μεγαρεῦσιν ὃς ἔμβαλε λύσσαν ἐρισμοῦ.*

7) „Plato conductores sacrae arcis (arae Cod.) de modo et forma „ejus secum sermonem conferre conatos, Euclidem Geometram adire „jussit scientiae ejus cedens, immo professioni." Val. Max. Lib. VIII. cap. 12. Qui locus nisi corruptus est scribarum inscitia, verba Eud. Cnid. (Eudoxum Cnidium, quem primum Aegyptorum de motibus stellarum cognitionem in Graeciam transtulisse Seneca affirmat Nat. quaest. VII, 2. quique, ut Cicero ait, (De divinat. II, 42) in astrologia, judicio doctissimorum hominum facile princeps erat,)

in Euclidem mutantium, errorem Valerii ostendit credentis Euclidem geometram Platonis temporibus vixisse. Philosophum ab eo Megareum pro Geometra habitum esse, vix crediderim. Verbum enim Geometram discernendi causa nomini additum esse videtur, eaque, quae sequuntur „Platonem professioni cessisse" haud perplexe indicant, Euclidem illum, de quo agitur, mathematicis studiis majorem quam ceteris operam dedisse; quod de Megareo dici non potest, quem ipse Plato mathematico acumine facile superasset; Hunc enim (ὡς γεωμετρικὸν) Delii adiisse dicuntur, aram cubicam duplicare ab Apolline jussi. Exstant enim similes de Platone narrationes, quarum eam, quae ad Delium notissimum problema attinet, ex Plutarchi libro de Genio Socratis VII. in medium proferre liceat. *Ἦν χρησμὸς, Δηλίοις καὶ τοῖς ἄλλοις Ἕλλησι παῦλαν τῶν παρόντων κακῶν ἔσεσθαι διπλασιάσασι τὸν ἐν Δήλῳ βωμόν· οὔτε δὲ τὴν διάνοιαν ἐκεῖνοι συμβάλλειν δυνάμενοι, καὶ περὶ τὴν τοῦ βωμοῦ κατασκευὴν γελοῖα πάσχοντες, (ἑκάστης γὰρ τῶν τεσσάρων πλευρῶν διπλασιαζομένης ἔλαθον τῇ αὐξήσει τόπον στερεὸν ὀκταπλάσιον ἀπεργασάμενοι δι᾽ ἀπειρίαν ἀναλογίας, ἣ τῷ μήκει διπλάσιον παρέχεται) Πλάτωνα τῆς ἀπορίας ἐπεκαλοῦντο βοηθόν· ὁ δὲ τοῦ Αἰγυπτίου* (Chonuphis scil.) *μνησθεὶς προσπαίζειν ἔφη τὸν θεὸν Ἕλλησιν ὀλιγοροῦσι παιδείας οἷον ἐφυβρίζοντα τὴν ἀμαθίαν ἡμῶν καὶ κελεύοντα γεωμετρίας ἅπτεσθαι μὴ παρέργως· οὐ γάρ τοι φαῦλον οὐδ᾽ ἀμβλὺ διανοίας ὁρώσης, ἄκρως δὲ τὰς γραμμὰς ἠσκημένης ἔργον εἶναι, καὶ δυοῖν μέσων ἀνάλογον λῆψιν· ᾗ μόνῃ διπλασιάζεται σχῆμα κυβικοῦ σώματος ἐκ πάσης ὁμοίως αὐξόμενον διαστάσεως· τοῦτο μὲν οὖν Εὔδοξον αὐτοῖς τὸν Κνίδιον, ἢ τὸν Κυζικηνὸν Ἑλικῶνα συντελέσειν.*

Non multum ab his abhorrent, quae Joh. Philoponus (640) in Annal. Poster I, 7 his verbis narrat. *Δηλίοις λοιμώξασιν ἔχρησεν ὁ Ἀπόλλων ἀπαλλαγήσεσθαι τοῦ λοιμοῦ, εἰ τὸν βωμὸν διπλασιάσουσιν, κυβικὸν ἔχοντα σχῆμα· οἱ δὲ ἐπῳκοδόμησαν προσθέντες τῷ προτέρῳ βωμῷ ἕτερον κύβον ἴσον· ἀλλ᾽ ἡ τῶν δύο κύβων συνθήκη τὸ τοῦ κύβου σχῆμα ἠλλοίωσε· γέγονε γὰρ ἀντὶ κύβου δοκίς· τοῦ λοιμοῦ δὲ μὴ παυσαμένου, ἔχρησεν ὁ θέος, μὴ πεποιηκέναι αὐτοὺς τὸ προσταχθέν· ὁ μὲν γὰρ προσέταξε διπλασιάσαι τὸν κύβον τουτέστι βωμὸν κατασκευάσαι κυβικὸν τοῦ προτέρου διπλάσιον· οἱ δὲ κύβον ἐπὶ κύβῳ ἐπέθηκαν. Ἦλθον οὖν πρὸς Πλάτωνα, ζητοῦντες μέθοδον, πῶς ἂν τὸν κύβον διπλασιάσαιεν. ὁ δὲ πρὸς αὐτους φήσιν. Ἔοικεν ὑμῖν ὀνειδίζειν ὁ θεὸς ὡς ἀμελοῦσι γεωμετρίας. ὁ δὲ τοῦ κύβου διπλασιασμὸς εὑρεθήσεταί, φησιν, εἰ δύο εὐθειῶν δύο μέσαι ἀνάλογον εὑρεθεῖεν. καὶ τοῦτο τὸ πρόβλημα τοῖς μαθηταῖς* (inter quos fuit Eudoxus Cnidius) *προσεβάλλετο, οἵτινες καὶ περὶ τούτου γεγράφασιν, ὡς δεδύνηται ἕκαστος, ὧν οὐδέν τι περισώζεται μεχρὶ τοῦ νῦν, ἀλλ᾽ οὐδ᾽ ὁ Γεωμέτρης* (Euclidem nostrum intellige, quem, ut vides, Philoponus a Platonis discipulis sejungit.) *περὶ τοῦτο ἐπεσημήνατο.* Ce-

terum cubi duplicatio ab Archyta inventa esse traditur. conf. Diog. Laert. Lib. VIII. in Archyta. De re ipsa vide Klügel Lex Math. I. p. 721.

8) cf. Procli locum supra exhibitum. 16.

9) *οἱ Πυθαγόρειοι τὸ σημεῖον ἀφορίζονται μονάδα προςλαβοῦσαν θέσιν.* (pag. 6. lin. 7. a fine.) . . . . *Τὴν τοῦ δωδεκαγώνου γωνίαν Διὸς εἶναί φησιν ὁ Φιλόλαος ὡς κατὰ μίαν ἕνωσιν τοῦ Διος ὅλον συνέχοντος τὸν τῆς δυωδεκάδος ἀριθμόν· ἡγεῖται γὰρ καὶ παρὰ τῷ Πλάτωνι δυωδεκάδος ὁ Ζεὺς καὶ ἀπολύτως ἐπιτροπεύει τὸ πᾶν* (pag. 48. lin. 15. ab ultima) . . . *Εἰ δὲ εἰς σῶμα καὶ ψυχὴν θέλεις διαιρεῖν, πᾶν μὲν τὸ σωματικὸν τῆς τοῦ εὐθέως μερίδος θήσεις, πᾶν δε τὸ ψυχικὸν τῆς τοῦ κύκλου ταυτότητος καὶ ὁμοιότητος μετέχειν.* (pag. 41. lin. 19.)

Conf. Ciceronem. Si vero aut numerus quidam sit animus, quod subtiliter magis quam dilucide dicitur, etc.

11) Datorum mentionem Proclus non fecit. Erravit igitur indicis ad Proclum apud Fabricium (Bibl. Graec. ed. Harl. IV. pag. 83.) confector, qui nomini Euclidis librorum nomina addit locosque indicat, ubi Proclus de iis disserit. Quem autem ad *δεδομένα* attrahit locum, negligentissime inspexisse videtur, cum ibi non de singulari quodam Euclidis libro agatur, sed de iis, quae ad tertium theorema libri I. Elementorum data sunt. Scripsit enim Proclus: *Ἐπειδὴ δὲ δυνατὸν ἦν, τὰς μὲν δύο πλευρὰς ἴσας ἔχειν ταῖς δύο πλευραῖς, οὐ μέντοι τὸ θεώρημα ἀληθεύειν, τῷ μὴ εἶναι ἑκατέραν ἑκατέρᾳ ἴσην, ἀλλ᾽ ἅμα ἀμφοτέρας, διὰ τοῦτο προσέθηκεν ἐν τοῖς δεδομένοις ἴσας εἶναι τὰς πλευρὰς οὐχ ἁπλῶς ἀλλ᾽ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ.*

12) Marinus Pappo recentior, praefationem scripsit ad librum datorum, quae huic praefixa est in graecis textus editionibus sub titulo *Μαρίνου τοῦ φιλοσόφου ἡ εἰς τὰ δεδομένα Εὐκλείδου προθεωρία.* In hoc tractatu legitur (Ed. Oxon. pag. 458.) *Τὸ τῶν δεδομένων βιβλίον ὁ Εὐκλείδης ἐξεπόνησεν, ὃν καὶ στοιχειωτὴν κύριον ἐπονώμασαν· πάσης γὰρ σχεδὸν μαθηματικῆς ἐπιστήμης στοιχεῖα καὶ οἷον εἰςαγωγὰς προέταξεν, ὡς γεωμετρίας μὲν ὅλης ἐν τοῖς ιγ βιβλίοις καὶ τῆς ἀστρονομίας ἐν τοῖς φαινομένοις καὶ μουσικῆς δὲ καὶ ὀπτικῆς ὁμοίως στοιχεῖα παραδέδωκεν καὶ τῆς περὶ δεδομένου ταύτης πραγματείας ἐν τῷ προκειμένῳ βιβλίῳ στοιχείωσιν ἀναλυτικὴν ἐποιήσατο.*

Fuere alii decem, quibus nomen Euclidis erat, quos percenset Fabricius III. 19. in adnotat.

Appendix IV.

De elementis geometricis.

Elementa sive initia omnium rerum Graeci στοιχεῖα nominabant, e quibus omnia nascuntur nascentia et in quod omnia ultimum dissolvuntur. Quamobrem Euclides libros hos, quibus omnia ea, quae ad diversas mathematicarum disciplinarum partes cognoscendas maxime necessaria sunt, certo ordine disposuit, hoc nomine appellavit, illorum imitatus exempla, qui ante ipsum doctrinae initiis in conspectu ponendis operam dederant, Hippocratis, Leontis, Theudii, quos omnes multo se inferiores reliquit acumine, subtilitate, perfectione. [1])

Proclus, qui, ut supra memoravi, mundanarum figurarum (i. e. quinque corporum regularium) constructionem ultimum Euclidis scopum in conscribendis elementis fuisse contendit, hunc tamen operis unicum finem constitui non posse confitetur; aliud enim propositum cum eo arcte conjunctum esse, scilicet ut tironibus hac illarum figurarum descriptione methodus traderetur, qua in omnibus mathematicis demonstrationibus uti possent, fundamentaque, ut ita dicam, ponerentur, quibus nemo carere posset, qui in tam recondita arte subtilique versari vellet. [2]) Et re vera, si ab his initiis profecti non essent mathematici, dubitandum est, an nullos unquam fructus tulisset Geometriae studium.

Quod autem mundanas illas figuras attinet, ultimum quidem Elementorum librum, decimum tertium dico, in iis versari, nec ultra provectam videmus geometriam elementariam in his libris; sed multa theoremata offendimus, quarum demonstratione supersedere potuisset Euclides, si illum tantum scopum intueri cursumque suum

in eum unum dirigere voluisset. At elementa figurarum nec non numerorum traditurus id potissimum egit, ut nihil omitteret, quod ex aliqua parte ad perfectam figurarum omnium, quibus circuli et lineae rectio notio subest, cognitionem necessarium esset; nihil insereret, quod ex iis, quae jam demonstrata erant, facile probari posset, quin novum aliquid et simplex offerret. Non omnia igitur docuit, sed quae aditum praeberent ad omnia. Recte igitur Proclus ea tantum elementa esse dicit, quibus quasi simplicissimis fundamentis fulta doctrina ad aliorum perceptionem ascendat, quaeque ad mathematicam cognitionem perficiendam ut singulae litterae ad vocem formandam maxime sint necessaria. Exstare enim permulta, quae simplicia quidem sint, sed nihil ad mathematicam doctrinam absolvendam conferant, ut notissimum illud theorema, quo probatur, lineas perpendiculares e trianguli angulis ad latera opposita ductas uno eodemque puncto convenire.[3] Hujusmodi igitur demonstrationibus, quas Elementis similes Proclus appellat, omissis, earumque, quae ne simplex quidem aliquid exhibent, prorsus nulla habita ratione, ambages reliquit, certissimamque Geometra indagavit viam, quae ad elementariae doctrinae consummatam cognitionem perducere posset. Quod quam feliciter ei contigerit, et opus ipsum et multorum eruditissimorum hominum laudes testantur.

Non omnia, quae in elementis traduntur, ab Euclide ipso inventa esse, sed ex aliorum scriptis collecta, et in hunc ordinem redacta, et per se patet et ex Procli commentario discitur, qui Eudoxi et Theaeteti inchoatis operibus Euclidem fastigium imposuisse demonstrationesque eorum magis perspicuas et ad propositiones probandas aptiores fecisse memoriae tradidit.[4]) Nam si collegisse dicimus Euclidem aliorum inventa,

cave intelligas, eum problemata et theoremata descripsisse, sicut in aliorum scriptis exstarent; ordine enim mutato in mathematicis omnis argumentandi ratio immutetur necesse est. Theoremata igitur cum permulta ut suo loco indicabimus, aliunde ab Euclide in haec elementa translata sint; nulla tamen controversia est, quin eas, quae in elementis reperiuntur, propositionum demonstrationes aut ipse invenerit aut ab aliis inventas ita mutaverit, ut ad propositum sibi finem perveniret.

Quamquam numerus Elementorum Euclidis praeter Marinum qui litterarum signis eum notavit, a scriptorum nemine recensetur; tertium decimum tamen librum ultimum fuisse multis probatur argumentis. Libri enim duo, qui sub titulo quarti decimi et quinti decimi adjuncti sunt, praefationem habent, quam in ceteris desideramus; atque haec ipsa praefatio indicat, post Apollonii (Pergaei sine dubio) tempora eos conscriptos esse. Praeterea ipsa demonstrandi methodus prodit, non esse Euclidis hos duos ultimos libros. Haec enim verba: *τοῦτο δὲ γράφεται ὑπὸ μὲν Ἀρισταίου* [5]) *ἐν τῷ ἐπιγραφομένῳ „πέντε σχημάτων σύγκρισις" ὑπὸ δὲ Ἀπολλωνίου ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐκδόσει τῆς συγκρίσεως τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τὸ εἰκοσαέδρον . . . . γραπτεὸν δὲ καὶ ἡμῖν αὐτοῖς ὅτι . . . .* quae habes in altera quarti dicimi libri demonstratione, Euclidem certe non sapiunt, qui nullo loco in elementis ad alios libros lectores delegare solet. [6]) Adde, quod elementorum vim non habent ea, quae his libris continentur, secundum illam, quam supra exhibuimus definitionem; continent enim amplificationem aliquam cognitionis sed ad altiora progrediendi viam non aperiunt. Ceterum in codice quodam antiquissimo, Savilio teste, in fine tertii decimi libri Scholiastes adscripserat. *Εὐκλείδης ὁ τὰ στοιχεῖα συναθροίσας ἦν ἐπὶ χρόνοις Ἀλεξάνδρου τοῦ*

Μακέδονος. Θέων δὲ ὁ συντάξας αὐτὰ ἐπὶ Θεοδοσίου τοῦ βασιλέως. [7]) Talia autem in fine operis adscribi solent. Praeterea sicuti Marinus tredecim tantum agnoscit libros elementorum, ita arabica Nasir-Eddini versio, multique codices graeci hunc tantum numerum continent. [8]) Haec omnia satis probare videntur, Euclidem hos duos ultimos libros non scripsisse; qui Hypsicli (Isidori discipulo) [9]) Alexandrino [10]) tribui solent, quem Theophylactus [11]) inter praecipuos mathematicos fuisse tradidit, cuique ea quae in praefatione illa dicuntur optime conveniunt.

Fuere jam apud antiquos, qui Euclidis elementa scriptis illustrarent (quos ἐξηγήτας Proclus nominat p. 53). Aeneas Hieropolites in compendium ea contulit. [12]) Theon Alexandrinus universa recensuisse, perpauca, quae sibi displicerent, rejecisse, passim novas demonstrationes addidisse videtur. Proclus locupletissimum et copiosissimum ad primum librum Euclidis commentarium quatuor libris confecit, cujus in fine se reliquos Elementorum libros eodem modo illustraturum esse pollicetur, aliarum rerum cura liberatum.

De compendiaria illa Elementorum editione ab Aenea instituta, quae ad nostra tempora non pervenit, nihil fere praeter auctoris nomen Proclus tradidit libro IV. ad I. [13]) Ipse Proclus, inter Platonicos philosophos scriptor haud ignobilis, Constantinopoli natus, Xantho, urbe Lyciae, eruditus Alexandriae Olympiodorum audivit, postea Athenis Syriani cathedram (450. p. Ch. n.) occupavit et usque ad mortem (485. p. Ch.) [14]) tenuit. Commentarius ejus in primum Elementorum librum, opus magnae assiduitatis et doctrinae non solum mathematicis sed philosophis etiam et literarum historiae studiosis perutilis est. Disputatur enim in primo libro,

quem

quem locum inter disciplinas mathematica occupet, quasque partes habeat; in secundo de geometria, de claris mathematicis, de methodo mathematico propositionumque divisione, de definitionibus; in tertio de postulatis et axiomatis propositionibusque, quae ad triangula pertinent (1—26); in quarto de reliquis primi libri propositionibus. Exhibentur in his libris definitiones, postulata, axiomata, theoremata, problemata eodem ordine et, si pauca excipias, iisdem verbis, ac in vulgatis Elementorum Euclidis editionibus graecis leguntur, quare non est dubitandum, quin hae textum contineant non multum ab eo alienum, quo ipse Proclus usus est. Demonstrationes theorematum et problematum omittuntur quidem in hoc commentario; sed ex iis, quae explicandi et illustrandi causa disputantur, satis apparet, has quoque cum iis, quae ad nostra tempora venerunt, maxime congruentes fuisse. Cujus rei cum in adnotationibus ad singulas propositiones multa exempla exhibiturus sim, hoc loco disjunctionis notissimae problematum et theorematum mentionem fecisse sufficiet, qua in fine demonstrationum utitur Euclides, his quidem verba ὅπερ ἔδει δεῖξαι, illis ὅπερ ἔδει ποιῆσαι adjiciens. Hoc in editionibus nostris factum esse videmus, et Proclus Euclidem hoc fecisse affirmat.[15]) Cum praeterea Proclus aliorum mathematicorum demonstrationes saepius addere soleat, nominaque inventorum proferre, in quo cum Diogene Laertio plerumque consentire eum intelleximus; mirum est, inter tot nomina Theonis Alexandrini mentionem nullam factam esse, quem Pappi, a Proclo tribus locis laudati,[16]) aequalem, quinquaginta fere annis ante Proclum vixisse constat. Incredibile est, Proclum,[17]) qui Alexandriae fuerat, Theonis de rebus mathematicis merita ignorasse, aut, si non ignoraret, tacuisse.

Quamobrem, nisi forte iis locis, qui e nostris Procli editionibus temporum injuria exciderunt, illam Theonis Elementorum editionem laudatam fuisse censemus; hoc Procli silentium probare videtur, editionem illam non adeo a ceteris discrepasse, ut ejus jam ab initio rationem habere opportuisset.

At perscrutantibus nobis, quae existant Theonicae editionis certa indicia, ad ipsius Theonis in Almagestum commentarium redeundum est, ubi ipse affirmat, se ad finem sexti libri demonstrasse, sextores circulorum aequalium proportionales esse angulis ad centrum constitutis. Hoc additamentum in omnibus exemplaribus legitur post verba illa *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*, quae finem imponunt demonstrationi Euclideae. (Conf. pag. 191.) Quare hoc et his similia, quae per se magni momenti non sunt, ut alterae demonstrationes, a Theone editioni suae adjecta esse videntur.[18]) In primo Elementorum libro nullae reperiuntur alterae demonstrationes, nihilque, quod additum esse et superfluum videatur, quare hunc a Theone non mutatum, et Proclo illius laudandi occasionem nullam praebitam esse censemus.

Haec si recte perpendimus, illam nonnullorum codicum inscriptionem: *Εὐκλείδου στοιχείων ἐκ τῶν Θέωνος συνουσιῶν . . . ἐκ τῆς Θέωνος ἐκδόσεως* et similes[19]) non ita interpretabimur, ut textum Euclides a Theone prorsus immutatum et theoremata in alium ordinem redacta putemus,[20]) nec in eorem sententiam abibimus, qui Euclidi quidem theoremata, Theoni demonstrationes tribuerunt,[21]) sed persuasum nobis erit, textum nos habere Euclidis, si quem alius scriptoris graeci, integrum, paucis quidem locis scribarum negligentia corruptum, sed nullo loco ita depravatum,

ut verum aut vero proximum facili negotio reperiri non possit. [22])

1) Cf. Proclum p. 20. (illum locum quem supra pag. 292. §. 17—18. exscripsimus.) Praeterea, id quod maxime operis praestantiam probat, Archimedes, Apollonius et ceteri Geometrae propositionibus Euclidis tanquam principiis et notissimis elementis utuntur. *Καθάπερ δὴ καὶ ὁ Ἀρχιμήδης ἐν τοῖς περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου καί οἱ ἄλλοι, πάντες τοῖς ἐν αὐτῇ τῇ πραγματείᾳ δεδειγμένοις ἀρχαῖς ὁμολογουμέναις χρώμενοι.* (Procl. p. 20.)

2) Conf. locum ex Proclo pag. 293. §. 18.

3) *Στοιχεῖα μὲν οὖν ἐπονομάζεται, ὧν ἡ θεωρία διϊκνεῖται πρὸς τὴν τῶν ἄλλων ἐπιστήμην καὶ ἀφ' ὧν παραγίγνεται ἡμῖν τῶν ἐν αὐτοῖς ἀπόρων ἡ διάλυσις· ὡς γὰρ τῆς ἐγγραμμάτου φωνῆς εἰσὶν ἀρχαὶ πρῶται καὶ ἁπλούσταται καὶ ἀδιαίρεται, αἷς τὸ ὄνομα τῶν στοιχείων ἐπιφημίζομεν καὶ πᾶσα λέξις ἐκ τούτων ὑφέστηκεν καὶ πᾶς λόγος, οὕτω δὴ καὶ τῆς ὅλης γεωμετρίας ἐστί τινα θεωρήματα προηγούμενα καὶ ἀρχῆς λόγον ἔχοντα πρὸς τὰ ἐφεξῆς διήκοντα διὰ πάντων καὶ περιεχόμενα πολλῶν ἀποδείξεις συμπτωμάτων ἃ δὴ στοιχεῖα προςαγορεύουσι· στοιχειώδη δ'ἐστὶν ὅσα διατείνει μὲν ἐπὶ πλείω καὶ τὸ ἁπλοῦν ἔχει καὶ τὸ χαρίεν, οὐκέτι μὴν καὶ τῶν στοιχείων, τῷ μὴ πρὸς πᾶσαν αὐτῶν τὴν ἐπιστήμην κοινὴν εἶναι τὴν θεωρίαν, οἷον τοῖς τριγώνοις τὰς ἀπὸ τῶν γωνιῶν καθέτους ἐπὶ τὰς πλαγίας καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτειν· ὅσα τε μήτε εἰς πλῆθος ἔχει διήκουσαν τὴν γνῶσιν μήτε αὖ γλαφυρόν τι προφαίνει καὶ χαρίεν, ταῦτα καὶ τῆς τῶν στοιχειωδῶν ἔξω πίπτειν δυνάμεως.* (Procl. p. 21.)

4) Conf. locum ex Proclo p. 292. §. 15.

5) Hujus Aristaei quinque alios libros *τόπων στερεῶν* descripsit Papp. in praef. ad lib. VII.

6) Ne elementorum quidem numerum exhibet Euclides, si ea, quae jam demonstrata sunt, in memoriam revocat, sed verba theorematis ipsa adhibet. In Hypsiclis libris vero elementorum numerus saepius indicatur ut XIV. 1. *φανερὸν δὴ ἐκ τῶν ἐν τῷ τρισκαιδεκάτῳ βιβλίῳ θεωρημάτων.* XV. 5. in fine *ὡς ἐν τοῖς στοιχείοις συναποδέδεικται τοῦτο·* quae verba sola probare possunt, haec theoremata ab Euclide non esse.

7) Conf. Praefat. ad Euclidis editionem Oxoniensem.

8) In codice quodem Mediceo Florentiae, secundum Bandinium titulus libri XIV. est: *Ὑψικλέους τὸ εἰς τὸν Εὐκλείδην ἀναφερόμενον.* Similem titulum Codex Monacensis ex saeculo decimo (N. 427 teste Hardtio) habet. *Εἰς Εὐκλείδην ἀναφερόμενον ιδ ὑψικλέα.* (sine dubio pro *Ὑψικλέους.*)

9) Isidori discipulum se ipse indicat XV, 7. *Ἰσίδωρος ὁ ἡμέτερος μέγας διδάσκαλος.* Post Proclum ergo vixit Hypsicles; fuit enim Isidorus, qui Justiniano imperante floruit, et Alexandriam Athenis

se contulit, Marini, Marinus Procli discipulus. (Phot. bibl. Cod. 242. p. 338. ed. Beck.)

10) In bibliotheca Bodleiana exstat Versio arabica tredecim librorum Euclidis per Isaac Ibn Honein; posteriores, qui Hypsicli Ascalonitae tribuuntur arabice vertit Costu Ibn Lucae.

11) Sin teneri (princeps) philosophia videbitur et mathematicis delectari, obsidebunt ostium aulae pleni Platonis homines et ne janitoribus quidem Archimedes, Euclides, Hypsicles ignoti fuerint. Theoph. instit. reg. 19.

12) Pappum et Heronem commentarios ad elementa conscripsisse, ex Procli commentario conjicere licet pag. **111.** ubi haec leguntur ad I. 47. *τῆς δὲ τοῦ στοιχειώτου ἀποδείξεως οὔσης φανερᾶς οὐδὲν ἡγοῦμαι δεῖν προσθεῖναι περιττὸν, ἀλλὰ ἀρκεῖσθαι τοῖς γεγραμμένοις, ἐπεὶ δὲ ὅσοι προσέθηκάν τι* (*προσέθεσαντι* Bas.) *πλέον ὡς περὶ Ἥρωνα καὶ Πάππον,* (h. e. Hero et Pappus) *ἠναγκάσθησαν προσλαβεῖν τι τῶν ἐν τῷ ἕκτῳ δεδειγμένων.*

13) Procl. p. 95. *ὁ Ἱεραπολίτης Αἰνείας ὁ τὴν ἐπιτομὴν γράψας τῶν στοιχείων.*

14) Aliter apud Hardt. in bibl. Monac. IV. 249 scribat. „Proclus Diad. Philos. A. C. 518 vel 19 plusquam septuagenarius obiit."

15) *Ὅτι δὲ καὶ ἡ Εὐκλείδου στοιχείωσις ἔχει τὰ μὲν προβλήματα τὰ δὲ θεωρήματα φανερὸν ἔσται τοῦτο διὰ τῶν καθ' ἕκαστον, καὶ αὐτοῦ προστεθέντος ἐπὶ τέλει τῶν δεικνυμένων ὅπου μὲν τὸ ὅπερ ἔδει ποιῆσαι, ὅπου δὲ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.*

16) ad lib. I. axiom. ult. pag. 55. ad I. 5. pag. 67. ad lib. I. 47. pag. 111.

17) Quam multa Proclus perlegerit quamque rationem in opere conficiendo inierit ex ipso discas. *Ἀναλαβόντες ἐπιβραχὺ* (in locupletissimo copiosissimoque opere!) *τὴν* (*ἐπιβολὴν*) *τῶν θεωρημάτων καὶ προβλημάτων λόγων· καὶ περὶ διαφορᾶς αὐτῶν καὶ τῶν ἑκατέρου μερῶν καὶ τῶν ἐν αὐτοῖς διαιρέσεων ἐπὶ τὴν ἐξήγησιν τραπώμεθα τῶν δεικνυμένων ὑπὸ τοῦ Στοιχειωτοῦ, τὰ μὲν γλαφυρώτερα τῶν εἰς ταῦτα γεγραμμένων τοῖς παλαιοῖς ἀναλεγόμενοι καὶ τὴν ἀπέραντον αὐτῶν πολυλογίαν συντέμνοντες, τὰ δὲ τεχνικώτερα καὶ μεθόδων ἐπιστημονικῶν ἐχόμενα παραδίδοντες, τῇ τῶν πραγμάτων ἐπεξεργασίᾳ πλέον ἀπονέμοντες ἢ τῇ ποικιλίᾳ τῶν πτώσεων καὶ λημμάτων, οἷς ὡς τὸ πολὺ, νεαροπρεπῶς* (fortasse legendum *νεαροπρεπεῖς*) *ἐπιτρεχόντας ὁρῶμεν.* Cui haec legenti non Eutocii in mentem venit anxia cura omnes casus enumerantis in commentariis suis.

18) Alexander (Aphrodisiensis) qui aliquot saecula ante Theonem vixit, eam quae quinta est decimi libri citat pro quarta pag. 87. commentariorum in priora Aristotolis, ut necesse sit, aliquam ex praecedentibus, quartem uti reor, qua sine magno incommodo

sane carere potuissemus, suo tempore ab elementorum libro abfuisse vel saltem cum tertia coaluisse. — Sic Savilius in praelect. pag. 7. et seq.

19) Cod. CIII. in bibl. Caesar. Vindeb. habet ἐκ τῆς Θ· ἐκδόσεως. Cod. Florentini duo ἀπὸ συνουσιῶν τοῦ Θ. Edit. Bas. ἐκ τῶν Θ· συνουσιῶν. cf. etiam quae supra annotavimus.

20) Quod P. Ramum in praefatione Arithmeticae (Paris 1555.) arbitratum esse videmus, qui Euclidis theoremata de numeris a Theone male composita, ut putat, pro arbitrio suo invertens, veram Euclide dignam numerorum theoriam invenisse sibi videtur.

21) Homines stulti et perridiculi, inquit Savilius, quasi ullus unquam artifex suas edi voluerit conclusiones, nullis adjectis probationibus. Praef. ad ed. Ox.

22) Cave omnia, quae falsa et Euclide minus digna videantur, Theoni adscribas. Recte enim Gregorius in praefatione: „Sunt „vero ex his quaedam, quae Theonem non sapiunt; sed a sciolis qui„busdam conscriptae sunt; sunt et lemmata et corollaria quaedam „in Elem. 10. quae ab ageometris subjuncta sunt.“

Berolini, typis Haynianis.

[illegible]

Loci emendandi.

Pag.	3.	lin.	13.	Πιτήσθω
-	5.	-	6.	εὐθεία
-	22.	-	29.	συνέσταται
-	31.	-	6.	τοῦ
-	32.	-	20.	desunt verba ὅπερ ἔδει δεῖξαι.
-	42.	-	23.	ἄρα deest post alterum *ZA*.
-	43.	-	23.	τῶν
-	44.	-	9.	ab initio *AA*
-	45.	-	7.	τρίγωνοις
-	51.	-	6.	ab initio *AΓ ΓB*
-	62.	-	22.	ὀξυγωνίοις
-	67.	-	22.	*ΔAE*
-	77.	-	2.	ἐφάπτωνται
-	96.	-	32.	γωνία
-	100.	-	16	τοῦ τε
-	104.	-	3.	μὴ
-	121.	-	20.	ις'
-	130.	-	32.	εἰλήφθω
-	132.	-	2.	*Γ* ἴσον τό *BE*
-	155.	-	8.	διἴσου
-	174.	-	4.	*HΘA*.
-	177.	-	27.	τῇ *HΘ*
-	180.	-	11.	*ABΓΔ EH*
-	185.	-	24.	abinitio *ΥΦX*
-	193.	-	22.	ἄρτιον ἀριθμὸν)
-	198.	-	2.	τὸν *Δ*
-	204.	-	12.	ὁ *AB*
-	206.	-	4.	τούς *B Δ*
-	207.	-	18.	εἰς τὰς
-	218.	-	6.	*Γ Δ* καὶ οἱ *E Z*
-	296.	-	16.	communes
-	300.	-	33.	ἐπωνόμασαν
-	302.	-	4.	rectae.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

EUCLIDIS ELEMENTA

EX OPTIMIS LIBRIS

IN USUM TIRONUM

GRAECE EDITA

AB

ERNESTO FERDINANDO AUGUST,
GYMNASII COLONIENSIS AD SPREAM RECTORE.

PARS SECUNDA,

QUAE DECIMUM ET SEQUENTES CONTINET ELEMENTORUM LIBROS CUM TRIBUS APPENDICIBUS ET SEX TABULIS LITHOGRAPHICIS.

BEROLINI, MDCCCXXIX.
IMPENSIS T. TRAUTWEINII.
LONDINI, APUD TREUTTEL ET WÜRZ, TREUTTEL FILIUM ET RICHTER.
PARISIIS, APUD TREUTTEL ET WÜRZ.

Cum ante hos tres annos priorem Euclidis elementorum partem rerum mathematicarum studiosis traderem, sperabam, fore ut breviore temporis intervallo haec altera illam sequeretur. Novo autem suscepto publico munere auctisque inde curis atque negotiis, fieri non potuit, quin diminuerentur tempora illa subcisiva, quae sola his studiis possunt consecrari. Serius igitur in lucem prodit hic secundus elementorum tomus, sed eadem qua prior diligentia elaboratus. Omnes addidi in appendicibus sexta et septima varias codicum editionumque lectiones, ut, quod graecum textum attinet, haec mea editio omnibus satisfaceret lectoribus totumque contineret apparatum, quem dicunt, criticum. Multae quidem lectionum varietates quae notentur dignae non videntur; sed codicum editionumque inter se similitudinem et quasi cognationem perscrutanti maximi interdum momenti sunt ea, quae nonnisi argumentum ipsum spectantes parvi facere solent. Cum autem lectorum hujus operis majorem partem mathematicos, minorem criticos fore exspectarem, utrisque ut satisfacerem, nihil quidem minutarum istarum rerum plane omisi; sed ne asteriscis et uncis et notis marginalibus nimium distraherentur lectorum oculi, non singulis plagulis sed toti operi eas subnectere malui.

Quamquam vero magna laudabilique typothetae sedulitate factum est, ut quam minimo spatio haec adnotationes criticae imprimerentur, ita tamen plagularum numerum crescere vidi, ut indicem in praefatione tomi prioris promissum huic tomo adjungere non possem. Quamobrem tertium Euclidis operum tomum adjicere statui, qui Data, Phaenomena, Optica, Catoptrica, Regulam canonis, ceteraque continebit opuscula, quae quamvis in editione Oxonia conjuncta, novam tamen editoris operam quasi flagitare mihi videntur. Impune enim, ut uno tantum exemplo utar, usque ad nostra tempora illuditur a Savilio (ed. Ox. p. 649.) Catoptricorum quisquis est scriptor, qui non demonstratione absurda, ut ille perhibet, sed figura usus est a Saviliana diversa, eaque meliore, rei ipsi aptiore. Huic tertio tomo, qui separatim venibit, indicem omnium vocabulorum mathematicorum, quae apud Euclidem et apud Proclum inveniuntur, addam, finemque exoptatum, operi abhinc nono anno suscepto, favente Deo brevi tempore imponam.

Scripsi Berolini Calendis Octobribus
anni 1829.

August.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ.

Ὅροι.

α΄. Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ 1.
μέτρῳ μετρούμενα.

β΄. Ἀσύμμετρα δὲ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν 2.
μέτρον γενέσθαι.

γ΄. Εὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροί εἰσιν, ὅταν 3.
τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα τῷ αὐτῷ χωρίῳ μετρῆται.

δ΄. Ἀσύμμετροι δὲ, ὅταν τοῖς ἀπ᾽ αὐτῶν τε- 4.
τραγώνοις μηδὲν ἐνδέχεται χωρίον κοινὸν μέτρον γε-
νέσθαι.

ε΄. Τούτων ὑποκειμένων δείκνυται ὅτι τῇ προτε- 5.
θείσῃ εὐθείᾳ ὑπάρχουσιν εὐθεῖαι πλήθει ἄπειροι
σύμμετροί τε καὶ ἀσύμμετροι, αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ
δὲ καὶ δυνάμει· καλείσθω οὖν ἡ μὲν προτεθεῖσα
εὐθεῖα ῥητή.

ϛ΄. Καὶ αἱ ταύτῃ σύμμετροι, εἴτε μήκει καὶ δυ- 6.
νάμει, εἴτε δυνάμει μόνον, ῥηταί.

ζ΄. Αἱ δὲ ταύτῃ ἀσύμμετροι ἄλογοι καλείσθω- 7.
σαν.

η΄. Καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς προτεθείσης εὐθείας τε- 8.
τράγωνον ῥητόν.

θ΄. Καὶ τὰ τούτῳ σύμμετρα ῥητά. 9.

ι΄. Τὰ δὲ τούτῳ ἀσύμμετρα ἄλογα καλείσθω. 10.

ια'. Καὶ αἱ δυνάμεναι αὐτὰ ἄλογοι· εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραί· εἰ δὲ ἕτερά τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι. 11

Πρότασις α'.

Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται· λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους. 1.

Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ ἀπὸ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους. Fig.

Τὸ γὰρ Γ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. Πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον, καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ ΖΗ ΗΕ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν.

Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ ΚΘ ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ ΖΗ ΗΕ· καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσους τὸ ΕΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ, τοῦ

δὲ ΘΑ μεῖζον ἡμίσους ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. Ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν. Ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ.

Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων 2.
ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Δύο γὰρ μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων τῶν ΑΒ ΓΔ, Fig. 2.
καὶ ὄντος ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ, ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΔΖ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε. Γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΔΖ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει. Ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἐκκειμένων ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. 3.

Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ· δεῖ δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν. Fig. 3.

Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ. Εἰ μὲν οὖν τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστὶ, καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον· μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ· ἀνθυφαιρουμένου ἄρα τοῦ ἐλάσσονος ἀεὶ ἀπὸ τοῦ μείζονος, τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ ΓΔ· καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ, τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω.

Ἐπεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ. Ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΔΕ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τὰ ΑΒ ΓΔ μετρεῖ· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστί. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ ΓΔ. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον

τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ ΓΔ μεγέθη μετρήσει· τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστί.

Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τῶν ΑΒ ΓΔ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὕρηται τὸ ΑΖ, ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος δύο μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

Πρότασις δ'.

Τριῶν μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, 4.
τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Ἔστω τὰ δοθέντα τρία μεγέθη σύμμετρα τὰ Α Β Fig. 4.
Γ· δεῖ δὴ τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ δύο τῶν Α Β τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Δ· τὸ δὴ Δ τὸ Γ ἤτοι μετρεῖ ἢ οὐ μετρεῖ. Μετρείτω πρότερον. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὸ Γ μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ τὰ Α Β· τὸ Δ ἄρα τὰ Α Β Γ μετρεῖ· τὸ Δ ἄρα τῶν Α Β Γ κοινὸν μέτρον ἐστί. Καὶ φανερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, μεῖζον γὰρ τοῦ Δ μεγέθους τὰ Α Β οὐ μετρεῖ.

Μὴ μετρείτω δὴ τὸ Δ τὸ Γ. Λέγω πρῶτον ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ Γ Δ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α Β Γ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος, ὃ δηλαδὴ καὶ τὰ Α Β μετρήσει· ὥςτε καὶ τὸ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον τὸ Δ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· ὥςτε τὸ εἰρημένον μέγεθος μετρήσει τὰ Γ Δ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Γ Δ. Εἰλήφθω οὖν αὐτῶν τὸ μέγιστον

κοινὸν μέτρον, καὶ ἔστω τὸ Ε. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ Δ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ Δ τὰ Α Β μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὰ Α Β μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ. Τὸ Ε ἄρα τὰ Α Β Γ μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α Β Γ κοινόν ἐστι μέτρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέγιστον. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι τοῦ Ε μεῖζον μέγεθος τὸ Ζ, καὶ μετρείτω τὰ Α Β Γ. Καὶ ἐπεὶ τὸ Ζ τὰ Α Β Γ μετρεῖ, καὶ τὰ Α Β μετρήσει· καὶ τὸ τῶν Α Β ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει. Τὸ δὲ τῶν Α Β μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Δ· τὸ Ζ ἄρα τὸ Δ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Γ· τὸ Ζ ἄρα τὰ Γ Δ μετρεῖ· καὶ τὸ τῶν Γ Δ ἄρα μέγιστον κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ Ζ. Τὸ δὲ τῶν Γ Δ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστὶ τὸ Ε· τὸ Ζ ἄρα τὸ Ε μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μεῖζόν τι τοῦ Ε μεγέθους μέγεθος τὰ Α Β Γ μεγέθη μετρεῖ· τὸ Ε ἄρα τῶν Α Β Γ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν.

Τριῶν ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων, τῶν Α Β Γ, τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον, τὸ Ε, εὕρηται· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν μέγεθος τρία μεγέθη μετρῇ, καὶ τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον μετρήσει.

(Ὁμοίως δὲ καὶ ἐπὶ πλειόνων τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ληφθήσεται, καὶ τὸ πόρισμα προχωρήσει.)

Πρότασις ε.

Τὰ σύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. 5.

Ἔστω σύμμετρα μεγέθη τὰ Α Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Fig. 5

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ Α Β, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Γ. Καὶ ὁσά-

κις τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Δ ἀριθμῷ, ὁσάκις δὲ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ, τοσαῦται μονάδες ἔστωσαν ἐν τῷ Ε.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Γ τὸ Α μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Δ μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Δ μετρεῖ ἀριθμὸν, καὶ τὸ Γ μέγεθος τὸ Α· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Α, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ Γ τὸ Β μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Ε μονάδας, μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Ε κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας· ἰσάκις ἄρα ἡ μονὰς τὸν Ε μετρεῖ, καὶ τὸ Γ τὸ Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε.

Τὰ ἄρα σύμμετρα μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη. 6

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς ὁ Δ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ε· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστὶ τὰ Α Β μεγέθη. Fig. 6.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Δ μονάδες, εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Γ· ὅσαι δέ εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, ἐκ τοσούτων μεγεθῶν ἴσων τῷ Γ συγκείσθω τὸ Ζ.

Ἐπεὶ οὖν ὅσαι εἰσὶν ἐν τῷ Δ μονάδες τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ Α μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ἡ μονὰς τοῦ Δ, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ τὸ Γ

τοῦ Α· ἐστὶν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ. Μετρεῖ δὲ ἡ μονὰς τὸν Δ ἀριθμόν· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Γ τὸ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς τὸ Δ πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὴν μονάδα. Πάλιν, ἐπεὶ, ὅσαι εἰσιν ἐν τῷ Ε μονάδες, τοσαῦτά ἐστι καὶ ἐν τῷ Ζ μεγέθη ἴσα τῷ Γ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ἡ μονὰς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὴν μονάδα· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Ζ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· καὶ ὡς ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Ζ· τὸ Α ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν Β Ζ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστι τὸ Β τῷ Ζ. Μετρεῖ δὲ τὸ Γ τὸ Ζ, μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Β, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Α· τὸ Γ ἄρα τὰ Α Β μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(*Πόρισμα.*

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο ἀριθμοὶ, ὡς οἱ Δ Ε, καὶ εὐθεῖα, ὡς ἡ Α, δύνατόν ἐστι ποιῆσαι ὡς τὸν Δ ἀριθμὸν πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν, οὕτως τὴν εὐθεῖαν πρὸς εὐθεῖαν. Ἐὰν δὲ καὶ τῶν Α Ζ μέση ἀνάλογον ληφθῇ, ὡς ἡ Η, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η, τουτ' ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον. Ἀλλ' ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ζ, οὕτως ἐστὶν ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμόν· γέγονεν ἄρα καὶ ὡς ὁ Δ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Ε ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εὐθείας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Η εὐθείας.)

Πρότασις ζ.

7. Τὰ ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Fig. 7. Ἔστω ἀσύμμετρα μεγέθη τὰ Α Β· λέγω ὅτι τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρον ἔσται τὸ Α τῷ Β. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν.

Τὰ ἄρα ἀσύμμετρα μεγέθη πρὸς ἄλληλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

8. Ἐὰν δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχῃ, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Fig. 8. Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρά ἐστὶ τὰ Α Β μεγέθη.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ Α Β μεγέθη.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ... καὶ τά ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ.

9. Τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχοντα, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν καὶ τὰς πλευρὰς ἕξει

μήκει συμμέτρους· τὰ δὲ ἀπὸ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον οὐκ ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ τὰ τετράγωνα τὰ πρὸς ἄλληλα λόγον μὴ ἔχοντα, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν οὐδὲ τὰς πλευρὰς ἕξει μήκει συμμέτρους.

Ἔστωσαν γὰρ αἱ Α Β μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον λόγον ἔχει, ὅνπερ τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Fig. 9

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ. Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Δ ἀριθμόν, ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον· τὰ γὰρ ὅμοια σχήματα ἐν διπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τοῦ δὲ τοῦ Γ ἀριθμοῦ πρὸς τὸν Δ ἀριθμὸν λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον, δύο γὰρ τετραγώνων ἀριθμῶν εἷς μέσος ἀνάλογόν ἐστιν ἀριθμός, καὶ ὁ τετράγωνος πρὸς τὸν τετράγωνον ἀριθμὸν διπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ πλευρὰ πρὸς τὴν πλευράν· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β τετράγωνον, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Γ τετράγωνος πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ· ἀλλὰ ὁ μὲν τοῦ ἀπὸ τῆς Α τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τῆς Α πρὸς τὴν Β λόγου, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τοῦ Γ τετραγώνου πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Δ τετράγωνον λόγος διπλασίων ἐστὶ τοῦ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγου· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ἡ Α ἄρα πρὸς τὴν Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἀσύμμετρος ἔστω ἡ Α τῇ Β μήκει· λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Εἰ γὰρ ἔχει τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, σύμμετρος ἔσται ἡ Α τῇ Β μήκει. Οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Πάλιν δὴ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρος ἡ Α τῇ Β μήκει, ἕξει τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Οὐκ ἔχει δέ· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ἐκ τῶν δεδειγμένων ἐστι, ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει σύμμετροι οὐ πάντως καὶ μήκει, καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι, οὐ πάντως καὶ δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

(Λῆμμα.

Δέδεικται ἐν τοῖς ἀριθμητικοῖς, ὅτι οἱ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ὅτι ἐὰν δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους λόγον ἔχωσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι. Καὶ δῆλον ἐκ τούτων, ὅτι οἱ μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἀριθμοὶ, τοῦτ᾽ ἔστιν οἱ μὴ ἀνάλογον ἔχοντες τὰς πλευρὰς, πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Εἰ γὰρ ἕξουσιν, ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἔσονται, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οἱ ἄρα μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι πρὸς ἀλλήλους λόγον οὐκ ἔχουσιν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.)

Πρότασις ι (ια).

Τῇ προτεθείσῃ εὐθείᾳ προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει. 10. (11.)

Ἔστω ἡ προτεθεῖσα εὐθεῖα ἡ Α· δεῖ δὴ τῇ Α προσευρεῖν δύο εὐθείας ἀσυμμέτρους, τὴν μὲν μήκει μόνον, τὴν δὲ καὶ δυνάμει. Fig. 10.

Ἐκκείσθωσαν γὰρ δύο ἀριθμοὶ οἱ Β Γ, πρὸς ἀλλήλους λόγον μὴ ἔχοντες, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τοῦτ᾽ ἔστι μὴ ὅμοιοι ἐπίπεδοι, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ

τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ τετράγωνον· (ἐμάθομεν γάρ·) σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Δ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Β πρὸς τὸν Γ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Δ μήκει. Εἰλήφθω τῶν Α Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Δ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ἀσύμμετρος δέ ἐστιν ἡ Α τῇ Δ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς Ε τετραγώνῳ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ Ε δυνάμει.

Τῇ ἄρα προτεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ Α προσεύρηνται δύο εὐθεῖαι ἀσύμμετροι αἱ Δ Ε· μήκει μὲν μόνον ἡ Δ, δυνάμει δὲ καὶ μήκει δηλαδὴ ἡ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιά (ι).

Ἐὰν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, τὸ δὲ 11.
πρῶτον τῷ δευτέρῳ σύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρί- (10.)
τον τῷ τετάρτῳ σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ πρῶτον τῷ δευτέρῳ ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὸ τρίτον τῷ τετάρτῳ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστωσαν τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον, τὰ Α Β Γ Fig. 11.
Δ, ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ, τὸ Α δὲ τῷ Β σύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ σύμμετρον ἔσται.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· καὶ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρον ἔστω· λέγω ὅτι καὶ τὸ Γ τῷ Δ ἀσύμμετρον ἔσται. Ἐπεὶ γὰρ

ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Β, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Δ· οὐδὲ τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Γ τῷ Δ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρα μεγέθη ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ.

Τὰ τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα. 12.

Ἑκάτερον γὰρ τῶν Α Β τῷ Γ ἔστω σύμμετρον. Fig. 1
λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἐστὶ σύμμετρον.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Γ, τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Γ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Δ πρὸς τὸν Ε. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ, τὸ Γ ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Καὶ λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν, τοῦ τε, ὃν ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, καὶ ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, εἰλήφθωσαν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις, οἱ Θ Κ Λ· ὥςτε εἶναι ὡς μὲν τὸν Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως τὸν Θ πρὸς τὸν Κ, ὡς δὲ τὸν Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως τὸν Κ πρὸς τὸν Λ.

Ἐπεὶ οὖν ἐστὶν ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἀλλ' ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ· καὶ ὡς ἄρα τὸ Γ πρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Κ πρὸς τὸν Λ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ Α πρὸς τὸ Γ, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Κ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ Α τρὸς τὸ Β, οὕτως ὁ Θ πρὸς τὸν Λ· τὸ Α ἄρα πρὸς τὸ Β λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ Θ

πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ Α τῷ Β.

Τὰ ἄρα τῷ αὐτῷ μεγέθει σύμμετρα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ'.

13. Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη, καὶ τὸ μὲν σύμμετρον ᾖ τῷ αὐτῷ, τὸ δὲ ἕτερον ἀσύμμετρον· ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη.

Ἔστω γὰρ δύο μεγέθη τὰ Α Β, ἄλλο δὲ τὸ Γ, Fig. 13. καὶ τὸ μὲν Α τῷ Γ σύμμετρον ἔστω, τὸ δὲ Β τῷ Γ ἀσύμμετρον· λέγω ὅτι καὶ τὸ Α τῷ Β ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ τῷ Α· καὶ τὸ Γ ἄρα τῷ Β σύμμετρόν ἐστιν· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται.

Πρότασις ιδ'.

14. Ἐὰν ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν μεγέθει τινὶ ἀσύμμετρον ᾖ· καὶ τὸ λοιπὸν τῷ αὐτῷ ἀσύμμετρον ἔσται.

Ἔστω δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ Α Β, τὸ δὲ ἕτερον αὐτῶν τὸ Α ἄλλῳ τινὶ τῷ Γ ἀσύμμετρον ἔστω· Fig. 14. λέγω ὅτι καὶ τὸ λοιπὸν τὸ Β τῷ Γ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρον τὸ Β τῷ Γ, ἀλλὰ καὶ τὸ Α τῷ Β σύμμετρόν ἐστι· καὶ τὸ Α ἄρα τῷ Γ σύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ καὶ ἀσύμμετρον, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρόν ἐστι τὸ Β τῷ Γ· ἀσύμμετρον ἄρα.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο μεγέθη σύμμετρα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Λῆμμα.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων, εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο ἄνισοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ εὑρεῖν, τίνι μεῖζον δύναται ἡ ΑΒ τῆς Γ.

Γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον, τὸ ΑΔΒ, καὶ εἰς αὐτὸ ἐνηρμόσθω τῇ Γ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ. Φανερὸν δὴ ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ γωνία, καὶ ὅτι ἡ ΑΒ τῆς ΑΔ, τοῦτ' ἔστι τῆς Γ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ.

Ὁμοίως δὲ καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, ἡ δυναμένη τὰ ἀπ' αὐτῶν εὑρίσκεται οὕτως.

Ἔστωσαν αἱ δύο εὐθεῖαι δοθεῖσαι αἱ ΑΔ ΔΒ· καὶ δέον ἔστω εὑρεῖν τὴν δυναμένην τὰ ἀπ' αὐτῶν. Κείσθωσαν γὰρ, ὥςτε ὀρθὴν γωνίαν περιέχειν, τὴν ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ· φανερὸν πάλιν, ὅτι ἡ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ.)

Πρότασις ιε.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, δύνηται δὲ ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ πρώτη τῆς δευτέρας μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ τρίτη τῆς τετάρτης μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. 15.

Ἔστωσαν δὴ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α Β Γ Δ, ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, καὶ ἡ μὲν Α τῆς Β μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ε, ἡ δὲ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ τῆς Ζ· λέγω ὅτι εἴτε σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι Fig. 15.

ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ε Β, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Γ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν Ζ Δ· ἔστιν ἄρα ὡς τὰ ἀπὸ τῶν Ε Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν Ζ Δ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ζ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ Ε πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Ζ πρὸς τὴν Δ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ζ. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· διΐσου ἄρα ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Ε, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ζ· εἴτε οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ· εἴτε ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Ε, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ Γ τῇ Ζ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ΄.

Ἐὰν δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ, καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν σύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν σύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη σύμμετρα ἔσται. 16.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη σύμμετρα, τὰ ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΓΑ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ σύμμετρον. Fig. 16.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ ΒΓ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ· τὸ Δ ἄρα τὰ

ΑΒ ΒΓ καὶ τὸ ΑΓ μετρεῖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ἔστω σύμμετρον· ἔστω δὴ τῷ ΑΒ· λέγω δὴ ὅτι καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ σύμμετρά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρά ἐστι τὰ ΑΓ ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ ΒΓ μετρήσει· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΒΓ.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη σύμμετρα συντεθῇ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ, 17.
καὶ τὸ ὅλον ἑκατέρῳ αὐτῶν ἀσύμμετρον ἔσται· κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται.

Συγκείσθω γὰρ δύο μεγέθη ἀσύμμετρα, τὰ ΑΒ Fig. 17
ΒΓ· λέγω ὅτι καὶ ὅλον τὸ ΑΓ ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ἀσύμμετρα τὰ ΓΑ ΑΒ, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, εἰ δυνατὸν, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΓΑ ΑΒ μετρεῖ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΑΒ ΒΓ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΒΓ· ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΓΑ ΑΒ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ ΑΒ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὰ ΑΓ ΓΒ ἀσύμμετρά ἐστι· τὸ ΑΓ ἄρα ἑκατέρῳ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστιν.

Ἀλλὰ δὴ τὸ ΑΓ ἑνὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρον ἔστω, καὶ πρότερον τῷ ΑΒ· λέγω ὅτι καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ

ἀσύμμετρά ἐστιν. Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. Μετρείτω, καὶ ἔστω τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Δ τὰ ΑΒ ΒΓ μετρεῖ, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ μετρήσει. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΑΒ· τὸ Δ ἄρα τὰ ΓΑ ΑΒ μετρεῖ· σύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΑ ΑΒ. Ὑπέκειτο δὲ καὶ ἀσύμμετρα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ ΒΓ μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ ΒΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι εἰ τὸ ΑΓ τῷ λοιπῷ τῷ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι, καὶ τὰ ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρα ἔσται.

Ἐὰν ἄρα δύο μεγέθη ἀσύμμετρα συντεθῇ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἐὰν παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ παραλληλόγραμμον, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· τὸ παραβληθὲν ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ἐκ τῆς παραβολῆς γενομένων τμημάτων τῆς εὐθείας.

Παρὰ γάρ τινα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΔ, ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τῷ ΔΒ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Καὶ ἔστιν αὐτόθεν φανερόν· ἐπεὶ γὰρ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ, καὶ ἔστι τὸ ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΔ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα παρά τινα εὐθεῖαν παραβληθῇ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιή.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τε- 18.
τάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ

εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς Α, ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ, σύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Fig. 18

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΕΖ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ ἴση ἐστὶ τῇ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΓ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ περιεχόμενον ὀρθογώνιον μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΔ τετραγώνου ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ· καὶ τὰ τετραπλάσια· τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ μετὰ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ τετράκις ἀπὸ τῆς ΕΓ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ τῷ μὲν τετραπλασίῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον, τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι ἡ ΖΔ τῆς ΔΕ· τῷ δὲ τετραπλασίῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον, διπλασίων γάρ ἐστι πάλιν ἡ ΒΓ τῆς ΕΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν Α ΔΖ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥςτε τὸ ἀπὸ τῆς

ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς Α μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον ὅτι καὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ. Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΓΔ ταῖς ΓΔ ΒΖ ἐστὶ σύμμετρος μήκει, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΒΖ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα σύμμετρός ἐστι ταῖς ΒΖ ΓΔ μήκει· ὥςτε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἀλλὰ δὴ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ. Δεικτέον ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δύναται δὲ ἡ ΒΓ μεῖζον τῆς Α τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ μήκει· ὥςτε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ ΔΓ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ ΔΓ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΓ μήκει· ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΒΖ τῇ ΔΓ· ὥςτε καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΓΔ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ διελόντι ἄρα ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἐστὶ σύμμετρος μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τε- 19.
τάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει· ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖ-

ζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἐὰν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ· εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ μήκει.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ Α ΒΓ, ὧν μείζων ἡ ΒΓ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ, ἀσύμμετρος δὲ ἔστω ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει· λέγω ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Fig. 19

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων τῷ πρότερον, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Δεικτέον οὖν ὅτι καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΔΖ μήκει. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΔΓ μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΔΓ σύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ ΔΓ· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρός ἐστι συναμφοτέραις ταῖς ΒΖ ΔΓ· ὥςτε καὶ λοιπῇ τῇ ΖΔ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ μήκει, καὶ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ· ἡ ΒΓ ἄρα τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Δυνάσθω δὴ πάλιν ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ τοῦ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ. Δεικτέον ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ μήκει.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ὁμοίως δείξομεν ὅτι ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΔ. Ἀλλ᾽ ἡ ΒΓ τῆς Α μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ

μήκει· ὥςτε καὶ λοιπῇ συναμφοτέρῳ τῇ ΒΖ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ. Ἀλλὰ συναμφότερος ἡ ΒΖ ΔΓ τῇ ΔΓ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· ὥςτε καὶ διελόντι ἡ ΒΔ τῇ ΔΓ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ΄.

20. Τὸ ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ῥητόν ἐστιν.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ῥητόν ἐστι τὸ ΑΓ. Fig. 20.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δέ ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ· σύμμετρος δέ ἐστιν ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΓ.

Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν μήκει συμμέτρων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κα΄.

21. Ἐὰν ῥητὸν χωρίον παρὰ ῥητὴν παραβληθῇ· πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ σύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει.

Ῥητὸν γὰρ χωρίον τὸ ΑΓ παρὰ ῥητὴν τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω, πλάτος ποιοῦν τὴν ΒΓ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει. Fig. 21

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Ῥητὸν δὲ καὶ τὸ ΑΓ·

σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΔΑ πρὸς τὸ ΑΓ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΑ, σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΓ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΒ μήκει.

Ἐὰν ἄρα ῥητὸν χωρίον παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ΄.

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέση. 22.

Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Fig 22.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ, τουτ᾽ ἔστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον ἀναγράφουσα, ἄλογός ἐστι.

(Τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι·) καλείσθω δὲ μέση.

Πρότασις κγ'.

Τὸ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον χωρίον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν, καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. 23.

Ἔστω μέση μὲν ἡ Α, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΒ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΒΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΒΔ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΔ· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ ΓΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει. Fig. 23.

Ἐπεὶ γὰρ μέση ἐστὶν ἡ Α, δύναται χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων. Δυνάσθω τὸ ΗΖ. Δύναται δὲ καὶ τὸ ΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΒ τῷ ΗΖ. Ἔστι δὲ αὐτῷ καὶ ἰσογώνιον, τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἑκατέρα αὐτῶν· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΕΗ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΖ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, ῥηταὶ γάρ εἰσι δυνάμει, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ σύμμετρόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΒ, ἴσα γάρ ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς Α· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΒ περιεχομένῳ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΒ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀσύμμετρος

ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΒ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΒ μήκει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κδ'.

Ἡ τῇ μέσῃ σύμμετρος μέση ἐστίν. 24.

Ἔστω μέση ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Fig. 24. Β· λέγω ὅτι καὶ ἡ Β μέση ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω χωρίον ὀρθογώνιον τὸ ΓΖ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΔ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΓ τῷ ΓΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΕΓ πρὸς τὸ ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ μήκει. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΕΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΓ μήκει· αἱ ΓΔ ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι, δυνάμει μόνον σύμμετροι. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογος· καλεῖται δὲ μέση· ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΖ δυναμένη μέση ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΖ ἡ Β· μέση ἄρα ἐστὶν ἡ Β.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τὸ τῷ μέσῳ χωρίῳ σύμμετρον μέσον ἐστίν. Δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν. (Ὡσαύτως δὲ τοῖς ἐπὶ τῶν ῥητῶν εἰρημένοις καὶ ἐπὶ τῶν μέσων ἐξακολουθεῖ, τὴν τῇ μέσῃ σύμμετρον λέγεσθαι μέσην.)

Πρότασις κέ.

Τὸ ὑπὸ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, μέσον ἐστίν. 25.

Ὑπὸ γὰρ μέσων μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ μέσον ἐστίν. Fig. 25.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ σύμμετρόν ἐστι. Μέσον δὲ τὸ ΔΑ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛʹ.

Τὸ ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον, ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. 26.

Ὑπὸ γὰρ μέσων δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ ΒΓ περιεχέσθω ὀρθογώνιον τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὸ ΑΓ ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. Fig. 26.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τὰ ΑΔ ΒΕ· μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ ΒΕ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΑΔ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΘΜ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΜΚ πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ, καὶ ἔτι τῷ ΒΕ ἴσον ὁμοίως παρὰ τὴν ΚΝ παραβεβλήσθω τὸ ΝΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶν αἱ ΖΘ ΘΚ ΚΛ. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΔ ΒΕ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΕ τῷ ΝΛ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκάτερον τῶν ΗΘ ΝΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΖΘ ΚΛ, καὶ

ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΔ τῷ ΒΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΗΘ τῷ ΝΛ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΚΛ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΚΛ μήκει· αἱ ΖΘ ΚΛ ἄρα ῥηταί εἰσι μήκει σύμμετροι· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ ΚΛ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΔ τῇ ΒΛ, ἡ δὲ ΞΒ τῇ ΒΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΔΛ πρὸς τὸ ΛΓ· ὡς δὲ ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΞ, οὕτως τὸ ΛΓ πρὸς τὸ ΓΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΛ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΛΓ πρὸς τὸ ΓΞ. Ἴσον δέ ἐστι τὸ μὲν ΛΔ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΛΓ τῷ ΜΚ, τὸ δὲ ΓΞ τῷ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΗΘ πρὸς τὸ ΜΚ, οὕτως τὸ ΜΚ πρὸς τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΘΚ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΖΘ ΚΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΚ. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΖΘ ΚΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστι τῇ ΘΜ, τοῦτ' ἔστι τῇ ΖΗ, μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΘΝ· εἰ δὲ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΖΗ μήκει, αἱ ΚΘ ΘΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΝ· τὸ ΘΝ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστίν. Ἴσον δὲ τὸ ΘΝ τῷ ΛΓ· τὸ ΛΓ ἄρα ἤτοι ῥητὸν ἢ μέσον ἐστί.

Τὸ ἄρα ὑπὸ μέσων δυνάμει μόνον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κζ.

Μέσον μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ. 27.

Εἰ γὰρ δυνατόν, μέσον τὸ ΑΒ μέσου τοῦ ΑΓ ὑπερεχέτω ῥητῷ τῷ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΖΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΑΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΖΗ· λοιπὸν Fig. 27.

ἄρα τὸ ΒΔ λοιπῷ τῷ ΚΘ ἐστὶν ἴσον. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΖΘ ἴσον, τὸ δὲ ΑΓ τῷ ΖΗ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΖΘ ΖΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΕΘ ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΚΘ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΚΘ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ, καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΘ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΕΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ τετράγωνα, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ, διπλάσιον γάρ ἐστιν αὐτοῦ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ· καὶ συναμφότερα ἄρα τά τε ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ, ἀσύμμετρά ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΕΗ ΗΘ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ· ἀλλὰ καὶ ῥητὴ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα μέσον μέσου ὑπερέχει ῥητῷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κή.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, ῥητὸν περιεχούσας. 28.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α Β, καὶ εἰλήφθω τῶν Α Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Fig. 28.

Καὶ ἐπεὶ αἱ Α Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Γ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Γ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, αἱ δὲ Α Β δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσι· καὶ αἱ Γ Δ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ· αἱ Γ Δ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ. Ἀλλὰ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Β· καὶ ὡς ἄρα ἡ Γ πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Δ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Γ Δ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι, αἱ Γ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κϑ'.

Μέσας εὑρεῖν δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας. 29.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α Β Γ, καὶ εἰλήφθω τῶν Α Β μέση ἀνάλογον ἡ Δ, καὶ γεγονέτω ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Fig. 29

Ἐπεὶ αἱ Α Β ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Δ, μέσον ἐστί· μέση ἄρα ἡ Δ. Καὶ ἐπεὶ αἱ Β Γ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· αἱ Δ Ε ἄρα σύμμετροι δυνάμει μόνον εἰσί. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε· αἱ Δ Ε ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν

Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ Β πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε. Ὡς δὲ ἡ Β πρὸς τὴν Δ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Α, καὶ ὡς ἄρα ἡ Δ πρὸς τὴν Α, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Ε· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Γ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Γ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε.

Εὕρηνται ἄρα μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι, αἱ Δ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(Λῆμμα ά.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥςτε καὶ τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν εἶναι τετράγωνον.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ ΒΓ, ἔστωσαν δὲ ἤτοι ἄρτιοι ἢ περιττοί. Καὶ ἐπεὶ ἐάν τε ἀπὸ ἀρτίου ἄρτιος ἀφαιρεθῇ, ἐάν τε ἀπὸ περιττοῦ περιττὸς, ὁ λοιπὸς ἄρτιός ἐστιν· ὁ λοιπὸς ἄρα ὁ ΑΓ ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω ὁ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἔστωσαν δὲ καὶ οἱ ΑΒ ΒΓ ἤτοι ὅμοιοι ἐπίπεδοι ἢ τετράγωνοι, οἳ καὶ αὐτοὶ ὅμοιοί εἰσιν ἐπίπεδοι· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΔΒ τετραγώνῳ. Καὶ ἔστι τετράγωνος ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἐπειδήπερ ἐδείθχη ὅτι ἐὰν δύο ὅμοιοι ἐπίπεδοι πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους ποιῶσί τινα, ὁ γενόμενος τετράγωνός ἐστιν· εὕρηνται ἄρα δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ, ὅ τε ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, οἳ συντεθέντες ποιοῦσι τὸν ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετράγωνον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Καὶ φανερὸν ὅτι εὕρηνται πάλιν δύο τετράγωνοι, ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὥςτε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν, τὸν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, εἶναι τετράγωνον, ὅταν οἱ ΑΒ ΒΓ ὅμοιοι ὦσιν ἐπίπεδοι. Ὅταν δὲ μὴ ὦσιν ὅμοιοι ἐπίπεδοι, εὕρηνται δύο τετράγω-

νοι, ὅ τε ἀπὸ τοῦ ΒΔ καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ, ὁ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, οὐκ ἔστι τετράγωνος.

Λῆμμα β.

Εὑρεῖν δύο τετραγώνους ἀριθμοὺς, ὥςτε τὸν ἐξ αὐτῶν συγκείμενον μὴ εἶναι τετράγωνον.

Ἔστω γὰρ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὡς ἔφαμεν, τετράγωνος, καὶ ἄρτιος ὁ ΓΑ, καὶ τετμήσθω ὁ ΓΑ δίχα κατὰ τὸ Δ· φανερὸν δὴ ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ τετραγώνου ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνῳ. Ἀφῃρήσθω μονὰς ἡ ΔΕ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἐλάσσων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΔ τετραγώνου. Λέγω οὖν ὅτι ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνος μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ οὐκ ἔσται τετράγωνος.

Εἰ γὰρ ἔσται τετράγωνος, ἤτοι ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ ἢ ἐλάσσων, οὐκέτι δὲ καὶ μείζων, ἵνα μήτε τμηθῇ ἡ μονὰς, μήτε ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΔ, ὅς ἐστιν ὁ ἀπὸ τοῦ ΔΒ, ἴσος ᾖ τῷ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, (μήτε ἐλάσσων αὐτῶν)· Ἔστω, εἰ δυνατόν, πρότερον ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, καὶ ἔστω τῆς ΔΕ μονάδος διπλασίων ὁ ΗΔ. Ἐπεὶ οὖν ὅλος ὁ ΑΓ ὅλου τοῦ ΓΔ ἐστὶ διπλασίων, ὧν ὁ ΑΗ τοῦ ΔΕ ἐστὶ διπλασίων· καὶ λοιπὸς ἄρα ὁ ΗΓ λοιποῦ τοῦ ΕΓ ἐστὶ διπλασίων· δίχα ἄρα τέτμηται ὁ ΗΓ τῷ Ε· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ. Ἀλλὰ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ὑπόκειται τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ τετραγώνῳ· ὁ ἄρα ἐκ τῶν ΗΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ. Καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, συνάγεται ὁ ΑΒ ἴσος τῷ ΗΒ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ

ἴσος

ἴσος ἐστὶ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ. Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ ΒΕ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΖ ἴσος, καὶ τοῦ ΔΖ διπλασίων κείσθω ὁ ΘΑ. Καὶ συναχθήσεται πάλιν διπλασίων ὁ ΘΓ τοῦ ΓΖ, ὥςτε καὶ τὸν ΓΘ δίχα τετμῆσθαι κατὰ τὸ Ζ· καὶ διὰ τοῦτο τὸν ἐκ τῶν ΘΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΖΓ ἴσον γενέσθαι τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΖ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ ΖΒ· ὥςτε καὶ ὁ ἐκ τῶν ΘΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΖ ἴσος ἔσται τῷ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ ἴσος ἐστὶ τῷ ἐλάττονι τοῦ ἀπὸ ΒΕ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τοῦ ΒΕ, οὐδὲ μείζονι αὐτοῦ· οὐκ ἄρα ὁ ἐκ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΓΕ τετράγωνός ἐστι. [Δυνατοῦ δὲ ὄντος καὶ κατὰ πλείονας τρόπους τὸ εἰρημένον ἐπιδεικνύναι, ἀρκείσθω ἡμῖν ὁ εἰρημένος, ἵνα μὴ μακροτέρας οὔσης τῆς πραγματείας ἐπιπλέον αὐτὴν μηκύνωμεν.])

Πρότασις λ'.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥςτε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. 30.

Ἐκκείσθω γάρ τις ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΔ ΔΕ, ὥςτε τὴν ὑπεροχὴν αὐτῶν, τὸν ΓΕ, μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τετράγωνον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ. Fig. 30.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, οὕτως ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ

ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς ὁ ΔΓ πρὸς ἀριθμὸν τὸν ΓΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΖ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΖ μήκει· αἱ ΒΑ ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ· ἡ ΑΒ ἄρα τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Εὕρηνται ἄρα δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΒΑ ΑΖ, ὥςτε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΑΖ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λά.

Εὑρεῖν δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους, ὥςτε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. 31.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΓΕ ΕΔ, ὥςτε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΓΔ μὴ εἶναι τετράγωνον, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ Fig. 3

ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΖ.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὡς ἐν τῷ πρὸ τούτου· ὅτι αἱ ΒΑ ΑΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΓ πρὸς τὸν ΓΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν ΔΕ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΖ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Αἱ ΑΒ ΑΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΑΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λβ.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμ- 32.
μέτρους, ῥητὸν περιεχούσας· ὥστε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμε- Fig. 32
τροι, αἱ Α Β, ὥστε τὴν Α, μείζονα οὖσαν, τῆς ἐλάσσονος τῆς Β μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· μέσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Γ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ, ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α

Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ· ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Γ Δ, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Γ τῇ Δ δυνάμει μόνον. Καὶ ἔστι μέση ἡ Γ· μέση ἄρα καὶ ἡ Δ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, ἡ δὲ Α τῆς Β μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Γ ἄρα τῆς Δ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι, αἱ Γ Δ, ῥητὸν περιέχουσαι, καὶ ἡ Γ τῆς Δ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν τῆς Β μεῖζον δύνηται ἡ Α τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Πρότασις λγ΄.

Εὑρεῖν δύο μέσας δυνάμει μόνον συμμέτρους, μέσον περιεχούσας· ὥςτε τὴν μείζονα τῆς ἐλάττονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. 33.

Ἐκκείσθωσαν τρεῖς ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Α Β Γ, ὥςτε τὴν Α τῆς Γ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· μέσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· καὶ ἡ Δ ἄρα μέση ἐστί. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β Γ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ, οὕτως ἡ Α Fig. 3

πρὸς τὴν Γ, ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Δ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν Β Γ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε· καὶ ὡς ἄρα ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε. Σύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Γ δυνάμει μόνον· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ Δ τῇ Ε δυνάμει μόνον. Μέση δὲ ἡ Δ· μέση ἄρα καὶ ἡ Ε. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Γ, οὕτως ἡ Δ πρὸς τὴν Ε, ἡ δὲ Α τῆς Γ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καὶ ἡ Δ ἄρα τῆς Ε μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε. Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ τῷ ὑπὸ τῶν Δ Ε, μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Β Γ· αἱ γὰρ Β Γ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν Δ Ε.

Εὕρηνται ἄρα δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ Δ Ε, μέσον περιέχουσαι· ὥςτε τὴν μείζονα τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ὁμοίως δὴ πάλιν δειχθήσεται καὶ τὸ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, ὅταν ἡ Α τῆς Γ μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ.

Λῆμμα.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ, ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΑ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, καὶ ἔτι τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ.

Καὶ πρῶτον ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἦκται ἡ ΑΔ, τὰ ΑΒΔ ΑΔΓ ἄρα τρίγωνα ὅμοιά ἐστι τῷ τε ὅλῳ τῷ ΑΒΓ καὶ ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΒ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ἐν ὀρθογωνίῳ τριγώνῳ ἀπὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τὴν βάσιν κάθετος ἀχθῇ, ἡ ἀχθεῖσα τῶν τῆς βάσεως τμημάτων μέση ἀνάλογόν ἐστιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Λέγω ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ. Ἐπεὶ γάρ, ὡς ἔφαμεν, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τῷ ΑΓΔ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἐὰν δὲ τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι, τὸ ὑπὸ τῶν ἄκρων ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ. (Ἢ καὶ ὅτι, ἐὰν ἀναγράψωμεν τὸ ΕΓ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον, καὶ συμπληρώσωμεν τὸ ΑΖ, ἴσον ἔσται τὸ ΕΓ τῷ ΑΖ, ἑκάτερον γὰρ αὐτῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ, τὸ δὲ ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΓ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ.)

Πρότασις λδʹ.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητόν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον. 34.

Ἐκκείσθωσαν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ὥςτε τὴν μείζονα τὴν ΑΒ τῆς ἐλάσσονος τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ τῷ ἀφ᾽ ὁποτέρας τῶν ΒΔ ΔΓ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΖΒ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΒ. Fig. 34.

Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ ΒΓ, καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ, τουτ᾽ ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας αὐτῆς, ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβέβληται παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ποιεῖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΖ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΒ· αἱ ΑΖ ΖΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ῥητή ἐστι, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥςτε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πάλιν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ὑπόκειται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ ἴσον· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΕ τῇ ΒΔ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ· ὥςτε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΕΖ· ὥςτε καὶ σύμμετρον. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΕΖ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΕΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΖ ΖΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν μέσον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λε.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. 35.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπ' αὐτῶν, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ ΑΔΒ ἡμικύκλιον, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΕ ἴσον παραλληλόγραμμον ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει· καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΔΒ. Fig. 35.

Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΖ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΖ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΖ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ· ὥστε καὶ σύμμετρον. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΓ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητόν ἐστιν.

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι, αἱ ΑΔ ΔΒ, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λϛ'.

Εὑρεῖν δύο εὐθείας δυνάμει ἀσυμμέτρους, ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν. 36.

Ἐκκείσθωσαν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, μέσον περιέχουσαι, ὥστε τὴν ΑΒ τῆς ΒΓ μεῖζον δύνασθαι τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ τὰ λοιπὰ γεγονέτω τοῖς ἐπάνω εἰρημένοις ὁμοίως. *Fig.* 36.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ μήκει, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΔΒ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΕ ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΔΖ· διπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΖΔ· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ· Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ μήκει· ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΖΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ἀσύμμετρον

ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ·

Εὕρηνται ἄρα δύο εὐθεῖαι, αἱ ΑΔ ΔΒ, δυνάμει ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις λζ.

Ἐὰν δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι 37.
συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμ- Fig. 37.
μετροι αἱ ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, δυνάμει γὰρ μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· αἱ γὰρ ΑΒ ΒΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ συνθέντι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥςτε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Πρότασις λη.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμ- 38.
μετροι συντεθῶσι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ

ὅλη ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ῥητὸν περιέχουσαι· λέγω ὅτι ὅλη ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 38.

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ συνθέντι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὑπόκεινται γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ ῥητὸν περιέχουσαι· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ· καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Πρότασις λθ'.

Ἐὰν δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσι, μέσον περιέχουσαι· ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα. 39.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, μέσον περιέχουσαι· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ. Fig. 39.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τοῖς τε ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ καὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, παραβεβλήσθω δὴ παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ μέση ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Μέσον δὲ ὑπόκειται καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΖΘ·

μέσον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΘ ΘΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΘ ΘΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. ἀσύμμετρον ἄρα ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΖ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΘ τῷ ΘΖ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΘΗ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ ῥηταί· αἱ ΔΘ ΘΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. ὥςτε ἡ ΔΗ ἄλογός ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστιν· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ χωρίον· καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΖ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Πρότασις μ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι 40. *συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ μείζων.*

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ- Fig. 40. *μετροι, αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.*

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστί. Τὸ δὲ

συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ὥςτε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥςτε καὶ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μείζων.

Πρότασις μα΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι 41.
συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι. καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμ- Fig. 41.
μετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι ἄλογός ἐστιν ἡ ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ὥςτε καὶ συνθέντι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Πρότασις μβ΄.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι 42.
συντεθῶσι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν·

ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄλογός ἐστι· καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι αἱ ΑΒ ΒΓ, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 42.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΔΕ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΔΖ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον τὸ ΗΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ ἴσον τῷ ΔΖ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΗΚ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΗΖ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΔΕ, μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΖ τῷ ΗΘ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΗ τῇ ΗΚ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἰσι ῥηταί· αἱ ΔΗ ΗΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΚ ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΕ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΘ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΔΘ ἡ ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ, καλείσθω δὲ δύο μέσα δυναμένη.

(Λῆμμα.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ᾽ ἑκατέρα τῶν Γ Δ, ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῆς

ΕΓ· τὰ Γ Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ· ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. ὥςτε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἐλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἀφῃρήσθω ἑκάτερα ἀπὸ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνου· λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ των ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.)

Πρότασις μγ΄.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα. 43.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται εἰς δύο ῥητὰς δυνάμει μόνον συμμέτρους. Fig. 43.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥςτε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ ῥητὰς εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΑΔ τῃ ΓΒ ἡ αὐτή· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, καὶ ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὰ αὐτὰ τμήματα τῇ κατὰ τὸ Γ διαιρέσει διαιρεθεῖσα καὶ κατὰ τὸ Δ, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἐστὶν ἡ αὐτή· διὰ δὴ τοῦτο καὶ τὰ Γ Δ σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· ᾧ ἄρα διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ

διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, διὰ τὸ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσα εἶναι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ διαφέρει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ διαφέρει ῥητῷ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον· μέσον γὰρ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνόματα· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μδ΄.

Ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 44.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τὰς ΑΓ ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 44.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥςτε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους ῥητὸν περιεχούσας. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ διαφέρει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, ῥητῷ δὲ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· ῥητῷ ἄρα διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων πρώτη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις με΄.

Ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 45.

Ἔστω

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τὰς ΑΓ ΓΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας· φανερὸν δὴ ὅτι τὸ Γ οὐκ ἔστι κατὰ τὴν διχοτομίαν, ἐπειδήπερ οὐκ εἰσὶ μήκει σύμμετροι· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 45

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥςτε τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, (δῆλον δὴ ὅτι καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἐλάσσονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ὡς ἐπάνω ἐδείξαμεν,) καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ μέσας εἶναι δυνάμει μόνον συμμέτρους μέσον περιεχούσας. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον παραβεβλήσθω τὸ ΕΚ, τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΗ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, (ἅπερ ἐλάσσονα ἐδείχθη τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ) ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΕΛ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΜΚ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, δυνάμει γάρ εἰσι σύμμετροι αἱ ΑΓ ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἄρα ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν

ΑΓ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΘΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΚ· ὥςτε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΕΘ ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ δύο ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι συντεθῶσιν, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσονται καὶ αἱ ΕΜ ΜΝ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἔσται ἡ ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο διῃρημένη, τό τε Θ καὶ τὸ Μ, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτὴ, ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· πολλῷ ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΕΗ, μεῖζόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τοῦ ΜΚ· ὥςτε καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΜΝ μείζων ἐστίν· ἡ ἄρα ΕΘ τῇ ΜΝ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτή. Ἡ ἄρα ΕΝ ἐκ δύο ὀνομάτων οὖσα διῄρηται κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον· ὅπερ ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μϛ'.

Ἡ μείζων κατὰ τὸ αὐτὸ μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 46.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τὰς ΑΓ ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 46.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥςτε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητὸν, τὸ δὲ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον. Καὶ ἐπεὶ ᾧ διαφέρει

τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ μείζων κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· κατὰ τὸ αὐτὸ ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Προτασις μζ.

Ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 47.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τὰς ΑΓ ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ' ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται. Fig. 47.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥςτε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μέσον, τὸ δ' ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν ᾧ διαφέρει τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ διαφέρει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ὑπερέχει ῥητῷ, μέσα ὄντα, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη κατ' ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ' ἓν ἄρα μόνον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μή.

Ἡ δύο μέσα δυναμένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον διαιρεῖται. 48.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τὰς ΑΓ ΓΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ κατ᾽ ἄλλο σημεῖον οὐ διαιρεῖται, ποιοῦσα τὰ προκείμενα. Fig. 48.

Εἰ γὰρ δυνατόν, διῃρήσθω κατὰ τὸ Δ, ὥςτε πάλιν δηλονότι τὴν ΑΓ τῇ ΔΒ μὴ εἶναι τὴν αὐτήν, ἀλλὰ μείζονα καθ᾽ ὑπόθεσιν τὴν ΑΓ, καὶ κείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΘΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. Πάλιν δὴ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον τὸ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ λοιπῷ τῷ ΜΚ ἴσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ μέσον ὑπόκειται τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΕ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΝ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα τῷ ΘΚ ἀσύμμετρόν ἐστιν· ὥςτε καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΝ ἀσύμμετρός ἐστι. Καί εἰσι ῥηταί· αἱ ΕΘ ΘΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΕΝ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ κατὰ τὸ Μ διῄρηται, καὶ οὐκ ἔστιν ἡ ΕΘ τῇ ΜΝ ἡ αὐτή· ἡ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διῄρηται, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ δύο μέσα δυναμένη κατ᾽ ἄλλο καὶ ἄλλο σημεῖον διαιρεῖται· καθ᾽ ἓν ἄρα μόνον σημεῖον διαιρεῖται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι δεύτεροι.

α'. Ὑποκειμένης ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα, ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάττονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ὅλη ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη. 1.

β'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλασσον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. 2.

γ'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτη. 3.

δ'. Πάλιν δὴ ἐὰν τὸ μεῖζον ὄνομα τοῦ ἐλάσσονος μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν μὲν τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρον ᾖ μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καλείσθω ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτη. 4.

ε'. Ἐὰν δὲ τὸ ἔλαττον, πέμπτη. 5.

ς'. Ἐὰν δὲ μηδέτερον, ἕκτη. 6.

Πρότασις μδ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. 49.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥςτε τὸν Fig. 49.
συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΓΑ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ. ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὥςτε σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ

τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Λέγω ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ ΖΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΕΖ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ν΄.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. 50.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥςτε τὸν συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετρά- Fig. 50

γωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω ἡ ΖΗ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Γεγονέτω δὴ καὶ ὡς ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ μήκει· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ ἀνάπαλίν ἐστιν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἀλλ᾽ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥςτε ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΕΖ ΖΗ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ, μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις να΄.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. 51.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥςτε τὸν Fig. 51.
συγκείμενον ἐξ αὐτῶν τὸν ΑΒ πρὸς μὲν τὸν ΒΓ λόγον ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, πρὸς δὲ τὸν ΑΓ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἐκκείσθω δέ τις καὶ ἄλλος μὴ τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Δ, καὶ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ ΑΓ λόγον μὴ ἐχέτω ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως

τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσιν αἱ ΖΗ ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις νβ.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. 52.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥςτε τὸν ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον μὴ ἔχειν, μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΕΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΒΑ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγω- Fig. 52.

νον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥςτε ἡ ΕΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, μείζων δὲ ὁ ΒΑ τοῦ ΑΓ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ἡ ΕΖ ἄρα τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΕΖ τῇ Δ σύμμετρός ἐστι μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις νγ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην, 53.

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥςτε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν, καὶ ἐκκείσθω ῥητή τις εὐθεῖα ἡ Δ, καὶ τῇ Δ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΗΖ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΖ. Καὶ γεγονέτω ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς (Fig 53.)

ΗΖ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· αἱ ΕΖ ΖΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΗ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ ΓΑ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως, τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΖΗ Θ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ Θ μήκει· ὥςτε ἡ ΕΖ τῆς ΖΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΕΖ ΖΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ τὸ ΖΗ ἔλαττον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Δ μήκει.

Ἡ ΕΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις νδ'.

Εὑρεῖν τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. 54

Ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΑΓ ΓΒ, ὥςτε τὸν ΑΒ πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔστω δὲ καὶ ἕτερος ἀριθμὸς ὁ Δ μὴ τετράγωνος ὤν, μήτε πρὸς ἑκάτερον τῶν ΒΑ ΑΓ λόγον ἔχων, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ ἐκκείσθω τις ῥητὴ εὐθεῖα ἡ Ε, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ε τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Fig. 54.

Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ Ε· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ οὐκ ἔχει ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΖΗ μήκει. Γεγονέτω δὴ πάλιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΖΘ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Δ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Ε πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Δ πρὸς τὸν ΑΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς Ε ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Ε τῇ ΗΘ μήκει. Ἐδείχθη δὲ καὶ τῇ ΖΗ ἀσύμμετρος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΖΗ ΗΘ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ Ε μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΑ πρὸς τὸν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἔστω οὖν τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΗΘ Κ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ,

οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΑΒ πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ὥστε οὐδὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καί εἰσιν αἱ ΖΗ ΗΘ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Ε.

Ἡ ΖΘ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

(Λῆμμα.

Ἔστω δύο τετράγωνα τὰ ΑΒ ΒΓ, καὶ κείσθωσαν ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΔΒ τῇ ΒΕ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΒ τῇ ΒΗ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· λέγω ὅτι τετράγωνόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ὅτι τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ, καὶ ἔτι τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΒΗ· ὅλη ἄρα ἡ ΔΕ ὅλῃ τῇ ΖΗ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' ἡ μὲν ΔΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΘ ΚΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΖΗ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ ΘΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΘ ΚΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΚ ΘΓ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ παραλληλόγραμμον· ἔστι δὲ καὶ ὀρθογώνιον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΗ, οὕτως τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΔΗ, οὕτως τὸ ΔΗ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΒ ΒΓ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΗ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΔ πρὸς τὴν ΔΚ, οὕτως ἡ ΚΗ πρὸς τὴν ΗΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ, οὕτως ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΔ, οὕτως τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΔ, ὡς δὲ ἡ ΚΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΔΓ, οὕτως τὸ ΔΓ πρὸς τὸ ΒΓ· τῶν ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΔΓ· ὅπερ προὔκειτο δεῖξαι.)

Πρότασις νέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων. 55.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς Fig. 55 τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο ὀνομάτων.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη ἡ ΑΔ, διηρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω τὸ μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ. Φανερὸν δὴ ὅτι αἱ ΑΕ ΕΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω δὴ ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος, τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΑΕ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ. Παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η Ε Ζ ὁποτέρᾳ τῶν ΑΒ ΓΔ παράλληλοι αἱ ΗΘ ΕΚ ΖΛ· καὶ τῷ μὲν

ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥςτε ἐπ᾽ εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΝΡ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΣΠ παραλληλόγραμμον· τετράγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ ΣΠ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΕΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΘ πρὸς τὸ ΕΛ, οὕτως τὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΚΗ· τῶν ΑΘ ΗΚ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΝ, τὸ δὲ ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΠ· τῶν ΣΝ ΝΠ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΛ. Ἔστι δὲ τῶν αὐτῶν τῶν ΣΝ ΝΠ μέσον ἀνάλογον καὶ τὸ ΜΡ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΡ τῷ ΕΛ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΡ τῷ ΟΞ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΕΛ τῷ ΖΓ· ὅλον ἄρα τὸ ΕΓ τοῖς ΜΡ ΟΞ ἴσον ἐστίν· ἔστι δὲ καὶ τὰ ΑΘ ΗΚ τοῖς ΣΝ ΝΠ ἴσα· ὅλον ἄρα τὸ ΑΓ ἴσον ἐστὶν ὅλῳ τῷ ΣΠ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΜΞ τετραγώνῳ· τὸ ΑΓ ἄρα δύναται ἡ ΜΞ.

Λέγω ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ ΗΕ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρος μήκει· καὶ αἱ ΑΗ ΗΕ ἄρα τῇ ΑΒ σύμμετροί εἰσι. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ ΗΕ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ ΗΚ, ὥςτε καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΗΚ τῷ ΝΠ· καὶ τὰ ΣΝ ΝΠ ἄρα, τοῦτ᾽ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ, ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΑΗ ἐστὶ σύμμετρος, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ μήκει· ὥςτε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΘ τῷ ΣΝ ἐστὶν

ἴσον, τὸ δὲ ΕΔ τῷ ΜΡ· καὶ τὸ ΣΝ ἄρα τῷ ΜΡ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλ' ὡς τὸ ΣΝ πρὸς τὸ ΜΡ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΡ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΜ, ἡ δὲ ΝΡ τῇ ΝΞ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ. Καὶ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ σύμμετρον τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ, καὶ ῥητὸν ἑκάτερον· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις νϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη. 51.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒΓΔ ὑπὸ ῥητῆς Fig. 5 τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων πρώτη ἐστίν.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα ἐστὶν ἡ ΑΔ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ τὸ ἔλαττον ὄνομα, ἡ ΕΔ, σύμμετρόν ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Τετμήσθω ἡ ΕΔ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει· Καὶ διὰ τῶν Η Ε Ζ παράλληλοι ἤχθωσαν ταῖς ΑΒ ΔΓ αἱ ΗΘ ΕΚ ΖΛ, καὶ τῷ μὲν ΑΘ παραλληλογράμμῳ ἴσον τετράγωνον συνεστάτω τὸ ΣΝ, τῷ δὲ ΗΚ ἴσον τετράγωνον τὸ ΝΠ, καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΜΝ τῇ ΝΞ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΡΝ τῇ ΝΟ. Καὶ συμπεπλη-

πληρώσθω τὸ ΣΠ τετράγωνον· φανερὸν δὴ ἐκ τοῦ προδεδειγμένου, ὅτι τὸ ΜΡ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τῶν ΣΝ ΝΠ, καὶ ἴσον τῷ ΕΛ, καὶ ὅτι τὸ ΑΓ χωρίον δύναται ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, σύμμετρος δὲ ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, σύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ ΗΕ. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΕ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΗ ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ, σύμμετρος δὲ ἡ ΑΕ ἑκατέρᾳ τῶν ΑΗ ΗΕ· αἱ ΑΗ ΗΕ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΒΑ ΑΗ ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥςτε μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΘ ΗΚ· ὥςτε ἑκάτερον τῶν ΣΝ ΝΠ μέσον ἐστί· καὶ αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσί. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· ὥςτε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ μήκει, ἀλλ᾽ ἡ μὲν ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΗ, ἡ δὲ ΔΕ τῇ ΕΖ σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΑΗ τῇ ΕΖ· ὥςτε καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστι, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΣΝ τῷ ΜΡ· ὥςτε ἡ ΟΝ τῇ ΝΡ, τοῦτ᾽ ἔστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει. Ἐδείχθησαν δὲ αἱ ΜΝ ΝΞ καὶ μέσαι οὖσαι καὶ δυνάμει σύμμετροι· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ῥητὸν περιέχουσιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΕ ὑπόκειται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ ΕΖ σύμμετρος· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΕ τῇ ΕΚ. Καὶ ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΜΡ, τὸ δὲ ΜΡ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Ἐὰν δὲ δύο μέσαι δυνάμει μόνον

σύμμετροι συντεθῶσι ῥητὸν περιέχουσαι, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐκ δύο μέσων πρώτη.

Ἡ ἄρα ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις νζ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα. 57.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς Fig. 57. τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐκ δύο μέσων δευτέρα.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη ἡ ΑΔ· αἱ ΑΕ ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει. Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δεδειγμένοις δείξομεν ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη, καὶ αἱ ΜΝ ΝΞ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· ὥςτε ἡ ΜΞ ἐκ δύο μέσων ἐστί.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, τοῦτ' ἔστι τῇ ΕΚ, σύμμετρος δὲ ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΖΕ ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δύναμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις νή.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. 58.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὧν μεῖζον ἔστω τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. Fig. 58.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη, αἱ ΑΕ ΕΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ σύμμετρός ἐστι μήκει. Τετμήσθω δὴ ἡ ΔΕ δίχα κατὰ τὸ Ζ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΖ ἴσον παρὰ τὴν ΑΕ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ μήκει. Ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΒ αἱ ΗΘ ΕΚ ΖΛ, καὶ τὰ λοιπὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου γεγονέτω· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΕΗ μήκει, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΗΚ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ΣΝ τῷ ΝΠ· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΑΒ μήκει, ῥητόν ἐστι τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτ᾽ ἔστι τῇ ΕΚ, ἀλλὰ ἡ ΔΕ σύμμετρος ἐστι τῇ ΕΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ μήκει· αἱ ΚΕ ΕΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα τὸ ΛΕ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ΜΡ, καὶ περιέχεται ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ, καὶ ῥητὸν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ,

καὶ εἴσιν ἀσύμμετροι αἱ ΜΝ ΝΞ δυνάμει. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι δυνάμει ἀσύμμετροι συντεθῶσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον, ἡ ὅλη ἄλογός ἐστι. Καλεῖται δὲ μείζων.

Ἡ ΜΞ ἄρα ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη μείζων, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις νθ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. 59

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΓ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατα τὸ Ε, ὥςτε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Fig. 59

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις· φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ χωρίον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ. Δεικτέον δὴ ὅτι ἡ ΜΞ ἐστὶν ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΗΕ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΘ τῷ ΘΕ, τουτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΜΝ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΞ· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη, καὶ ἔστιν ἔλασσον αὐτῆς τμῆμα τὸ ΕΔ· σύμμετρος ἄρα ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει. Ἀλλ' ἡ ΑΕ τῇ ΕΔ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει, καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῇ ΑΕ ἐστὶν ἀσύμμετρος μήκει· αἱ ΒΑ ΑΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ· τουτ' ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΑΒ μήκει, τουτ' ἔστι τῇ ΕΚ, ἀλλ' ἡ ΔΕ τῇ ΕΖ

σύμμετρός ἐστι· καὶ ἡ ΕΖ ἄρα τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ῥητὴ ἡ ΕΚ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΛ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΡ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ· αἱ ΜΝ ΝΞ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΜΞ ἄρα ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη δύο μέσα δυναμένη. 60.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης τῆς ΑΔ, διῃρημένης εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, ὥςτε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΕ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἡ δύο μέσα δυναμένη ἐστί. Fig. 60.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Φανερὸν δὴ ὅτι ἡ τὸ ΑΓ δυναμένη ἐστὶν ἡ ΜΞ, καὶ ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΞ δυνάμει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΒ μήκει· αἱ ΕΑ ΑΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ, τοῦτ' ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΕΔ τῇ ΑΒ μήκει, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· καὶ αἱ ΖΕ ΕΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΛ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΡ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΕΖ, καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΕΛ ἀσύμμετρόν ἐστιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΑΚ ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ, τὸ δὲ ΕΛ ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα

ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΜΝ ΝΞ. Καὶ ἔστι μέσον ἑκάτερον αὐτῶν, καὶ αἱ ΜΝ ΝΞ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι.

Ἡ ΜΞ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, καὶ δύναται τὸ ΑΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, τὰ ἀπὸ τῶν ἀνίσων τετράγωνα μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ἀνίσων περιεχομένου ὀρθογωνίου.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Δ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα γραμμὴ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Δ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττον ἢ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξά.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. 61.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, ὥστε τὸ μεῖζον ὄνομα εἶναι τὸ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ. καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕΖΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη. Fig. 61.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἴσον τὸ ΚΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΖ. Τετμήσθω ἡ ΜΗ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ ἑκατέρα τῶν ΜΛ ΗΖ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΜΞ ΝΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ῥητά ἐστι καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις· ὥςτε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΓΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΜΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΜΗ ἐστὶ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΛ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΔΕ, μήκει. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΜΔ ῥητὴ, καὶ τῇ ΔΕ μήκει σύμμετρος· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ τῶν ΔΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΜΞ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΔΘ πρὸς τὸ ΜΞ, οὕτως τὸ ΜΞ πρὸς τὸ ΚΛ, τοῦτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ ΔΚ πρὸς τὴν ΜΝ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς τὴν ΜΚ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ μείζονά ἐστι

τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μείζων ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τουτ᾽ ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάττονος ἴσον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰσι ῥηταὶ αἱ ΔΜ ΜΗ, καὶ ἡ ΔΜ μεῖζον ὄνομα οὖσα σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξβ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. 62.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων πρώτη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὧν μείζων ἡ ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα. Fig. 62.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι ῥητὸν περιέχουσαι· ὥςτε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσα ἐστί· μέσον ἄρα τὸ ΔΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΔ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΜΖ, καὶ

παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ μήκει σύμμετρος τῇ ΜΛ, τουτ᾿ ἔστι τῇ ΔΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ τοῦ ΜΖ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ, σύμμετρόν ἐστι τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξγ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. 63.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τὸ μεῖζον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΓ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη. Fig. 63.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι· ὥςτε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἐστί· καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΛ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΛ·

καὶ παράκειται παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΜΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΜΔ, τουτ' ἔστι τῇ ΔΕ, μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ΔΜ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει, ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ὥςτε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἀσύμμετρόν ἐστι, τουτ' ἔστι τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ ἀσύμμετρός ἐστι. Καὶ εἴσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ, καὶ σύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξδ'.

Τὸ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. 64.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ὥςτε Fig. 64. μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, ῥητὴ δέ τις ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ παραλληλόγραμμον, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς προδεδειγμένοις. Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ διῃρημένη κατὰ

τὸ Γ, αἱ ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον. Ἐπεὶ οὖν ῥητόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΔΛ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΜΛ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ μήκει· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Δεικτέον δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον ἐπιλογιούμεθα, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ, καὶ ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ. Ἐπεὶ οὖν ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΘ τῷ ΚΛ· ὥςτε ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἐλάσσονος ἴσον παραλληλόγραμμον παρὰ τὴν μείζονα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρῇ μήκει, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΜ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξέ.

Τὸ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. 65.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, διῃρημένη εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Γ, ὥστε μείζονα εἶναι τὴν ΑΓ, καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΕ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΔΕ παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. Fig. 65.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρὸ τούτου. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΛ· ὥςτε ῥητή ἐστιν ἡ ΔΜ, καὶ μήκει ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΜΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δειχθήσεται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ἀσύμμετρος ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει· ἡ ΔΜ ἄρα τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἴσιν αἱ ΔΜ ΜΗ ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ἐλάττων ἡ ΜΗ σύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξς'.

Τὸ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. 66.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ, ῥητὴ δὲ ἔστω ἡ ΔΕ, καὶ παρὰ τὴν ΔΕ τῷ Fig. 66.

ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παραβεβλήσθω τὸ ΔΖ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· λέγω ὅτι ἡ ΔΗ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη.

Κατεσκευάσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶ, διῃρημένη κατὰ τὸ Γ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων τῷ ὑπ' αὐτῶν· ὥςτε κατὰ τὰ προδεδειγμένα μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΔΛ ΜΖ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΕ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΜ ΜΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΕ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΛ τῷ ΜΖ. ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΜ τῇ ΜΗ· αἱ ΔΜ ΜΗ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΔΗ.

Λέγω ὅτι καὶ ἕκτη.

Ὁμοίως γὰρ πάλιν τοῖς πρὸ τούτου δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΔΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, καὶ ὅτι ἡ ΔΚ τῇ ΚΜ μήκει ἐστὶν ἀσύμμετρος· καὶ διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΔΜ τῆς ΜΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΔΜ ΜΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΕ μήκει.

Ἡ ΔΗ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξζ'.

Ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 67.

Ἔστω ἐκ δύο ὀνομάτων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 67.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΑΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΓΖ, ἡ δὲ ΕΒ τῇ ΖΔ. Καὶ εἴσι ῥηταὶ αἱ ΑΕ ΕΒ· ῥηταὶ ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ εἴσι ῥηταί· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ ὅτι τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἡ γὰρ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται ἤτοι τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται· καὶ διὰ τοῦτο ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΓΔ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ τάξει ἡ αὐτή. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΖΔ σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τῇ τάξει ἡ αὐτὴ ἔσται τῇ ΑΒ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἐστι ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρα. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ ΖΔ σύμμετρος αὐτῇ ἔσται, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τρίτη. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἡ ΓΖ σύμμε-

τρος εσται αὐτῇ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τετάρτη. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΖΔ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα πέμπτη. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ τῶν ΓΖ ΖΔ οὐδετέρα σύμμετρος ἔσται τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, καὶ ἔστιν ἑκατέρα ἕκτη.

Ὥςτε ἡ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων μήκει σύμμετρος . . . καὶ τὰ ἑξῆς· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξή.

Ἡ τῇ ἐκ δύο μέσων μήκει σύμμετρος καὶ αὐτὴ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 68.

Ἔστω ἐκ δύο μέσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω μήκει ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ ἐκ δύο μέσων ἐστὶ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 68.

Ἐπεὶ γὰρ ἐκ δύο μέσων ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς μέσας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΕΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΖΔ ἐστὶν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ ΖΔ· μέσαι δὲ αἱ ΑΕ ΕΒ· μέσαι ἄρα καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν. Ἐδείχθησαν δὲ καὶ μέσαι· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκ δύο μέσων ἐστί.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή ἐστι τῇ ΑΒ. Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Εἴτε οὖν

ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ ῥητὸν ἔσται· καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν ἑκατέρα ἐκ δύο μέσων πρώτη. Εἴτε μέσον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, μέσον καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα.

Καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ ΓΔ τῇ ΑΒ τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ξθ'.

Ἡ τῇ μείζονι σύμμετρος καὶ αὐτὴ μείζων ἐστίν. 69.

Ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μείζων ἐστί. Fig. 69

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν μέσον· καὶ γεγονέτω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἥ τε ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ καὶ ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΑΕ ΕΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· καὶ συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ· σύμμετρα ἄρα καὶ τὰ ἀπὸ

τῶν

τῶν ΑΕ ΕΒ τοῖς ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἔστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ ἅμα ῥητόν· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ ἄρα ἅμα ῥητόν ἐστιν. Ὁμοίως δὲ καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ σύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Καὶ ἔστι μέσον τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· μέσον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροί εἰσι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ὅλη ἄρα ἡ ΓΔ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων.

Ἡ ἄρα τῇ μείζονι σύμμετρος μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ό.

Ἡ τῇ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένῃ σύμμετρος καὶ αὐτὴ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν. 70.

Ἔστω ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί. Fig. 70.

Διῃρήσθω ἡ ΑΒ εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν· καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ὥςτε καὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων ἐστὶ μέσον, τὸ δ᾽ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ ῥητόν.

Ῥητὸν ἄρα καὶ μέσον δυναμένη ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις οα΄.

Ἡ τῇ δύο μέσα δυναμένῃ σύμμετρος δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. 71.

Ἔστω δύο μέσα δυναμένη ἡ ΑΒ καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· δεικτέον ὅτι καὶ ἡ ΓΔ δύο μέσα δυναμένη ἐστίν. Fig. 71

Ἐπεὶ γὰρ δύο μέσα δυναμένη ἐστὶν ἡ ΑΒ, διῃρήσθω εἰς τὰς εὐθείας κατὰ τὸ Ε· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· καὶ κατεσκευάσθω τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ σύμμετρον τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ὥςτε καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ.

Ἡ ΓΔ ἄρα δύο μέσα δυναμένη ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις οβ΄.

Ῥητοῦ καὶ μέσου συντιθεμένου τέσσαρες ἄλογοι γίνονται, ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ καὶ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. 72.

Ἔστω ῥητὸν μὲν τὸ ΑΒ, μέσον δὲ τὸ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἤτοι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν, ἢ ἐκ δύο μέσων πρώτη, ἢ μείζων, ἢ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη. Fig. 7

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασ-

σον. Ἔστω πρότερον μεῖζον· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΕΖ τῷ ΑΒ ἴσον τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· τῷ δὲ ΓΔ ἴσον παρὰ τὴν ΘΗ, τουτ᾽ ἔστι τὴν ΕΖ, παραβεβλήσθω τὸ ΘΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΑΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ· ἡ ΕΘ ἄρα ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΙ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΘΗ, τουτ᾽ ἔστι τὴν ΘΗ, παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΓΔ, ῥητὸν δὲ τὸ ΑΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ· ὥςτε καὶ τὸ ΕΗ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΘ ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ διῃρημένη κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ τοῦ ΘΙ· καὶ ἡ ΕΘ ἄρα μείζων ἐστὶ τῆς ΘΚ. Ἤτοι οὖν ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ μείζων ἡ ΘΕ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πρώτη· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν· ὥςτε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ἀλλὰ δὴ δυνάσθω ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ μείζων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκει-

μένη ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τετάρτη· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μείζων· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη μείζων ἐστίν· ὥςτε καὶ ἡ τὸ ΑΔ δυναμένη μείζων ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ἔλασσον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ τὸ ΕΗ ἄρα ἔλαττόν ἐστι τοῦ ΘΙ· ὥςτε καὶ ἡ ΕΘ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΘΚ· ἤτοι δὲ ἡ ΘΚ τῆς ΕΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ δευτέρα· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη· ὥςτε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ πρώτη. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΚΘ τῆς ΕΘ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ ἐλάσσων ἡ ΕΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ· ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ πέμπτη· ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ· ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστίν· ὥςτε καὶ ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη ἐστί.

Ῥητοῦ ἄρα καὶ μέσου συντιθεμένου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ογ΄.

Δύο μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις συντιθεμένων, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται· ἤτοι ἡ ἐκ δύο μέσων δευτέρα, ἢ ἡ δύο μέσα δυναμένη. 73.

Συγκείσθωσαν γὰρ δύο μέσα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις τὰ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη, ἤτοι ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Τὸ γὰρ ΑΒ τοῦ ΓΔ ἤτοι μεῖζόν ἐστιν, ἢ ἔλασσον. Ἔστω πρότερον μεῖζον τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τῷ μὲν ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΘ, τῷ δὲ ΓΔ ἴσον τὸ ΘΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΑΒ ΓΔ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ΕΗ ΘΙ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὰς ΕΘ ΘΚ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΕΘ ΘΚ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΒ τῷ ΓΔ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΒ τῷ ΕΗ, τὸ δὲ ΓΔ τῷ ΘΙ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΙ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΙ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΚ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΘΚ μήκει· αἱ ΕΘ ΘΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΕΚ. Ἤτοι δὲ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΕΘ ΘΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΕΖ μήκει· ἡ ΕΚ ἄρα ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶ τρίτη, ῥητὴ δὲ ἡ ΕΖ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα· ἡ ἄρα τὸ ΕΙ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΑΔ, δυναμένη ἐκ δύο μέσων ἐστὶ δευτέρα. Ἀλλὰ δὴ ἡ ΕΘ τῆς ΘΚ μεῖζον δυνάσθω τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἑκατέρα τῶν ΕΘ ΘΚ τῇ ΕΖ μήκει, ἡ ἄρα ΕΚ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἕκτη. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη δύο

μέσα δυναμένη ἐστίν· ὥστε ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη δύο μέσα δυναμένη ἐστίν.

Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ ΑΒ τοῦ ΓΔ· ἡ τὸ ΑΔ χωρίον δυναμένη ἢ ἐκ δύο μέσων δευτέρα ἐστὶν, ἢ δύο μέσα δυναμένη.

Δύο ἄρα μέσων ἀσυμμέτρων ἀλλήλοις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις οδ'.

Ἐὰν ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἀποτομή. 74.

Ἀπὸ γὰρ ῥητῆς τῆς ΑΒ ῥητὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 74

Ἐπεὶ γὰρ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, (ἐπειδήπερ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ). Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ ἀποτομή.

Πρότασις οε'.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη. 75.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, Fig. 75.
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ΑΒ ῥητὸν περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ μέσαι εἰσὶ, μέσα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀσύμμετρα ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ λοιπῷ ἄρα τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστί τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἐπεὶ κἂν τὸ ὅλον ἑνὶ αὐτῶν ἀσύμμετρον ᾖ, καὶ τὰ ἐξ ἀρχῆς μεγέθη ἀσύμμετρα ἔσται. Ῥητὸν δὲ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ πρώτη.

Προτασις οϛ´.

Ἐὰν ἀπὸ μέσης μέση ἀφαιρεθῇ, δυνάμει 76.
μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Ἀπὸ γὰρ μέσης τῆς ΑΒ μέση ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, Fig. 76.
δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ μέσον περιέχουσα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ, ἡ ΑΓ, ἄλογός ἐστιν.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ μέσα καὶ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΔΕ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ

τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΒ ΒΓ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Ἴσον δὲ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΔΕ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΔΘ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΗΔ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΔ τῇ ΔΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΗΔ ΔΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΗ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΙ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογος ἐστι. Ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕ, καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα.

Πρότασις οζ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ μὲν ἀπ᾽ αὐτῶν ἅμα ῥητὸν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἐλάσσων. 77.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τῆς ΑΒ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 7

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ῥητὰ δὲ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἄλογος ἄρα ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ ἐλάσσων.

Πρότασις οή.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, 78.
δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω Fig. 78.
ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμετρόν ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ. Καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητόν· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄλογόν ἐστιν· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Καλείσθω δὲ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Πρότασις οθ.

Ἐὰν ἀπὸ εὐθείας εὐθεῖα ἀφαιρεθῇ, δυ- 79.
νάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς

ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾿ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τό τε δὶς ὑπ᾿ αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ᾿ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾿ αὐτῶν· ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ εὐθείας τῆς ΑΒ εὐθεῖα ἀφῃρήσθω ἡ ΒΓ, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ΑΒ, ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον, τό τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἡ λοιπὴ ἡ ΑΓ ἄλογός ἐστιν. Fig. 79.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΔΙ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΔΙ παραβεβλήσθω τὸ ΔΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΔΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥςτε ἡ ΑΓ δύναται τὸ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραγώνων μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΕ· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΔΘ· τὸ ἄρα ΔΘ μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΙ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΔΙ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΕ τῷ ΔΘ. Ὡς δὲ τὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΔΘ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς τὴν ΔΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΗ τῇ ΔΖ. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΗΔ ΔΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ

ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι· τὸ ΖΕ ἄρα ἄλογόν ἐστι καὶ δύναται τὸ ΖΕ ἡ ΑΓ· ἡ ΑΓ ἄρα ἄλογός ἐστι. Καλείσθω δὲ ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Πρότασις π'.

Τῇ ἀποτομῇ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. 80.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ. Fig. 80.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΒΔ· αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀμφότερα ὑπερέχει· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΒΓ ὑπερέχει ῥητῷ· ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ· τῇ ἄρα ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ.

Μία ἄρα μόνον τῇ ἀποτομῇ προσαρμόζει . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πά.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον 81.

σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Ἔστω γὰρ μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμοζέτω ἡ ΒΓ· αἱ ΑΓ ΓΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ῥητὸν περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω καὶ ἡ ΔΒ· αἱ ἄρα ΑΔ ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεί, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τῷ γὰρ αὐτῷ πάλιν ὑπερέχουσι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἐναλλὰξ ἄρα, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γὰρ ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γὰρ ἀμφότερα, μέσον δὲ μέσου οὐχ ὑπερέχει ῥητῷ.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ πρώτῃ μία μόνον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πβ.

Τῇ μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα μέση, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα. 82.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμό- Fig. 82

ζει εὐθεῖα μέση δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης μέσον περιέχουσα.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προςαρμοζέτω καὶ ἡ ΒΔ· αἱ ἄρα ΑΔ ΔΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ὥςτε ἡ ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν δὴ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΕΛ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΙ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ μέσαι εἰσὶν δυνάμει σύμμετροι αἱ ΑΓ ΓΒ, μέσα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστιν ἴσα τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΕΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον ἐστί. Καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ· καὶ τὸ ΘΗ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΓΒ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΓ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΕΗ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ

τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τὸ ΘΗ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ. Ὡς δὲ τὸ ΕΗ πρὸς τὸ ΘΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΕΜ πρὸς τὴν ΘΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ τῇ ΘΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΕΜ ΘΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΘΝ αὐτῇ προσαρμόζει· τῇ ἄρα ἀποτομῇ, τῇ ΕΘ, ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Τῇ ἄρα μέσης ἀποτομῇ δευτέρᾳ μία μόνον... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πγ΄.

Τῇ ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ποιοῦσα μετὰ τῆς ὅλης τὸ μὲν ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον. 83.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἔστω ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προσαρμόζει, τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Fig. 83.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα ἅμα ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μέσον· καὶ ἐπεὶ, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνων ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα

τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον, μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα.

Τῇ ἄρα ἐλάσσονι μία μόνον προσαρμόζει ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πδʹ.

Τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προσαρμόζει εὐθεῖα, δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν. 84.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προσαρμόζουσα δὲ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ῥητόν· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα οὐ προσαρμόζει τὰ αὐτὰ ποιοῦσα. Fig. 84.

Εἰ γὰρ δυνατόν, προσαρμοζέτω ἡ ΒΔ· καὶ αἱ ΑΔ ΔΒ ἄρα εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ῥητόν. Ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, τούτῳ ὑπερέχει καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ῥητὰ γάρ ἐστιν ἀμφότερα· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἄρα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ὑπερέχει ῥητῷ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· μέσα γάρ ἐστιν ἀμφότερα· οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόζει εὐθεῖα.

Τῇ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις πέ.

Τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ μία μόνον προςαρμόζει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν. 85.

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, προςαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ΑΓ ΓΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· λέγω ὅτι τῇ ΑΒ ἑτέρα εὐθεῖα οὐ προςαρμόζει δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ προκείμενα. Fig. 8[illegible]

Εἰ γὰρ δυνατόν, προςαρμοζέτω ἡ ΒΔ, ὥςτε καὶ τὰς ΑΔ ΔΒ δυνάμει ἀσυμμέτρους εἶναι, ποιούσας τά τε ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μέσον, καὶ ἔτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΕΖ, καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΘΗ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΛ· ἡ ἄρα ΑΒ δύναται τὸ ΕΛ. Πάλιν, τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον παρὰ τὴν ΕΖ παραβεβλήσθω τὸ ΕΙ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΝ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον τῷ ΕΛ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΙ. Καὶ ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΕΗ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΕΗ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ

παρά-

παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΕΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΘΗ, μέσον ἄρα καὶ τὸ ΘΗ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΘΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΕΖ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ἀσύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΕΗ τῷ ΘΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΕΜ τῇ ΜΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΕΜ ΜΘ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΜ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΕΘ πάλιν ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΘΝ· τῇ ἄρα ἀποτομῇ ἄλλη καὶ ἄλλη προσαρμόζει ῥητὴ, δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ὅπερ ἐδείχθη ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τῇ ΑΒ ἑτέρα προσαρμόσει εὐθεῖα.

Τῇ ἄρα ΑΒ μία μόνον προσαρμόσει εὐθεῖα δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τά τε ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἅμα μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ ὑπ᾽ αὐτῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ὅροι τρίτοι.

α. Ὑποκειμένης ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς, ἐὰν μὲν ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· καλείσθω ἀποτομὴ πρώτη. 1.

β. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καλείσθω ἀποτομὴ δευτέρα. 2.

γ. Ἐὰν δὲ μηδετέρα σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, ἡ δὲ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον 3.

δύνηται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· καλείσθω ἀποτομὴ τρίτη.

δ΄. Πάλιν, ἐὰν ἡ ὅλη τῆς προσαρμοζούσης μεῖζον δύνηται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, ἐὰν μὲν ὅλη σύμμετρος ᾖ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· καλείσθω ἀποτομὴ τετάρτη. 4.

ε΄. Ἐὰν δὲ ἡ προσαρμόζουσα, πέμπτη. 5.

ϛ΄. Ἐὰν δὲ μηδετέρα, ἕκτη. 6.

Πρότασις πϛ΄.

Εὑρεῖν τὴν πρώτην ἀποτομήν. 86.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος Fig. 86.
ἔστω ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΖΔ μὴ ἔστω τετράγωνος· οὐδ' ἄρα ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πρώτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· καὶ ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ

τῆς Θ. Ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἑκάτερος γὰρ τετράγωνός ἐστι· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πρώτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις πζ'.

Εὑρεῖν τὴν δευτέραν ἀποτομήν. 87.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος μήκει ἡ ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΗΓ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο τετράγωνοι ἀριθμοὶ οἱ ΔΕ ΕΖ, ὧν ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΖ μὴ ἔστω τετράγωνος. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΔ πρὸς τὸν ΔΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ. ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΒ· Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀσύμμετρός ἄρα ἐστιν ἡ ΓΗ τῇ ΗΒ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΗ ΗΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι. Fig. 87.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΕΔ ἀριθμὸς πρὸς τὸν ΔΖ ἀριθμόν· ἀναστρέψαντι ἄρα

ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ. Καὶ ἔστιν ἑκάτερος τῶν ΔΕ ΕΖ τετράγωνος· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εὕρηται ἄρα ἡ δευτέρα ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις πή.

Εὑρεῖν τὴν τρίτην ἀποτομήν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ ἐκκείσθωσαν τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε ΒΓ ΓΔ, λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, 88. ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετραγώνῳ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετρά-

γωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστίν ἡ ΖΘ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΗ· ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει. Ὧι οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ἄρα ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ.

Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ τρίτη ἀποτομὴ ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις πθ'.

Εὑρεῖν τὴν τετάρτην ἀποτομήν. 89.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος ἡ ΒΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ ΖΕ· ὥστε τὸν ΔΕ ὅλον πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ ΖΕ λόγον μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν. Καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΓ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἰσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ. Fig. 89.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει,

ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει· καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ἄρα ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ ὅλη ἡ ΒΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Εὕρηται ἄρα τετάρτη ἀποτομὴ ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ϞΓ'.

Εὑρεῖν τὴν πέμπτην ἀποτομήν. 90.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τῇ Α μήκει σύμμετρος Fig. 90. ἔστω ἡ ΓΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΗ. Καὶ ἐκκείσθωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ ΔΖ ΖΕ, ὥςτε τὸν ΔΕ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΔΖ ΖΕ λόγον πάλιν μὴ ἔχειν, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς ὁ ΖΕ πρὸς τὸν ΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΒ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΒΗ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ὁ δὲ ΔΕ πρὸς τὸν ΕΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ ΗΓ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΒΗ ΗΓ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΒΓ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΓ, οὕτως ὁ ΔΕ πρὸς τὸν

ΓΖ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ. Ὁ δὲ ΕΔ πρὸς τὸν ΔΖ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Θ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΗ τῇ Θ μήκει. Καὶ δύναται ἡ ΒΗ τῆς ΗΓ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Θ· ἡ ΒΗ ἄρα τῆς ΗΓ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προςαρμόζουσα ἡ ΓΗ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ Α μήκει· ἡ ἄρα ΒΓ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ πέμπτη ἀποτομὴ, ἡ ΒΓ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ϟά.

Εὑρεῖν τὴν ἕκτην ἀποτομήν. 91.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Α, καὶ τρεῖς ἀριθμοὶ οἱ Ε ΒΓ ΓΔ λόγον μὴ ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἔτι δὲ καὶ ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον μὴ ἐχέτω, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· καὶ πεποιήσθω ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Fig. 91.

Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς ΖΗ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ' ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΖΗ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ

ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΗΘ. Καὶ ἐπεὶ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΘ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΖΗ ΗΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΖΘ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς μὲν ὁ Ε πρὸς τὸν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ, ὡς δὲ ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ· διΐσου ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Ε πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ. Ὁ δὲ Ε πρὸς τὸν ΓΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ Α τῇ ΗΘ μήκει· οὐδετέρα ἄρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει. Ὧι οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ ΒΓ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΘ, ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ. Ὁ δὲ ΓΒ πρὸς τὸν ΒΔ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· οὐδ᾽ ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΗ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Κ λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ Κ

μήκει. Καὶ δύναταὶ ἡ ΖΗ τῆς ΗΘ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς Κ· ἡ ΖΗ ἄρα τῆς ΗΘ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΗ ΗΘ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ Α, μήκει· ἡ ἄρα ΖΘ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Εὕρηται ἄρα ἡ ἕκτη ἀποτομὴ, ἡ ΖΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ϟβ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστι. 92.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ΑΒ ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πρώτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. Fig. 92.

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστι πρώτη ἡ ΑΔ, ἔστω αὐτῇ προςαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ ὅλη ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, καὶ ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραλληλόγραμμον παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ. Καὶ διὰ τῶν Ε Ζ Η σημείων τῇ ΑΓ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ἀλλὰ ἡ ΑΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἡ ΑΓ· ῥητὴ ἄρα καὶ

ἑκατέρα τῶν ΑΖ ΖΗ· ὥςτε καὶ ἑκάτερον τῶν ΑΙ ΖΚ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ ΕΚ μέσον ἐστί.

Κείσθω δὴ τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω, κοινὴν γωνίαν ἔχον αὐτῷ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ περιεχόμενον ὀρθογώνιον τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ τετραγώνῳ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΚΖ· τῶν ἄρα ΑΙ ΚΖ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, (ὡς ἐν τοῖς ἔμπροσθεν ἐδείχθη,) καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ τετραγώνῳ ἴσον, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα τῷ ΕΚ ἴσον ἐστίν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ τῷ ΔΘ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΜΝ τῷ ΛΞ· τὸ ἄρα ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΚ ἴσον τοῖς ΛΜ ΝΞ τετραγώνοις· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ· τὸ δὲ ΣΤ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΝ ἐστὶ τετράγωνον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΝ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἡ ΛΝ ἀποτομή ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΑΙ ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ΛΜ ΝΞ· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΛΜ ΝΞ ῥητόν ἐστι, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ἀπὸ ἑκατέρας τῶν ΛΟ ΟΝ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΟ ΟΝ ῥητή ἐστι.

Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ ΛΘ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΛΞ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΞ. Ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΛΞ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΝΞ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΛΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΝ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΟ τῇ ΟΝ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΝ, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον· ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιεχήται ὑπὸ ῥητῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟγ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ 93.
ἀποτομῆς δευτέρας, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς Fig. 9.
ΑΓ καὶ ἀποτομῆς δευτέρας τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη, ἡ ΑΗ, τῆς προσαρμοζούσης, τῆς ΗΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΔ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ. σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ διὰ τῶν Ε Ζ Η σημείων τῇ ΑΓ

παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει· καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ ΖΗ ῥητή ἐστι, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ ΖΚ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ ΕΗ σύμμετρός ἐστιν. Ἀλλ' ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ ΕΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ ΕΚ ῥητόν ἐστι.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὰ ΑΙ ΖΚ μέσα ἐστὶ, καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ ἄρα μέσα ἐστί· καὶ αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσί δυνάμει συμμέτροι. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΜΝ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΕΚ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τὸ ΔΘ, τῷ δὲ ΜΝ ἴσον τὸ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον τὸ ΑΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ ΝΞ, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι, καὶ τῷ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ,

τοῦτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΒ χωρίῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΝ μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΜΝ, τοῦτ' ἔστι τῷ ΑΞ· ῥητὸν ἄρα ἔστι τὸ ΑΞ, τοῦτ' ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ. Μέσον δὲ ἐδείχθη τὸ ΝΞ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ τῷ ΝΞ· ὡς δὲ τὸ ΑΞ πρὸς τὸ ΝΞ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΑΟ πρὸς τὴν ΟΝ· αἱ ΑΟ ΟΝ ἄρα ἀσύμμετροί εἰσι μήκει· αἱ ἄρα ΑΟ ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι· ἡ ΑΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι πρώτη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟδ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ 94.
ἀποτομῆς τρίτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς Fig. 94.
ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τρίτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ΑΗ ΗΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα τῶν ΑΗ ΗΔ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς σύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε Ζ Η σημείων τῇ ΑΓ πα-

ράλληλοι αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ· σύμμετροι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΖ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΖ ΖΗ σύμμετροί εἰσι μήκει, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΑΖ ΖΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΖ ΖΗ ῥητή ἐστι καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· καὶ ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΙ ΖΚ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΕΗ μήκει, καὶ ἡ ΔΗ ἄρα ἑκατέρᾳ τῶν ΔΕ ΕΗ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΔΗ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ΔΕ ΕΗ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΔΘ ΕΚ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ. Ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΗ τῇ ΑΖ σύμμετρός ἐστι μήκει, ἡ δὲ ΔΗ τῇ ΗΕ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΕΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΕΚ.

Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ, καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ, τὸ δὲ ΕΚ τῷ ΔΘ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ

ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ΛΚ ἴσον τοῖς ΛΜ ΝΞ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΛΝ τετραγώνῳ· ἡ ΛΝ ἄρα δύναται τὸ ΛΒ χωρίον.

Λέγω ὅτι ἡ ΛΝ μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσα ἐδείχθη τὰ ΛΙ ΖΚ, καὶ ἔστιν ἴσα τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· μέσον ἄρα καὶ ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· μέση ἄρα ἑκατέρα τῶν ΛΟ ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ΛΙ τῷ ΖΚ, σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΛΙ τῷ ΕΚ, ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜ τῷ ΜΝ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· ὥςτε καὶ ἡ ΛΟ ἀσύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ΟΝ· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ μέσον περιέχουσιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΕΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· ὥςτε καὶ αἱ ΛΟ ΟΝ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι μέσον περιέχουσαι· ἡ ΛΝ ἄρα μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα, καὶ δύναται τὸ ΛΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟε.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί. 95

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς τετάρτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Fig. 9

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προςαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ

ΑΗ

ἈΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Ἤχθωσαν οὖν διὰ τῶν Ε Ζ Η παράλληλοι ταῖς ΑΓ ΒΔ, αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ. Ἐπεὶ οὖν ῥητή ἐστιν ἡ ΑΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει· ῥητὸν ἄρα ἐστὶν ὅλον τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΝΞ, περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν ὂν τῷ ΛΜ, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΕΚ ὡς δὲ ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως τὸ ΕΚ πρὸς τὸ ΖΚ· τῶν ἄρα ΑΙ ΖΚ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΕΚ. Ἔστι δὲ καὶ τῶν ΛΜ ΝΞ τετραγώνων μέσον ἀνάλογον τὸ ΜΝ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ΑΙ τῷ ΛΜ, τὸ δὲ ΖΚ τῷ ΝΞ· καὶ τὸ ΕΚ ἄρα ἴσον ἐστι τῷ ΜΝ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΕΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΘ· τὸ δὲ ΜΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΞ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ. Ἐπεὶ οὖν ὅλον

τὸ ΛΚ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΛΜ ΝΞ τετραγώνοις, ὧν τὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΥΦΧ γνώμονι καὶ τῷ ΝΞ τετραγώνῳ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΣΤ, τουτ' ἔστι τῷ ἀπὸ τῆς ΑΝ τετραγώνῳ· ἡ ΑΝ ἄρα δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ ΑΝ ἄλογος ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ῥητόν ἐστι τὸ ΛΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ τετραγώνοις· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ ῥητόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΔΚ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ΔΚ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΟ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΑΟ ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον· ἡ ΑΝ ἄρα ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη ἐλάσσων, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟϛ'.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ 96. ἀποτομῆς πέμπτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς Fig. 9 ΑΓ καὶ ἀποτομῆς πέμπτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ

ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Ε Ζ Η τῇ ΑΓ παράλληλοι αἱ ΕΘ ΖΙ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΗ τῇ ΑΓ μήκει, καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· μέσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ ΔΗ, καὶ σύμμετρος τῇ ΑΓ μήκει, ῥητόν ἐστι καὶ τὸ ΔΚ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον τετράγωνον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὃν τῷ ΛΜ γωνίαν, τὴν ὑπὸ ΛΟΜ, τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα. Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ ῥητόν ἐστι τὸ ΔΚ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ ῥητόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν· ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΛΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ τὸ ΑΒ ἄρα χωρίον δυναμένη, ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟζ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. 97.

Χωρίον γὰρ τὸ ΑΒ περιεχέσθω ὑπὸ ῥητῆς τῆς ΑΓ καὶ ἀποτομῆς ἕκτης τῆς ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Fig. 97.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΔ προσαρμόζουσα ἡ ΔΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΑΓ μήκει, ἡ δὲ ὅλη ἡ ΑΗ τῆς προσαρμοζούσης τῆς ΔΗ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΗ τῆς ΗΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει· ἐὰν ἄρα τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διελεῖ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΔΗ δίχα κατὰ τὸ Ε σημεῖον, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΗ ἴσον παρὰ τὴν ΑΗ παραβεβλήσθω ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΖ ΖΗ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΗ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΙ πρὸς τὸ ΖΚ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΑΓ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσον ἐστὶ τὸ ΑΚ. Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ΑΓ ΔΗ ῥηταί εἰσι καὶ ἀσύμμετροι μήκει, μέσον ἐστὶ καὶ τὸ ΔΚ. Ἐπεὶ οὖν αἱ ΑΗ ΗΔ δυνάμει μόνον σύμμετροί εἰσιν, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΔΗ μήκει. Ὡς δὲ ἡ ΑΗ πρὸς τὴν ΗΔ, οὕτως ἐστὶ τὸ ΑΚ πρὸς τὸ ΚΔ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΚΔ. Συνεστάτω οὖν τῷ μὲν ΑΙ ἴσον τετράγωνον τὸ ΛΜ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσον ἀφῃρήσθω περὶ τὴν αὐτὴν ὂν τῷ ΛΜ γωνίαν τὸ ΝΞ· περὶ τὴν αὐτὴν ἄρα διάμετρόν ἐστι τὰ ΛΜ ΝΞ τετράγωνα.

Ἔστω αὐτῶν διάμετρος ἡ ΟΡ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ὁμοίως δὴ τοῖς ἐπάνω δείξομεν ὅτι ἡ ΛΝ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Λέγω ὅτι ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐδείχθη τὸ ΑΚ, καί ἐστιν ἴσον τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· τὸ ἄρα συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐδείχθη τὸ ΔΚ, καί ἐστιν ἴσον τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ· καὶ τὸ δὶς ἄρα ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ μέσον ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον ἐδείχθη τὸ ΑΚ τῷ ΔΚ, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ τετράγωνα τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΛΟ ΟΝ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΑΙ τῷ ΖΚ, ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΟ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΝ· αἱ ΛΟ ΟΝ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον, ἔτι τε τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα ἀσύμμετρα τῷ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν· ἡ ἄρα ΛΝ ἄλογός ἐστιν, ἡ καλουμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα, καὶ δύναται τὸ ΑΒ χωρίον.

Ἡ ἄρα τὸ ΑΒ χωρίον δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟή.

Τὸ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην. 98.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη. Fig. 98.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον

ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητά ἐστι, καὶ ἔστι τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΔΜ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΔΜ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ μέσον ἐστὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΛΖ· μέσον ἄρα τὸ ΛΖ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητά ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πρώτη.

Ἐπεὶ γὰρ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογον ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ· ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ,

οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν, αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ, καὶ ἔστι σύμμετρος ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ ΓΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ ΓΔ, μήκει· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πρώτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϟθ.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν. 99.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα. Fig. 99.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, ῥητὸν περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσοις οὖσι· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν

ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΖΛ. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται, πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὰ μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΓΛ, μέσον ἐστί· τὸ δε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΖΛ, ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστι.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ δευτέρα.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τετραγώνων μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ ΝΛ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· καὶ τῶν ΓΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τοῦτ᾽ ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ, τοῦτ᾽ ἔστιν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ, ἴσον παρὰ τὴν μείζονα τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖ-

που εἴδει τετραγώνῳ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ μήκει. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϙ.

Τὸ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ 100.
ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ δευτέρα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ Fig. 100.
ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι, μέσον περιέχουσαι. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἔστι μέσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ καὶ σύμμετρα· μέσον ἄρα καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παραβέβληται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΖΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ

ἄρα καὶ ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΛ μήκει. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΗΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ μήκει ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ σύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ σύμμετρόν ἐστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΖΜ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τρίτη.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ· ὥςτε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ΓΘ ΚΛ ἄρα μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς σύμμετρα αὐτὴν διαι-

ρεῖ· ἡ ΓΜ ἄρα τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΜ ΜΖ σύμμετρός ἐστι μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τρίτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρά.

Τὸ ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην. 101.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ Fig. 101.
ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ ἴσον παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλήσθω τὸ ΚΛ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητόν· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΓΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν σημεῖον, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ

ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἐστὶ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΛ· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστὶ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΛ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητόν ἐστι, τὸ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον, ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Ἴσον δέ ἐστι τὸ ΓΛ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΖΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΖΜ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεροι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τὸ ΝΛ· τῶν ἄρα ΓΘ ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ. Ὡς δὲ τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· ὡς ἄρα ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΝΜ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΝΜ πρὸς τὴν ΚΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΜΝ, τοῦτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ

ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΜΖ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δυνάται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΓΜ σύμμετρος μήκει τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι τετάρτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ ἐλάσσονος παρὰ ῥητὴν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρβ.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην. 102.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη. Fig. 102.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ εὐθεῖαι δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΘ· τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τὸ δὲ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἐστί· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ, καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητή ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ ὅλον τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Τετμήσθω οὖν ἡ ΖΜ δίχα κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ τῶν ΓΔ ΜΛ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον

ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ῥητόν ἐστι, καὶ ἔστιν ἴσον τῷ ΖΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΕΖ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν ΓΔ μέσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΖΔ ῥητόν· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΔ τῷ ΖΔ. Ὡς δὲ τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ἄρα ΓΜ ΜΖ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ πέμπτη.

Ὁμοίως γὰρ δείξομεν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΚ ΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ, τουτ' ἔστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ΓΘ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ τῷ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἡ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ μήκει. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΓΜ ΜΖ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΜ ἴσον παρὰ τὴν ΓΜ παραβέβληται ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ εἰς ἀσύμμετρα αὐτὴν διαιρεῖ· ἡ ἄρα ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΜ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ἄρα ΓΖ ἀποτομή ἐστι πέμπτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ργ΄.

Τὸ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσον μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. 103

Ἔστω ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, ῥητὴ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· λέγω ὅτι ἡ ΓΖ ἀποτομή ἐστιν ἕκτη. Fig. 103.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΗ· αἱ ἄρα ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον, ἔτι τε ἀσύμμετρα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Παραβεβλήσθω οὖν παρὰ τὴν ΓΔ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΚ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΗ τὸ ΚΛ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΓΛ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΓΔ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ΓΛ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, ὧν τὸ ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἔστι τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον· καὶ τὸ ΖΛ ἄρα μέσον ἐστί. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΕ παράκειται πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΜ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΜ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἀσύμμετρά ἐστι τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, καὶ ἔστι τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΓΛ, τῷ δὲ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΖΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΛ τῷ ΖΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΛ πρὸς τὸ ΖΛ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΜΖ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΜ τῇ ΜΖ μήκει. Καὶ εἴσιν ἀμφότεραι ῥηταί· αἱ ΓΜ ΜΖ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἕκτη.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ ΖΛ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ, τετμήσθω δίχα ἡ ΖΜ κατὰ τὸ Ν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Ν τῇ ΓΔ παράλληλος ἡ ΝΞ· ἑκάτερον ἄρα

τῶν ΖΞ ΝΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΗ ΗΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΗ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΛ· ἀσύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΘ τῷ ΚΛ. Ὡς δὲ τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως ἐστὶν τὸ ΓΚ πρὸς τὴν ΚΜ· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΚΜ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ· καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΗ ἴσον τὸ ΓΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΒ ἴσον τὸ ΚΛ, τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΗ ΗΒ ἴσον τὸ ΝΛ· καὶ τῶν ἄρα ΓΘ ΚΛ μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ΝΛ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΓΘ πρὸς τὸ ΝΛ, οὕτως τὸ ΝΛ πρὸς τὸ ΚΛ. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον ἡ ΓΜ τῆς ΜΖ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ οὐδετέρα αὐτῶν σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΓΔ· ἡ ΓΖ ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἕκτη.

Τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρδʹ.

Ἡ τῇ ἀποτομῇ μήκει σύμμετρος ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 104.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 1(

Ἐπεὶ γὰρ ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ τῆς ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ λόγῳ ὁ αὐτὸς γεγονέτω ὁ τῆς ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· καὶ ὡς ἓν ἄρα ἐστὶ πρὸς ἕν, πάντα ἐστὶ πρὸς πάντα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ὅλη ἡ ΑΕ πρὸς ὅλην τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ μήκει· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν ΑΕ τῇ

ΓΖ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΔΖ· αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἤτοι δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ δὲ ἡ ΕΒ, καὶ ἡ ΔΖ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΓΖ ΖΔ. Εἰ δὲ ἡ ΑΕ τῆς ΕΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΓΖ τῆς ΖΔ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΓΖ. Εἰ δὲ ἡ ΒΕ, καὶ ἡ ΖΔ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΑΕ ΕΒ, οὐδετέρα τῶν ΓΖ ΖΔ.

Ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρέ.

Ἡ τῇ μέσης ἀποτομῇ σύμμετρος μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτή. 105.

Ἔστω μέσης ἀποτομὴ ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ μήκει σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ μέσης ἀποτομή ἐστι καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ. Fig. 105.

Ἐπεὶ γὰρ μέσης ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ γεγονέτω ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΔΖ· σύμμετρος

ἄρα καὶ ἡ μὲν ΒΕ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΓΖ· αἱ δὲ ΑΕ ΕΒ μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα μέσαι εἰσὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι· μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ τάξει ἐστὶν ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Εἴτε οὖν ῥητόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· εἴτε μέσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, μέσον ἔσται καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ.

Μέσης ἄρα ἀποτομή ἐστιν ἡ ΓΔ καὶ τῇ τάξει ἡ αὐτὴ τῇ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϱϛ'. 106.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν. Fig. 10

Ἔστω ἐλάσσων ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι καὶ ἡ ΓΔ ἐλάσσων ἐστί.

Γεγονέτω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον. Καὶ ἐπεὶ αἱ ΑΕ ΕΒ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΒ, οὕτως τὰ ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ.

Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΖ· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων. Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΓΖ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, καὶ ἐναλλάξ· σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΓΖ τετραγώνῳ, σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ· μέσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ᾽ αὐτῶν τετραγώνων ῥητὸν, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν μέσον.

Ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρζ.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. 107.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΑΒ σύμμετρος ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. Fig. 1[…]

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προσαρμόζουσα ἡ ΒΕ· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων μέσον, τὸ δ᾽ ὑπ᾽ αὐτῶν ῥητόν. Καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω. Ὁμοίως δὴ δείξομεν τοῖς πρότερον, ὅτι αἱ ΓΖ ΖΔ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ εἰσὶ ταῖς ΑΕ ΕΒ, καὶ σύμμετρόν ἐστι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ

τῶν ΓΖ ΖΔ· ὥςτε καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ τετραγώνων μέσον, τὸ δ' ὑπ' αὐτῶν ῥητόν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρη'.

Ἡ τῇ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν. 108.

Ἔστω μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ ΑΒ, Fig. 108. καὶ τῇ ΑΒ ἔστω σύμμετρος ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι ἡ ΓΔ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω γὰρ τῇ ΑΒ προςαρμόζουσα ἡ ΒΕ, καὶ τὰ αὐτὰ κατεσκευάσθω· αἱ ΑΕ ΕΒ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν. Καὶ εἴσιν, ὡς ἐδείχθη, αἱ ΑΕ ΕΒ σύμμετροι ταῖς ΓΖ ΖΔ, καὶ τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τετραγώνων τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΕ ΕΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΖ ΖΔ· καὶ αἱ ΓΖ ΖΔ ἄρα δυνάμει εἰσὶν ἀσύμμετροι, ποιοῦσαι τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων μέσον, καὶ τὸ ὑπ' αὐτῶν μέσον, καὶ ἔτι ἀσύμμετρον τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τῷ ὑπ' αὐτῶν.

Ἡ ΓΔ ἄρα μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρθ'.

Ἀπὸ ῥητοῦ μέσου ἀφαιρουμένου, ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων. 109.

Ἀπὸ γὰρ ῥητοῦ τοῦ ΒΓ μέσον ἀφῃρήσθω τὸ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν χωρίον δυναμένη, τὸ ΕΓ, μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι ἀποτομὴ, ἢ ἐλάττων. Fig. 109.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ τῷ μὲν ΒΓ ἴσον παρὰ τὴν ΖΗ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΘ, τῷ δὲ ΒΔ ἴσον ἀφῃρήσθω τὸ ΗΚ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΘ. Ἐπεὶ οὖν ῥητὸν μέν ἐστι τὸ ΒΓ, μέσον δὲ τὸ ΒΔ, ἴσον δὲ τὸ μὲν ΒΓ τῷ ΗΘ, τὸ δὲ ΒΔ τῷ ΗΚ· ῥητὸν μὲν ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΘ, μέσον δὲ τὸ ΗΚ· καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΖΗ παράκειται· ῥητὴ ἄρα μὲν ἡ ΖΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΘ τῇ ΖΚ μήκει· αἱ ΖΘ ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΚΖ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Δυνάσθω πρότερον τῷ ἀπὸ συμμέτρου. Καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΘΖ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πρώτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἀποτομή ἐστιν. Ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΓΕ, δυναμένη ἀποτομή ἐστιν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ὅλη ἡ ΖΘ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ἡ δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν. Ἡ ἄρα τὸ ΛΘ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΕΓ, δυναμένη ἐλάσσων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρι.

Ἀπὸ μέσου ῥητοῦ ἀφαιρουμένου, ἄλλαι 110.
δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀπὸ γὰρ μέσου τοῦ ΒΓ ῥητὸν ἀφῃρήσθω τὸ Fig. 110.
ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ τὸ λοιπὸν τὸ ΕΓ δυναμένη μία δύο ἀλόγων γίνεται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ πρώτη, ἢ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ ΖΗ, καὶ παραβεβλήσθω ὁμοίως τὰ χωρία· ἔστι δὴ ἀκολούθως ῥητὴ μὲν ἡ ΖΘ, καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει· αἱ ΘΖ ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ, προσαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΖΚ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ δευτέρα ἡ ΚΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΖΗ· ὥστε ἡ τὸ ΛΘ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μέσης ἀποτομὴ πρώτη ἐστίν.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἔστιν ἡ προσαρμόζουσα ἡ ΖΚ σύμμετρος τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, τῇ ΖΗ· ἀποτομὴ ἄρα πέμπτη ἐστὶν ἡ ΚΘ· ὥστε ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ρια.

Ἀπὸ μέσου μέσου ἀφαιρουμένου ἀσυμμέ- 111.
τρου τῷ ὅλῳ, αἱ λοιπαὶ δύο ἄλογοι γίνονται, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἀφῃρήσθω γὰρ ὡς ἐπὶ τῶν προκειμένων κατα- Fig. 111.
γραφῶν ἀπὸ μέσου τοῦ ΒΓ μέσον τὸ ΒΔ, ἀσύμμετρον τῷ ὅλῳ· λέγω ὅτι ἡ τὸ ΕΓ δυναμένη μία ἐστὶ δύο ἀλόγων, ἤτοι μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, ἢ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

Ἐπεὶ γὰρ μέσον ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΒΓ ΒΔ, ἔσται ἀκολούθως ῥητὴ ἑκατέρα τῶν ΖΘ ΖΚ καὶ ἀσύμμετρος τῇ ΖΗ μήκει. Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ ΒΓ τῷ ΒΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΗΘ τῷ ΗΚ, ἀσύμμετρός ἐστι καὶ ἡ ΘΖ τῇ ΖΚ· αἱ ΘΖ ΖΚ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ, προςαρμόζουσα δὲ ἡ ΚΖ. Ἤτοι δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ ΖΗ, μήκει· ἀποτομὴ ἄρα τρίτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΚΛ, τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τρίτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ μέσης ἀποτομὴ δευτέρα· ὥςτε ἡ τὸ ΛΘ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΓ δυναμένη μέσης ἀποτομή ἐστι δευτέρα.

Εἰ δὲ ἡ ΘΖ τῆς ΖΚ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ οὐδετέρα τῶν ΘΖ ΖΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, τῇ ΖΗ, μήκει· ἀποτομὴ ἄρα ἕκτη ἐστὶν ἡ ΚΘ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς ἕκτης ἡ δυναμένη ἐστὶν ἡ μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα· ἡ τὸ ΛΘ ἄρα, τοῦτ' ἔστι τὸ ΕΓ, δυναμένη μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ριβ'.

Ἡ ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο 112.
ὀνομάτων.

Ἔστω ἀποτομὴ ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ οὐκ ἔστιν Fig. 112.
ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΔΓ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον παρὰ ῥητὴν τὴν ΔΓ παραβεβλήσθω ὀρθογώνιον τὸ ΓΕ, πλάτος ποιοῦν τὴν ΔΕ. Ἐπεὶ οὖν ἀποτομή ἐστιν ἡ ΑΒ, ἀποτομὴ πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. Ἔστω αὐτῇ προσαρμόζουσα ἡ ΕΖ· αἱ ΔΖ ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΖ τῆς ΖΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΔΖ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει. Πάλιν, ἐπεὶ ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΑΒ· ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων πρώτη ἐστὶν ἡ ΔΕ. Διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω μεῖζον ὄνομα τὸ ΔΗ· αἱ ΔΗ ΗΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι, καὶ ἡ ΔΗ τῆς ΗΕ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ μείζων ἡ ΔΗ σύμμετρός ἐστὶ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΔΓ μήκει. Ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΔΗ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΔΖ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ, ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΔΖ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ μήκει, ἀσύμμετρος δὲ ἡ ΔΖ τῇ ΖΕ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΕ μήκει. Καὶ εἴσι ῥηταί· αἱ ΗΖ ΖΕ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕ. Ἀλλὰ καὶ ῥητή, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Ἡ ἄρα ἀποτομὴ οὐκ ἔστιν ἡ αὐτὴ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἡ ἀποτομὴ καὶ αἱ μετ' αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί.

Τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην,

τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν δευτέραν, τὸ δὲ ἀπὸ μέσης ἀποτομῆς δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τρίτην, τὸ δὲ ἀπὸ ἐλάττονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν τετάρτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πέμπτην, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιούσης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν ἕκτην. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων· τοῦ μὲν πρώτου, ὅτι ῥητή ἐστιν· ἀλλήλων δὲ, ἐπεὶ τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί· δῆλον ὡς καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ἡ ἀποτομὴ οὐκ οὖσα ἡ αὐτὴ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων, ποιοῦσι δὲ πλάτη παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμεναι αἱ μὲν μετὰ τὴν ἀποτομὴν ἀποτομὰς, ἀκολούθως ἑκάστη τῇ τάξει τῇ καθ' αὑτήν, αἱ δὲ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τὰς ἐκ δύο ὀνομάτων, καὶ αὗται τῇ τάξει ἀκολούθως· ἕτεραι ἄρα εἰσὶν αἱ μετὰ τὴν ἀποτομὴν, καὶ ἕτεραι αἱ μετὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων, ὡς εἶναι τῇ τάξει πάσας ἀλόγους ιγ',

α'. Μέσην.
β'. Ἐκ δύο ὀνομάτων.
γ'. Ἐκ δύο μέσων πρώτην.
δ'. Ἐκ δύο μέσων δευτέραν.
ε'. Μείζονα.
ϛ'. Ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένην.
ζ'. Δύο μέσα δυναμένην.
η'. Ἀποτομήν.
θ'. Μέσης ἀποτομὴν πρώτην.
ι'. Μέσης ἀποτομὴν δευτέραν.
ια'. Ἐλάττονα.
ιβ'. Μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.
ιγ'. Μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσαν.

Πρότασις ριγ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ γινομένη ἀποτομὴ τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων. 113.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἐκ δύο ὀνομάτων δὲ ἡ ΒΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἔστω ἡ ΓΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΕΖ ἀποτομή ἐστιν, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς ΓΔ ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΕΖ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΓ. Fig. 11

Ἔστω γὰρ πάλιν τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ Η. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΕΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ Η· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ Η πρὸς τὴν ΕΖ. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ Η τῆς ΕΖ. Ἔστω τῇ Η ἴση ἡ ΕΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΖ· διελόντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς ὅλην τὴν ΖΚ ἐστὶν, ὡς ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ὡς γὰρ ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρός ἅπαντα τὰ ἑπόμενα. Ὡς δὲ ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΖ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ. Σύμμετρον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΒ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ, ἐπεὶ αἱ τρεῖς αἱ ΘΚ ΚΖ ΚΕ ἀνάλογόν εἰσι· σύμμετρος ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ μήκει· ὥςτε καὶ ἡ ΘΕ τῇ ΕΚ σύμμετρός ἐστι μήκει. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

τῶν ΘΕ ΒΔ, ῥητὸν δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΕ ΒΔ. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΔ παράκειται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ὥστε καὶ ἡ σύμμετρος αὐτῇ ἡ ΕΚ ῥητή ἐστι καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΔΒ, οὕτως ἡ ΖΚ πρὸς τὴν ΚΕ, αἱ δὲ ΓΔ ΔΒ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΖΚ ΚΕ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΔ μήκει· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΚ, καὶ σύμμετρος τῇ ΓΔ μήκει· αἱ ΖΚ ΚΕ ἄρα ῥηταὶ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ.

Ἤτοι δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, ἢ τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ ΚΕ.

Εἰ δὲ ἡ ΓΔ τῆς ΔΒ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΖΚ τῆς ΚΕ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΚ· εἰ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ ἡ ΚΕ· εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΓΔ ΔΒ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΖΚ ΚΕ· ὥστε ἀποτομή ἐστιν ἡ ΖΕ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΖΚ ΚΕ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι, τοῖς ΓΔ ΔΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ τὴν αὐτὴν τάξιν ἔχει τῇ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ριδ'.

Τὸ ἀπὸ ῥητῆς παρὰ ἀποτομὴν παραβαλ- 114.
λόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων,

ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔτι δὲ ἡ γινομένη ἐκ δύο ὀνομάτων τὴν αὐτὴν ἕξει τάξιν τῇ ἀποτομῇ.

Ἔστω ῥητὴ μὲν ἡ Α, ἀποτομὴ δὲ ἡ ΒΔ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΚΘ, ὥςτε τὸ ἀπὸ τῆς Α ῥητῆς παρὰ τὴν ΒΔ ἀποτομὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΚΘ· λέγω ὅτι ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ΒΔ ὀνόμασι, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν τῇ ΒΔ. Fig 114

Ἔστω γὰρ τῇ ΒΔ προςαρμόζουσα ἡ ΔΓ· αἱ ΒΓ ΓΔ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ Η. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ Η. Καὶ παρὰ ῥητὴν τὴν ΒΓ παραβέβληται· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ Η ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΚΘ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν Η. Μείζων δὲ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΚΘ τῆς Η. Κείσθω τῇ Η ἴση ἡ ΚΕ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΕ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ. Γεγονέτω ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ ἐστὶν, ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, τουτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ. Αἱ δὲ ΒΓ ΓΔ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ ΖΘ ἄρα δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς τὴν ΖΕ· ὥςτε

καὶ ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ τῷ ἀπὸ τῆς ΖΘ, αἱ γὰρ ΚΖ ΖΘ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥςτε ἡ ΖΚ καὶ τῇ ΚΕ σύμμετρός ἐστι μήκει. Ῥητὴ δέ ἐστιν ἡ ΚΕ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΚΖ, καὶ σύμμετρος τῇ ΒΓ μήκει. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΚΖ πρὸς τὴν ΖΘ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΚΖ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΖΘ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΚΖ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΖΘ μήκει· Αἱ δὲ ΒΓ ΓΔ ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ αἱ ΚΖ ΖΘ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἐκ δύο ὀνομάτων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ.

Εἰ μὲν οὖν ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ ΓΔ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΚΖ ΖΘ.

Εἰ δὲ ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ, καὶ ἡ ΚΖ τῆς ΖΘ μεῖζον δυνήσεται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ εἰ μὲν σύμμετρός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει, καὶ ἡ ΚΖ. Εἰ δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἡ ΖΘ. Εἰ δὲ οὐδετέρα τῶν ΒΓ ΓΔ, καὶ οὐδετέρα τῶν ΚΖ ΖΘ.

Ἐκ δύο ἄρα ὀνομάτων ἐστὶν ἡ ΚΘ, ἧς τὰ ὀνόματα τὰ ΚΖ ΖΘ σύμμετρά ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΒΓ ΓΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔτι ἡ ΚΘ τῇ ΒΓ τὴν αὐτὴν ἔχει τάξιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ριέ.

Ἐὰν χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων, ἧς τὰ ὀνόματα σύμμετρά τέ ἐστι τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ῥητή ἐστι. 115.

Περιεχέσθω γὰρ χωρίον τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ, ὑπὸ ἀποτομῆς τῆς ΑΒ, καὶ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τῆς ΓΔ, ἧς μεῖζον ὄνομά ἐστι τὸ ΓΕ· καὶ ἔστω τὰ ὀνόματα τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων τὰ ΓΕ ΕΔ σύμμετρά τε τοῖς τῆς ἀποτομῆς ὀνόμασι τοῖς ΑΖ ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· καὶ ἔστω τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ δυναμένη ἡ Η· λέγω ὅτι ῥητή ἐστιν ἡ Η. Fig. 11

Ἐκκείσθω γὰρ ῥητὴ ἡ Θ, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Θ ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω πλάτος ποιοῦν τὴν ΚΛ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ, ἧς τὰ ὀνόματα ἔστω τὰ ΚΜ ΜΛ, σύμμετρα τοῖς τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων ὀνόμασι τοῖς ΓΕ ΕΔ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ. Ἀλλὰ καὶ αἱ ΓΕ ΕΔ σύμμετροί τέ εἰσι ταῖς ΑΖ ΖΒ, καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΖΒ, οὕτως ἡ ΚΜ πρὸς τὴν ΜΛ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΛΜ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς λοιπὴν τὴν ΚΛ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΖ πρὸς τὴν ΚΜ. Σύμμετρος δὲ ἡ ΑΖ τῇ ΚΜ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΚΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΚΛ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ τῷ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΚΛ. Ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΚΛ τῷ ἀπὸ τῆς Θ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Η· σύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η τῷ ἀπὸ τῆς Θ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Θ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Η· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ Η, καὶ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΑΒ.

Ἐὰν ἄρα χωρίον περιέχηται ὑπὸ ἀποτομῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ γέγονεν ἡμῖν καὶ διὰ τούτων φανερὸν, ὅτι δυνατόν ἐστι ῥητὸν χωρίον ὑπὸ ἀλόγων εὐθειῶν περιέχεσθαι.

Πρότασις ρις΄.

Ἀπὸ μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον αἱ αὐταί. 116.

Ἔστω μέση ἡ Α· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς Α ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν προτερόν αἱ αὐταί. Fig. 116.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ Β, καὶ τῷ ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ· τὸ γὰρ ὑπὸ ἀλόγου καὶ ῥητῆς ἄλογόν ἐστι. Καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπὸ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν δὴ, τῷ ὑπὸ τῶν Β Γ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Δ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Δ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ᾿ οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν Γ. Ὁμοίως δὴ τῆς τοιαύτης τάξεως ἐπ᾿ ἄπειρον προβαινούσης, φανερὸν ὅτι ἀπὸ τῆς μέσης ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον αἱ αὐταί· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ δεκάτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ἘΝΔΕΚΑΤΟΝ.

Ὅροι.

α΄. Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βά- 1.
θος ἔχον.

β΄. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια. 2.

γ΄. Εὐθεῖα πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν 3.
πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας
ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ γωνίας.

δ΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, 4.
ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς
ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπι-
πέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσιν.

ε΄. Εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν, 5.
ὅταν ἀπὸ τοῦ μετεώρου πέρατος τῆς εὐθείας ἐπὶ τὸ
ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ, καὶ ἀπὸ τοῦ γενομένου ση-
μείου ἐπὶ τὸ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ πέρας τῆς εὐθείας εὐ-
θεῖα ἐπιζευχθῇ, ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῆς
ἀχθείσης καὶ τῆς ἐφεστώσης.

ς΄. Ἐπιπέδου πρὸς ἐπίπεδον κλίσις ἐστὶν 6.
ἡ περιεχομένη ὀξεῖα γωνία ὑπὸ τῶν πρὸς ὀρθὰς τῇ
κοινῇ τομῇ ἀγομένων πρὸς τῷ αὐτῷ σημείῳ ἐν ἑκα-
τέρῳ τῶν ἐπιπέδων.

ζ΄. Ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὁμοίως κε- 7.
κλίσθαι λέγεται, καὶ ἕτερον πρὸς ἕτερον· ὅταν αἱ
εἰρημέναι τῶν κλίσεων γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσι.

η΄. Πα-

η΄. Παράλληλα ἐπίπεδά ἐστι τὰ ἀσύμπτωτα. 8.

θ΄. Ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι τὰ ὑπὸ 9.
ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος.

ι΄. Ἴσα τε καὶ ὅμοια στερεὰ σχήματά ἐστι 10.
τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τῷ πλήθει καὶ τῷ μεγέθει.

ια΄. Στερεὰ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ πλειόνων ἢ δύο 11.
γωνιῶν ἐπιπέδων περιεχομένη, μὴ οὐσῶν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων.

ιβ΄. Πυραμίς ἐστι σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις περι- 12.
εχόμενον, ἀπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνεστώς.

ιγ΄. Πρίσμα ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ἐπιπέδοις πε- 13.
ριεχόμενον, ὧν δύο τὰ ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι καὶ παράλληλα, τὰ δὲ λοιπὰ παραλληλόγραμμα.

ιδ΄. Σφαῖρά ἐστιν, ὅταν ἡμικυκλίου μενούσης 14.
τῆς διαμέτρου, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα.

ιε΄. Ἄξων δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν ἡ μένουσα 15.
εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ ἡμικύκλιον στρέφεται.

ις΄. Κέντρον δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶ τὸ αὐτὸ ὃ καὶ 16.
τοῦ ἡμικυκλίου.

ιζ΄. Διάμετρος δὲ τῆς σφαίρας ἐστὶν εὐθεῖά 17.
τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη, καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

ιη΄. Κῶνός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου τριγώνου με- 18.
νούσης μιᾶς πλευρᾶς τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν γωνίαν, περιενεχθὲν τὸ τρίγωνον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. Κἂν μὲν ἡ μένουσα εὐθεῖα ἴση ᾖ τῇ λοιπῇ τῇ περὶ τὴν ὀρθὴν περιφερομένῃ, ὀρθογώνιος ἔσται ὁ κῶνος· ἐὰν δὲ ἐλάττων, ἀμβλυγώνιος· ἐὰν δὲ μείζων, ὀξυγώνιος.

ιθ'. Ἄξων δὲ τοῦ κώνου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ τρίγωνον στρέφεται. 19.

κ'. Βάσις δὲ ὁ κύκλος ὁ ὑπὸ τῆς περιφερομένης εὐθείας γραφόμενος. 20.

κα'. Κύλινδρός ἐστιν, ὅταν ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μενούσης μιᾶς πλευρᾶς, περιενεχθὲν τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὸ περιληφθὲν σχῆμα. 21.

κβ'. Ἄξων δὲ τοῦ κυλίνδρου ἐστὶν ἡ μένουσα εὐθεῖα περὶ ἣν τὸ παραλληλόγραμμον στρέφεται. 22.

κγ'. Βάσεις δὲ οἱ κύκλοι οἱ ὑπὸ τῶν ἀπεπαντίον περιαγομένων δύο πλευρῶν γραφόμενοι. 23.

κδ'. Ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροί εἰσιν, ὧν οἵ τε ἄξονες καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων ἀνάλογόν εἰσι. 24.

κε'. Κύβος ἐστὶ σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενον. 25.

κς'. Τετράεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ τεττάρων τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 26.

κζ'. Ὀκτάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 27.

κη'. Δωδεκάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον. 28.

κθ'. Εἰκοσάεδρόν ἐστι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλεύρων περιεχόμενον. 29.

Πρότασις α'.

Εὐθείας γραμμῆς μέρος μέν τι οὐκ ἔστιν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι ἐν μετεωροτέρῳ. 1.

Εἰ γὰρ δυνατόν, εὐθείας γραμμῆς τῆς ΑΒΓ μέρος μέν τι τὸ ΑΒ ἔστω ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, μέρος δέ τι τὸ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ. Fig. 1

Ἔσται δή τις τῇ ΑΒ συνεχὴς εὐθεῖα ἐπ' εὐθείας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ. Ἔστω ἡ ΒΔ· δύο δὴ δοθεισῶν τῶν ΑΒΓ ΑΒΔ κοινὸν τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὅπερ ἀδύνατον· εὐθεῖα γὰρ εὐθείᾳ οὐ συμβάλλει κατὰ πλείονα σημεῖα ἢ καθ' ἕν· (εἰ δὲ μή, ἐφαρμόσουσιν ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι).

Εὐθείας ἄρα γραμμῆς μέρος . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. 2.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον· λέγω ὅτι αἱ ΑΒ ΓΔ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ πᾶν τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Fig. 2.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῶν ΕΓ ΕΒ τυχόντα σημεῖα, τὰ Ζ Η, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΒ ΖΗ, καὶ διήχθωσαν αἱ ΖΘ ΗΚ· λέγω πρῶτον ὅτι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Εἰ γάρ ἐστι τοῦ ΕΓΒ τριγώνου μέρος ἤτοι τὸ ΖΓΘ, ἢ τὸ ΗΒΚ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ μιᾶς τῶν ΕΓ ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ. Εἰ δὲ τοῦ ΕΓΒ τριγώνου τὸ ΖΓΒΗ μέρος ἐστὶν ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ λοιπὸν ἐν ἄλλῳ, ἔσται καὶ ἀμφοτέρων τῶν ΕΓ ΕΒ εὐθειῶν μέρος μέν τι ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, τὸ δὲ ἐν ἄλλῳ, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· τὸ ἄρα ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δέ ἐστι τὸ ΕΓΒ τρίγωνον, ἐν τούτῳ καὶ ἑκατέρα τῶν ΕΓ ΕΒ· ἐν ᾧ δὲ ἑκατέρα τῶν ΕΓ ΕΒ, ἐν τούτῳ καὶ αἱ ΑΒ ΓΔ· αἱ ΑΒ ΓΔ ἄρα εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ, καὶ τὸ ΕΓΒ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστίν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνῃ ἄλληλα, ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ εὐθεῖά ἐστι. 3.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ ΒΓ τεμνέτω ἄλληλα, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΔΒ γραμμή· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ γραμμὴ εὐθεῖά ἐστιν. Fig. 3.

Εἰ γὰρ μή, ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β, ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΕΒ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ἡ ΔΖΒ· ἔσται δὴ δύο εὐθειῶν τῶν ΔΕΒ ΔΖΒ τὰ αὐτὰ πέρατα, καὶ περιέξουσι δηλαδὴ χωρίον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα αἱ ΔΕΒ ΔΖΒ εὐθεῖαί εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη, εὐθεῖα ἔσται, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνῃ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι' αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 4.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΕΖ δύο εὐθείαις ταῖς ΑΒ ΓΔ τεμνούσαις ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον ἀπὸ τοῦ Ε πρὸς ὀρθὰς ἐφεστάτω· λεγω ὅτι ἡ ΕΖ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Fig. 4.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΑΕ ΕΒ ΓΕ ΕΔ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ διήχθω τις διὰ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΗΕΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΓΒ, καὶ ἔτι ἀπὸ τυχόντος τοῦ Ζ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ ΖΗ ΖΔ ΖΓ ΖΘ ΖΒ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΕ ΕΔ δυσὶ ταῖς ΓΕ

ΕΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΓΒ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΕΔ τρίγωνον τῷ ΓΕΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται· ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΓ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΕΘ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΗΕ ΒΕΘ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΑΕ τῇ ΕΒ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξουσιν· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΗΕ τῇ ΕΘ, ἡ δὲ ΑΗ τῇ ΒΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΖΕ, βάσις ἄρα ἡ ΖΑ βάσει τῇ ΖΒ ἴση ἐστίν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΖΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΒ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΑ ΑΔ δυσὶ ταῖς ΖΒ ΒΓ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΖΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐδείχθη ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΑΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἐδείχθη ἡ ΑΗ τῇ ΒΘ ἴση, ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΖΒ ἴση, δύο δὴ αἱ ΖΑ ΑΗ δυσὶ ταῖς ΖΒ ΒΘ ἴσαι εἰσί. Καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΑΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΖΒΘ· βάσις ἄρα ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐδείχθη ἡ ΗΕ τῇ ΕΘ, κοινὴ δὲ ἡ ΕΖ· δύο δὴ αἱ ΗΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΘΕ ΕΖ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΖΗ βάσει τῇ ΖΘ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΕΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ ἴση ἐστίν· ὀρθὴ ἄρα ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΗΕΖ ΘΕΖ γωνιῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς τὴν ΗΘ τυχόντως διὰ τοῦ Ε ἀχθεῖσαν ὀρθή ἐστιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι ἡ ΖΕ καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Εὐθεῖα δὲ πρὸς ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν, ὅταν πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιῇ

γωνίας· ἡ ΖΕ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ ὑποκείμενον ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ εὐθειῶν· ἡ ΖΕ ἄρα πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα δύο εὐθείας . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε.

Ἐὰν εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς ἐπισταθῇ, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. 5.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΓ ΒΔ ΒΕ πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τῆς κατὰ τὸ Β ἁφῆς ἐφεστάτω· λέγω ὅτι αἱ ΒΓ ΒΔ ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Fig. 5.

Μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστωσαν αἱ μὲν ΒΔ ΒΕ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ἡ δὲ ΒΓ ἐν μετεωροτέρῳ, καὶ ἐκβεβλήσθω τὸ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπίπεδον· κοινὴν δὴ τομὴν ποιήσει ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΒΖ. Ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ τῷ διηγμένῳ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΒΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ ΒΕ· καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΒΕ ἄρα ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΒΔ ΒΕ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΑΒ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ὥςτε καὶ πρὸς πάσας τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΑΒ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΒΖ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ὑπόκειται δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ὀρθή· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. Καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ εὐθεῖα ἐν μετεωρο-

τέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΓ ΒΔ ΒΕ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα τρισὶν εὐθείαις . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι. 6.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστωσαν· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Fig. 6.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ εὐθεῖα, καὶ ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΑΕ ΑΔ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ τῆς ΑΒ ἑκατέρα τῶν ΒΔ ΒΕ, οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΑΒΕ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΒ ΓΔΕ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΒΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΑ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΔΑ ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΔ ΔΓ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα τρισὶν εὐθείαις ταῖς ΒΔ ΔΑ ΔΓ πρὸς ὀρθὰς

ἐπὶ τῆς ἀφῆς ἐφέστηκεν· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΒΔ ΔΑ ΔΓ ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΔΒ ΔΑ, ἐν τούτῳ καὶ ἡ ΑΒ, πᾶν γὰρ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· αἱ ἄρα ΑΒ ΒΔ ΔΓ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΓΔΒ γωνιῶν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ΄.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ληφθῇ δὲ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα· ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. 7.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Ε Ζ· λέγω ὅτι ἡ ἐπὶ τὰ Ε Ζ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Fig. 7.

Μὴ γάρ, ἀλλ᾽, εἰ δυνατόν, ἔστω ἐν μετεωροτέρῳ ὡς ἡ ΕΗΖ, καὶ διήχθω διὰ τῆς ΕΗΖ ἐπίπεδον· τομὴν δὴ ποιήσει ἐν ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω ὡς τὴν ΕΖ· δύο ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΕΗΖ, ΕΖ χωρίον περιέξουσιν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν μετεωροτέρῳ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΓΔ ἄρα παραλλήλων ἐστὶν ἐπιπέδῳ ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ Ζ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι παράλληλοι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ· καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 8.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ ΑΒ ΓΔ, ἡ δὲ ἑτέρα αὐτῶν ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ ἡ λοιπὴ ἡ ΓΔ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. Fig. 8.

Συμβαλλέτωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΓΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Β Δ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ ΓΔ ΒΔ ἄρα ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Ἤχθω τῇ ΒΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἡ ΔΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΔΕ, ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΕ ΑΕ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ, πρὸς ὀρθάς ἐστιν ἡ ΑΒ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΑΒΔ ΑΒΕ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΔ ΓΔΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΒ· ἡ ΓΔ ἄρα πρὸς τὴν ΒΔ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΔ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΒ ἴσαι εἰσί, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΒ ἴση, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΑΔ· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΕ δυσὶ ταῖς ΕΔ ΔΑ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΑΕ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΑ ἐστὶν ἴση. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΔΑ· ἡ ΕΔ ἄρα πρὸς τὴν ΑΔ ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ πρὸς τὴν ΔΒ ὀρθή· ἡ ΕΔ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας

αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΑΔ ΔΒ ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας ἡ ΕΔ. Ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ ἐστὶν ἡ ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ εἰσὶν αἱ ΑΒ ΒΔ. Ἐν ᾧ δὲ αἱ ΑΒ ΒΔ ἐν τούτῳ ἐστὶ καὶ ἡ ΔΓ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΔΓ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥςτε καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΒΔ· ἡ ΓΔ ἄρα δύο εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ταῖς ΔΕ ΔΒ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Δ τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ὥςτε καὶ ἡ ΓΔ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΔΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· τὸ δὲ διὰ τῶν ΔΕ ΔΒ ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενόν ἐστιν· ἡ ΓΔ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐὰν ἄρα ὦσιν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις θ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι, καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ, καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι. 9.

Ἔστω γὰρ ἑκατέρα τῶν ΑΒ ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος, μὴ οὖσα αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ. Fig. 9.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΕΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τῇ ΕΖ ἐν μὲν τῷ διὰ τῶν ΕΖ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΘ, ἐν δὲ τῷ διὰ τῶν ΖΕ ΓΔ τῇ ΕΖ πάλιν πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖ πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ ΗΚ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΕΖ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Καί ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΑΒ παράλληλος· καὶ ἡ ΑΒ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΘΗ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ τῷ διὰ τῶν ΘΗ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Ἐὰν δὲ δύο εὐθεῖαι τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ

πρὸς ὀρθὰς ὦσι, παράλληλοί εἰσιν αἱ εὐθεῖαι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Αἱ ἄρα τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων 10.
παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας γωνίας περιέξουσι.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ἁπτόμεναι ἀλλή- Fig. 10.
λων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΕ ΕΖ ἁπτομένας ἀλλήλων ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ αἱ ΒΑ ΒΓ ΕΔ ΕΖ ἴσαι ἀλλήλαις, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ ΓΖ ΒΕ ΑΓ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΑ τῇ ΕΔ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος, καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ ΓΖ τῇ ΒΕ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Αἱ δὲ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ μὴ οὖσαι αὐτῇ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΓΖ καὶ ἴση. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΑΓ ΔΖ· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιά.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου μετεώρου 11.
ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον μετέωρον τὸ Α, τὸ δὲ δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν. Fig. 1

Διήχθω γάρ τις ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖα ὡς ἔτυχεν ἡ ΒΓ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἡ ΑΔ. Εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΔ κάθετός ἐστι καὶ ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΒΓ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΔΕ κάθετος ἡ ΑΖ, καὶ διὰ τοῦ Ζ σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΓ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΑ ΔΕ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ ΒΓ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῇ παράλληλος ἡ ΗΘ. Ἐὰν δὲ ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ λοιπὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ, ὀρθή ἐστιν ἡ ΗΘ. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΑΖ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΔΑ ἐπιπέδῳ· ἡ ΗΘ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΖΑ· ὥςτε καὶ ἡ ΖΑ ὀρθή ἐστι πρὸς τὴν ΗΘ. Ἔστι δὲ ἡ ΑΖ καὶ πρὸς τὴν ΔΕ ὀρθή· ἡ ΑΖ ἄρα πρὸς ἑκατέραν τῶν ΗΘ ΔΕ ὀρθή ἐστιν. Ἐὰν δὲ εὐθεῖα δυσὶν εὐθείαις τεμνούσαις ἀλλήλας ἐπὶ τῆς τομῆς πρὸς ὀρθὰς ἐπισταθῇ, καὶ τῷ δι᾽ αὐτῶν ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται· ἡ ΖΑ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΕΔ ΗΘ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΕΔ ΗΘ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ ὑποκείμενον· ἡ ΑΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἀπὸ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου μετεώρου τοῦ

Α ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιβ.

Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. 12.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν ἐπίπεδον τὸ ὑποκείμενον, τὸ δὲ πρὸς αὐτῷ σημεῖον τὸ Α· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖαν γραμμὴν ἀναστῆσαι. Fig. 12.

Νενοήσθω μετέωρόν τι σημεῖον τὸ Β, καὶ ἀπὸ τοῦ Β ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετος ἤχθω ἡ ΒΓ, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ.

Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι παράλληλοί εἰσιν αἱ ΑΔ ΓΒ, ἡ δὲ μία αὐτῶν ἡ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι.

Τῷ ἄρα δοθέντι ἐπιπέδῳ, ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα γραμμὴ ἀνέσταται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιγ'.

Ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς οὐκ ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. 13.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τοῦ Α τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτωσαν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ διήχθω τὸ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπίπεδον, τομὴν δὴ ποιήσει διὰ τοῦ Α ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ εὐθεῖαν. Ποιείτω τὴν ΔΑΕ· αἱ ἄρα ΑΒ ΑΓ ΔΑΕ εὐθεῖαι ἐν ἑνί εἰσιν ἐπιπέδῳ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῷ Fig. 13.

ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΔΑΕ οὖσα ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΑΕ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΑΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ, καί εἰσιν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ σημείου τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀναστήσονται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. 14.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ πρὸς ἑκάτερον τῶν ΓΔ ΕΖ ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα. Fig. 14

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Συμπιπτέτωσαν· ποιήσουσι δὴ κοινὴν τομὴν εὐθεῖαν. Ποιείτωσαν τὴν ΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΗΘ τυχὸν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ ΒΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς τὴν ΒΚ ἄρα εὐθεῖαν οὖσαν ἐν τῷ ΕΖ ἐκβληθέντι ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΚ γωνία ὀρθή ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΚ ὀρθή ἐστι. Τριγώνου δὴ τοῦ ΑΒΚ αἱ δύο γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΚ ΒΑΚ δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα τὰ ΓΔ ΕΖ ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται· παράλληλα ἄρα ἐστὶ τὰ ΓΔ ΕΖ ἐπίπεδα.

Πρὸς ἃ ἐπίπεδα ἄρα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιέ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων ὦσι, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· παράλληλά ἐστι τὰ δἰ αὐτῶν ἐπίπεδα. 15.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΑΒ ΒΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΔΕ ΕΖ ἔστωσαν, μὴ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· λέγω ὅτι ἐκβαλλόμενα τὰ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ἐπίπεδα οὐ συμπεσεῖται ἀλλήλοις. Fig. 15.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΒΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Η τῇ μὲν ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, τῇ δὲ ΕΖ ἡ ΗΚ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΗ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκατέρα τῶν ΗΘ ΗΚ οὖσα ἐν τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΒΗΘ ΒΗΚ γωνιῶν. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΑ τῇ ΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΗΒΑ ΒΗΘ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΗΒΑ· ἡ ΗΒ ἄρα τῇ ΒΑ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῇ ΒΓ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΒΗ δυσὶν εὐθείαις ταῖς ΒΑ ΒΓ τεμνούσαις ἀλλήλας πρὸς ὀρθὰς ἐφέστηκεν· ἡ ΒΗ ἄρα καὶ τῷ διὰ τῶν ΒΑ ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἡ ΒΗ καὶ τῷ διὰ τῶν ΗΘ ΗΚ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Τὸ δὲ διὰ τῶν ΗΘ ΗΚ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ· ἡ ΒΗ ἄρα τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπιπέδῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. Ἐδείχθη δὲ ἡ ΗΒ καὶ τῷ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· ἔστι δὲ καὶ τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ ἐπι-

πέδῳ ὀρθή· ἡ ΒΗ ἄρα πρὸς ἑκάτερον τῶν διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΖ ΕΖ ἐπιπέδων ὀρθή ἐστι. Πρὸς ἃ δὲ ἐπίπεδα ἡ αὐτὴ εὐθεῖα ὀρθή ἐστι, παράλληλά ἐστι τὰ ἐπίπεδα· παράλληλον ἄρα ἐστὶ τὸ διὰ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπίπεδον τῷ διὰ τῶν ΔΕ ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιϛ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα παράλληλα ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνηται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι. 16.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΑΒ ΓΔ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΖΗΘ τεμνέσθω, κοιναὶ δὲ αὐτῶν τομαὶ ἔστωσαν αἱ ΕΖ ΗΘ· λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ. Fig. 16

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΕΖ ΗΘ, ἤτοι ἐπὶ τὰ Ζ Θ μέρη, ἢ ἐπὶ τὰ Ε Η συμπεσοῦνται. Ἐκβεβλήσθωσαν πρότερον ὡς ἐπὶ τὰ Ζ Θ μέρη, καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΕΖΚ ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ καὶ πάντα ἄρα τὰ ἐπὶ τῆς ΕΖΚ σημεῖα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Ἓν δὲ τῶν ἐπὶ τῆς ΕΖΚ εὐθείας σημεῖόν ἐστι τὸ Κ· τὸ Κ ἄρα ἐν τῷ ΑΒ ἐστὶν ἐπιπέδῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ τὸ Κ καὶ ἐν τῷ ΓΔ ἐστὶν ἐπιπέδῳ· τὰ ΑΒ ΓΔ ἄρα ἐπίπεδα ἐκβαλλόμενα συμπεσοῦνται. Οὐ συμπίπτουσι δέ, διὰ τὸ παράλληλα ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ ΗΘ εὐθεῖαι ἐκβαλλόμεναι ἐπὶ τὰ Ζ Θ μέρη συμπεσοῦνται. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι αἱ ΕΖ ΗΘ εὐθεῖαι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Ε Η μέρη ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. Αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι (καὶ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι) παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΖ τῇ ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα παράλληλα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ιζ.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τέμνωνται, εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. 17.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΓΔ ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΗΘ ΚΛ ΜΝ τεμνέσθωσαν κατὰ τὰ Α Ε Β Γ Ζ Δ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Fig. 17.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΒΔ ΑΔ, καὶ συμβαλλέτω ἡ ΑΔ τῷ ΚΛ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ξ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΞ ΞΖ. Καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΚΛ ΜΝ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΕΒΔΞ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΕΞ ΒΔ παράλληλοί εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΗΘ ΚΛ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΞΖΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ αἱ ΑΓ ΞΖ παράλληλοί εἰσι. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΔ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΒΔ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΕΞ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ. Πάλιν ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΓ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΓ εὐθεῖα ἦκται ἡ ΞΖ, ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΞ πρὸς τὴν ΞΔ, οὕτως ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΔ.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι ὑπὸ παραλλήλων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιη.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ πάντα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 18.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω· λέγω ὅτι καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς Fig. 18.

ΑΒ ἐπίπεδα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδον τὸ ΔΕ, καὶ ἔστω κοινὴ τομὴ τοῦ ΔΕ ἐπιπέδου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἡ ΓΕ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΓΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ τῇ ΓΕ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἐν τῷ ΔΕ ἐπιπέδῳ ἡ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθή ἐστι, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ· ὥςτε καὶ πρὸς τὴν ΓΕ ὀρθή ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΒΖ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ ὀρθή· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΖΗ. Ἡ δὲ ΑΒ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι· καὶ ἡ ΗΖ ἄρα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι. Καὶ ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστιν, ὅταν αἱ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων πρὸς ὀρθὰς ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ λοιπῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὦσι. Καὶ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων τῇ ΓΕ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΔΕ πρὸς ὀρθὰς ἀχθεῖσα ἡ ΖΗ ἐδείχθη τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς· τὸ ἄρα ΔΕ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ πάντα τὰ διὰ τῆς ΑΒ ἐπίπεδα ὀρθὰ τυγχάνοντα πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιθ'.

Ἐὰν δύο ἐπίπεδα τέμνοντα ἄλληλα ἐπιπέδῳ τινὶ πρὸς ὀρθὰς ᾖ, καὶ ἡ κοινὴ αὐτῶν τομὴ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔσται. 19.

Δύο γὰρ ἐπίπεδα τὰ ΑΒ ΒΓ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΒΔ· λέγω ὅτι ἡ ΒΔ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν. Fig. 1

Μὴ γάρ, καὶ ἤχθωσαν ὑπὸ τοῦ Δ σημείου ἐν μὲν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῇ ΑΔ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΕ, ἐν δὲ τῷ ΒΓ ἐπιπέδῳ τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΑΔ πρὸς ὀρθὰς ἐν τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ ἦκται ἡ ΔΕ· ἡ ΔΕ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΔΖ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· ἀπὸ τοῦ αὐτοῦ ἄρα σημείου τοῦ Δ τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀνεσταμέναι εἰσὶν ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄλλη τις εὐθεῖα τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου ἀνασταθήσεται πρὸς ὀρθὰς, πλὴν τῆς ΔΒ κοινῆς τομῆς τῶν ΑΒ ΒΓ ἐπιπέδων.

Ἐὰν ἄρα δύο ἐπίπεδα τέμνοντα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κ΄.

Ἐὰν στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχηται, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. 20.

Στερεὰ γὰρ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ περιεχέσθω· λέγω ὅτι τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ γωνιῶν δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. *Fig.* 20.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ δὲ οὔ, ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ ἐν τῷ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπιπέδῳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου διαχθεῖσα ἡ ΒΕΓ τεμνέτω τὰς

ΑΒ ΑΓ εὐθείας κατὰ τὰ Β Γ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔΒ ΔΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ· δύο δὴ αἱ ΔΑ ΑΒ δυσὶν ταῖς ΑΕ ΑΒ ἴσαι εἰσὶν, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΒ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ ΔΓ τῇ ΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ ἐδείχθη ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΓ λοιπῆς τῆς ΕΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσεως τῆς ΕΓ μείζων ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΑΓ μείζων ἐστίν. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἴση· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΒ ΔΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ μείζονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ σύνδυο λαμβανόμεναι τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν.

Ἐὰν ἄρα στερεὰ γωνία ὑπὸ τριῶν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κά.

Ἅπασα στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται. 21.

Ἔστω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Α περιεχομένη ὑπὸ ἐπιπέδων γωνιῶν, τῶν ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ· λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. Fig. 2

Εἰλήφθω γὰρ ἐφ' ἑκάστης τῶν ΑΒ ΑΓ ΑΔ τυχόντα σημεῖα τὰ Β Γ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΓ ΓΔ ΔΒ. Καὶ ἐπεὶ στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων περιέχεται τῶν ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ΓΒΔ, δύο ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΓΒΔ μείζονές εἰσι. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΓΔ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ὑπὸ ΓΔΑ ΑΔΒ τῆς ὑπὸ

ΓΔΒ μείζονές εἰσιν· αἱ ἓξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ΒΓΑ ΑΓΔ ΓΔΑ ΑΔΒ τριῶν τῶν ὑπὸ ΓΒΔ ΒΓΔ ΓΔΒ μείζονές εἰσιν. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΓΒΔ ΒΓΔ ΓΔΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἓξ ἄρα αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΒΔ ΒΓΑ ΑΓΔ ΓΔΑ ΑΔΒ δύο ὀρθῶν μείζονές εἰσι. Καὶ ἐπεὶ ἑκάστου τῶν ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΒ τριγώνων αἱ τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, αἱ ἄρα τῶν τριῶν τριγώνων ἐννέα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ ΑΓΒ ΒΑΓ ΑΓΔ ΔΑΓ ΓΔΑ ΑΔΒ ΔΒΑ ΒΑΔ ἓξ ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὧν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΒΓΑ ΑΓΔ ΓΔΑ ΑΔΒ ΔΒΑ ἓξ γωνίαι δύο ὀρθῶν εἰσι μείζονες· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΓΑΔ ΔΑΒ τρεῖς γωνίαι περιέχουσαι τὴν στερεὰν γωνίαν τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν.

Ἅπασα ἄρα στερεὰ γωνία . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κβ΄.

22. Ἐὰν ὦσι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιέχωσι δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι· δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἐπιζευγνυουσῶν τὰς ἴσας εὐθείας τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἔστωσαν τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΗΘΚ, αἱ δὲ ὑπὸ ΔΕΖ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ, καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΗΘΚ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ, καὶ ἔστωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ εὐθεῖαι, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τουτ᾽ ἔστιν ὅτι τῶν ΑΓ ΔΖ ΗΚ δύο Fig. 22.

ὁποιαιοῦν τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Εἰ μὲν οὖν αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, φανερὸν ὅτι καὶ, τῶν ΑΓ ΔΖ ΗΚ ἴσων γενομένων, δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΘΚ εὐθείᾳ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ, τῇ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΛ· καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ ἴση ἡ ΘΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ ΗΛ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΚΘ ΘΛ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ πρὸς τῷ Β γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσιν, ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΚΘΛ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΗΘΛ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΗΘ ΘΛ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΘΛ γωνίας τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων· βάσις ἄρα ἡ ΗΛ βάσεως τῆς ΔΖ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ αἱ ΗΚ ΚΛ τῆς ΗΛ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΗΚ ΚΛ τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΑΓ· αἱ ΑΓ ΗΚ ἄρα τῆς λοιπῆς τῆς ΔΖ μείζονές εἰσιν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΓ ΔΖ τῆς ΗΚ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΔΖ ΗΚ τῆς ΑΓ. Δυνατὸν ἄρα ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐὰν ἄρα ὦσι τρεῖς γωνίαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κγ'.

Ἐκ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι· δεῖ 23.

δὲ τὰς τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονας εἶναι.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, ἔτι δὲ αἱ τρεῖς τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. Fig. 23.

Ἀπειλήφθωσαν ἴσαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Συνεστάτω τὸ ΛΜΝ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΑΓ τῇ ΛΜ, τὴν δὲ ΔΖ τῇ ΜΝ, καὶ ἔτι τὴν ΗΚ τῇ ΛΝ, καὶ περιγεγράφθω περὶ τὸ ΛΜΝ τρίγωνον κύκλος ὁ ΛΜΝ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον· ἔσται δὴ ἤτοι ἐντὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, ἢ ἐκτός.

Ἔστω πρότερον ἐντὸς, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ ΜΞ ΝΞ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μή· ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἀλλ' ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΛΞ τῇ ΞΜ δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΛΞ ΞΜ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΛΜ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΛΞΜ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῇ ὑπὸ ΜΞΝ ἐστὶν ἴση, καὶ ἔτι ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ γωνίαι τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΛΞΜ ΜΞΝ ΝΞΛ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ αἱ τρεῖς αἱ ὑπὸ ΛΞΜ ΜΞΝ ΝΞΛ τέτρασιν ὀρθαῖς εἰσὶν ἴσαι· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. Ὑπόκεινται δὲ καὶ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ ἴση ἐστί· Λέγω δὴ

ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΞ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥςτε καὶ λοιπὴ ἡ ΛΟ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΟ πρὸς τὴν ΟΞ, οὕτως ἡ ΜΠ πρὸς τὴν ΠΞ· παράλληλος ἄρα ἡ ΛΜ τῇ ΟΠ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τῷ ΟΠΞ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. Μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. Ἀλλ' ἡ ΛΜ κεῖται τῇ ΑΓ ἴση· καὶ ἡ ΑΓ ἄρα τῆς ΟΠ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ ΞΠ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΔΕΖ τῆς ὑπὸ ΜΞΝ μείζων ἐστὶν, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΝΞΛ· αἱ ἄρα τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ τριῶν τῶν ὑπὸ ΛΞΜ ΜΞΝ ΝΞΛ μείζονές εἰσιν. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ τεσσάρων ὀρθῶν ἐλάσσονες ὑπόκεινται· πολλῷ ἄρα αἱ ὑπὸ ΛΞΜ ΜΞΝ ΝΞΛ τεσσάρων ὀρθῶν εἰσιν ἐλάσσονες. Ἀλλὰ καὶ ἴσαι, ὅπερ ἐστὶν ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Ἀνεστάτω δὴ ἀπὸ τοῦ Ξ σημείου τῷ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· καὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΡΛ ΡΜ ΡΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΡ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΛΜΝ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς ἑκάστην ἄρα τῶν ΛΞ ΜΞ ΝΞ ὀρθή ἐστιν ἡ ΡΞ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΞΜ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΞΡ· βάσις ἄρα ἡ ΡΛ βάσει τῇ ΡΜ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ

ἡ ΡΝ ἑκατέρᾳ τῶν ΡΛ ΡΜ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΡΛ ΡΜ ΡΝ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον ὑπόκειται τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΛΞ ΞΡ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΛΞ ΞΡ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΡ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΛΞΡ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΡΛ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΡΛ. Ἀλλὰ τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἐστὶν ἑκάστη τῶν ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ, τῇ δὲ ΡΛ ἴση ἑκατέρα τῶν ΡΜ ΡΝ· ἑκάστη ἄρα τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ ἑκαστῃ τῶν ΡΛ ΡΜ ΡΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΡ ΡΜ δυσὶ ταῖς ΑΒ ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΛΜ βάσει τῇ ΑΓ ὑπόκειται ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΡΜ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΓ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ μὲν ὑπὸ ΜΡΝ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΡΝ τῇ ὑπὸ ΗΘΚ.

Ἐκ τριῶν ἄρα γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΛΡΜ ΜΡΝ ΛΡΝ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις ὑπὸ ΑΒΓ ΔΕΖ ΗΘΚ στερεὰ γωνία συνέσταται ἡ πρὸς τῷ Ρ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΛΡΜ ΜΡΝ ΛΡΝ γωνιῶν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τῆς ΜΝ, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΞΛ· λέγω πάλιν ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΓ, τοῦτ᾽ ἔστιν αἱ ΔΕ ΕΖ, δυσὶ ταῖς ΜΞ ΞΛ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΜΝ, ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ κεῖται ἴση· καὶ αἱ ΔΕ ΕΖ ἄρα τῇ ΔΖ ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒ ἴση ἐστὶ τῇ ΛΞ. Ὁμοίως δὲ οὐδὲ ἐλάττων, πολλῷ γὰρ τὸ ἀδύνατον μεῖζον· ἡ ἄρα ΑΒ μείζων ἐστὶ τῆς ΛΞ. Καὶ ἐὰν ὁμοίως ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, ἐκείνῳ ἴσον δυναμένην εὐθεῖαν πρὸς

ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ ἀναστήσωμεν, ὡς τὴν ΞΡ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐκτὸς τοῦ ΛΜΝ τριγώνου, καὶ ἔστω τὸ Ξ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΞ ΜΞ ΝΞ· λέγω δὴ καὶ οὕτως ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν, ἢ ἐλάττων. Ἔστω πρότερον ἴση· δύο οὖν αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΜΞ ΞΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΜΛ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΞΛ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΛΞΝ ἐστὶν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζονές εἰσι· καὶ ἡ ὑπὸ ΜΞΝ ἄρα τῆς ὑπὸ ΔΕΖ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΜΞ ΞΝ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΜΝ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΞΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ μείζων, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΛΞ. Ἑξῆς δὲ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἐλάττων· μείζων ἄρα. Καὶ ἐὰν πρὸς ὀρθὰς τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πάλιν ἀναστήσωμεν τὴν ΞΡ, καὶ ἴσον δυναμένην αὐτὴν ὑποθώμεθα, ᾧ μεῖζον δύναται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ, συσταθήσεται τὸ πρόβλημα.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΛΞ. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΒ ἴση ἡ ΞΟ, τῇ δὲ ΒΓ ἴση ἡ ΞΠ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΞΠ· ὥστε καὶ λοιπὴ ἡ ΟΛ λοιπῇ τῇ ΠΜ ἐστὶν ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΜ τῇ ΠΟ, καὶ ἰσογώνιον τὸ ΛΜΞ τρίγωνον τῷ ΠΞΟ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΞΛ πρὸς τὴν ΛΜ, οὕτως ἡ ΞΟ πρὸς τὴν ΟΠ, καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΛΞ πρὸς τὴν ΞΟ, οὕτως ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΟΠ. Μείζων δὲ ἡ ΛΞ τῆς ΞΟ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΛΜ τῆς ΟΠ. Ἀλλὰ ἡ ΛΜ τῇ ΑΓ ἐστὶν

ἴση· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῆς ΟΠ ἐστὶ μείζων. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ ΞΠ ἴσαι εἰσὶν, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΑΓ βάσεως τῆς ΟΠ μείζων ἐστί· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΟΞΠ μείζων ἐστίν. Ὁμοίως δὴ κἂν τὴν ΞΡ ἴσην ἑκατέρᾳ τῶν ΞΟ ΞΠ ἀπολάβωμεν, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὴν ΟΡ, δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΗΘΚ γωνία τῆς ὑπὸ ΟΞΡ μείζων ἐστί. Συνεστάτω δὴ πρὸς τῇ ΛΞ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ξ τῇ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΣ, τῇ δὲ ὑπὸ ΗΘΚ ἴση ἡ ὑπὸ ΛΞΤ, καὶ κείσθω ἑκατέρα τῶν ΞΣ ΞΤ τῇ ΟΞ ἴση, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΣ ΟΤ ΣΤ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΟΞ ΞΣ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΟΞΣ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ, τοῦτ᾽ ἔστιν ἡ ΛΜ, βάσει τῇ ΟΣ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΝ τῇ ΟΤ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΜΛ ΛΝ δυσὶ ταῖς ΣΟ ΟΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΜΛΝ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΟΤ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΜΝ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ ἡ ΜΝ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΔΖ ἄρα τῇ ΣΤ μείζων ἐστίν. Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΕ ΕΖ δυσὶ ταῖς ΣΞ ΞΤ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΣΤ μείζων· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΣΞΤ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΣΞΤ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΔΕΖ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ ΗΘΚ μείζων ἐστίν. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ὅπερ ἀδύνατον.

Πρότασις κδ.

Ἐὰν στερεὸν ὑπὸ ἓξ παραλλήλων ἐπιπέδων περιέχηται, τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμα ἐστί. 24.

Στερεὸν γὰρ τὸ ΓΔΘΗ ὑπὸ ἓξ παραλλήλων ἐπιπέδων περιεχέσθω τῶν ΑΓ ΗΖ ΑΘ ΔΖ ΒΖ ΑΕ· Fig. 24.

λέγω ὅτι τὰ ἀπεναντίον αὐτοῦ ἐπίπεδα ἴσα τε καὶ παραλληλόγραμμά ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΗ ΓΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ. Πάλιν, ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ ΒΖ ΑΕ ὑπὸ ἐπιπέδου τοῦ ΑΓ τέμνεται, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΑΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν ΔΖ ΖΗ ΗΒ ΒΖ ΑΕ παραλληλόγραμμόν ἐστιν.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΘ ΔΖ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΓ, ἡ δὲ ΒΘ τῇ ΓΖ· δύο δὴ αἱ ΑΒ ΒΘ ἁπτόμεναι ἀλλήλων παρὰ δύο εὐθείας τὰς ΔΓ ΓΖ ἁπτόμενας ἀλλήλων εἴσιν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ· ἴσας ἄρα γωνίας περιέξουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΓΖ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΓ ΓΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΖ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΓΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστί. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΒΘ διπλάσιον τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον, τοῦ δὲ ΔΓΖ διπλάσιον τὸ ΓΕ παραλληλόγραμμον· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΕ παραλληλογράμμῳ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ τὸ μὲν ΑΓ τῷ ΗΖ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΑΕ τῷ ΒΖ.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν ὑπὸ ἓξ παραλλήλων ἐπιπέδων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κέ.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔσται ὡς ἡ βάσις πρὸς τὴν βάσιν, οὕτως τὸ στερεὸν πρὸς τὸ στερεόν. 25.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΖΗ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΡΑ ΔΘ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕΖΦ βάσις πρὸς τὴν ΕΘΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΖΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΗΓΔ στερεόν. Fig. 25.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΘ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη, καὶ κείσθωσαν τῇ μὲν ΑΕ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΑΚ ΚΛ, τῇ δὲ ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ ΘΜ ΜΝ, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΛΟ ΚΦ ΘΧ ΜΣ παραλληλόγραμμα, καὶ τὰ ΛΠ ΚΡ ΔΜ ΜΤ στερεά. Καὶ ἐπεὶ ἴσαι εἰσὶν αἱ ΛΚ ΚΑ ΑΕ εὐθεῖαι ἀλλήλαις, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ μὲν ΛΟ ΚΦ ΑΖ παραλληλόγραμμα ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΚΞ ΚΒ ΑΗ ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΛΨ ΚΠ ΑΡ ἀλλήλοις, ἀπεναντίον γάρ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ μὲν ΕΓ ΘΧ ΜΣ παραλληλόγραμμα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, τὰ δὲ ΘΗ ΘΙ ΙΝ ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, καὶ ἔτι τὰ ΔΘ ΜΩ ΝΤ· τρία ἄρα ἐπίπεδα τῶν ΛΠ ΚΡ ΑΥ στερεῶν τρισὶν ἐπιπέδοις ἐστὶν ἴσα. Ἀλλὰ τὰ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἐστὶν ἴσα· τὰ ἄρα τρία στερεὰ τὰ ΛΠ ΚΡ ΑΥ ἴσα ἀλλήλοις ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ τρία στερεὰ τὰ ΕΔ ΔΜ ΜΤ ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΑΖ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΑΥ στερεοῦ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ὁσαπλασίων ἐστὶν ἡ ΝΖ βάσις τῆς ΖΘ βάσεως, τοσαυταπλάσιόν ἐστι καὶ τὸ ΝΥ στερεὸν τοῦ ΘΥ στερεοῦ. Καὶ εἰ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΖ βάσις τῇ ΝΖ βάσει, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τῷ ΝΥ στερεῷ, καὶ εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ, καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει. Τεσσάρων δὴ ὄντων μεγεθῶν, δύο μὲν βάσεων τῶν ΑΖ ΖΘ, δύο δὲ στερεῶν τῶν ΑΥ ΥΘ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια τῆς μὲν ΑΖ βάσεως καὶ τοῦ ΑΥ στερεοῦ, ἥτε ΛΖ βάσις καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν, τῆς δὲ ΘΖ

βάσεως καὶ τοῦ ΘΥ στερεοῦ, ἥτε ΝΖ βάσις καὶ τὸ ΝΥ στερεόν· καὶ δέδεικται ὅτι εἰ ὑπερέχει ἡ ΛΖ βάσις τῆς ΝΖ βάσεως, ὑπερέχει καὶ τὸ ΛΥ στερεὸν τοῦ ΝΥ στερεοῦ· καὶ εἰ ἴση, ἴσον· καὶ εἰ ἐλλείπει, ἐλλείπει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΖ βάσις πρὸς τὴν ΖΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΛΥ στερεὸν πρὸς τὸ ΥΘ στερεόν.

Ἐὰν ἄρα στερεὸν παραλληλεπίπεδον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κϛ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι. 26.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς Fig. 26. αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τὸ Δ, περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΕΔΓ ΕΔΖ ΖΔΓ γωνιῶν ἐπιπέδων· δεῖ δὴ πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΔΖ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΕΔ ΔΓ ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΖΗ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΗ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ μὲν ὑπὸ ΕΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΛ, τῇ δὲ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση ἡ ὑπὸ ΒΑΚ, καὶ κείσθω τῇ ΔΗ ἴση ἡ ΑΚ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ διὰ τῶν ΒΑ ΑΛ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΚΘ, καὶ κείσθω ἴση τῇ ΗΖ ἡ ΚΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΑ· λέγω ὅτι ἡ πρὸς τῷ Α στερεὰ γωνία περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΛ ΒΑΘ ΘΑΛ γωνιῶν ἴση ἐστὶ τῇ πρὸς τῷ Δ στερεᾷ γωνίᾳ τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν ΕΔΓ ΕΔΖ ΖΔΓ γωνιῶν.

Ἀπειλήφθωσαν γὰρ ἴσαι αἱ ΑΒ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ ΚΒ ΖΕ ΗΕ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ

ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιήσει γωνίας· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΖΗΔ ΖΗΕ γωνιῶν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΘΚΑ ΘΚΒ γωνιῶν ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΗΔ ΔΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΒ βάσει τῇ ΕΗ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΒ τῇ ΖΕ. Πάλιν ἐπεὶ δύο αἱ ΑΚ ΚΘ δυσὶ ταῖς ΔΗ ΗΖ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΘΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΔΖ ΔΕ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘΒ βάσει τῇ ΖΕ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΛ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση· (ἐπειδήπερ ἐὰν ἀπολάβωμεν ἴσας τὰς ΑΛ ΔΓ, καὶ ἐπιζεύξωμεν τὰς ΚΛ ΘΛ ΗΓ ΖΓ, ἐπεὶ ὅλη ἡ ὑπὸ ΒΑΛ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ὑπόκειται ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΚΑΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΔΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΑ ΑΛ δυσὶ ταῖς ΗΔ ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΚΛ βάσει τῇ ΗΓ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΘ τῇ ΗΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΛΚ ΚΘ δυσὶ ταῖς ΓΗ ΗΖ εἰσὶν ἴσαι, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ ΑΛ δυσὶ ταῖς ΖΔ ΔΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΘΛ βάσει τῇ ΖΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΓ ἐστὶν ἴση). Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΛ τῇ ὑπὸ ΕΔΓ ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ, τῇ ΑΒ, καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ, τῷ Α, τῇ δοθείσῃ στερεᾷ γωνίᾳ, τῇ πρὸς τῷ Δ, ἴση στερεὰ γωνία συνέσταται. Ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κζ.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι. 27.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΔΓ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον παραλληλεπίπεδον ἀναγράψαι. Fig. 27.

Συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ πρὸς τῷ Γ στερεᾷ γωνίᾳ ἴση, ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΒΑΘ ΘΑΚ ΚΑΒ, ὥςτε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ὑπὸ ΒΑΘ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΓΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΑΚ τῇ ὑπὸ ΕΓΗ, καὶ ἔτι τὴν ὑπὸ ΚΑΘ τῇ ὑπὸ ΗΓΖ, καὶ γεγονέτω ὡς μὲν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, ὡς δὲ ἡ ΗΓ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ΖΓ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΘ. Καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ΑΛ στερεόν.

Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΓ πρὸς τὴν ΓΗ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΚ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΓΗ ΒΑΚ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΗΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΚΒ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΘ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ ὅμοιόν ἐστι, καὶ ἔτι τὸ ΖΕ τῷ ΘΒ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΓΔ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΑΛ στερεοῦ ὅμοιά ἐστιν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΑΛ στερεῷ ὅμοιόν ἐστιν.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης ἄρα εὐθείας τῆς ΑΒ τῷ

δοθέντι

δοθέντι στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ τῷ ΓΔ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον ἀναγέγραπται τὸ ΑΛ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις κή.

Ἐὰν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἐπιπέδῳ τμηθῇ κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων, δίχα τμηθήσεται τὸ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου. 28.

Στερεὸν γὰρ παραλληλεπίπεδον τὸ ΑΒ ἐπιπέδῳ τῷ ΓΔΕΖ τετμήσθω κατὰ τὰς διαγωνίους τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τὰς ΓΖ ΔΕ· λέγω ὅτι δίχα τμηθήσεται τὸ ΑΒ στερεὸν ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου. Fig. 28.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΓΗΖ τρίγωνον τῷ ΓΖΒ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΑΔΕ τῷ ΔΕΘ, ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΑ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΒ ἴσον, ἀπεναντίον γάρ, τὸ δὲ ΗΕ τῷ ΓΘ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΓΗΖ ΑΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΗΕ ΑΓ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΓΖΒ ΔΕΘ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΓΘ ΒΕ ΓΕ, ὑπὸ γὰρ ἴσων ἐπιπέδων περιέχονται τῷ τε πλήθει καὶ τῷ μεγέθει· ὥστε ὅλον τὸ ΑΒ στερεὸν δίχα τέμνεται ὑπὸ τοῦ ΓΔΕΖ ἐπιπέδου.

[Ἐὰν ἄρα στερεὸν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . .] ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις κθ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 29.

Ἔστω ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ ΓΝ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος Fig. 29.

ὄντα, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ ΑΗ ΑΜ ΑΝ ΓΔ ΓΕ ΒΘ ΒΚ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν ἔστωσαν τῶν ΖΝ ΔΚ· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστιν ἑκάτερον τῶν ΓΘ ΓΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΔΘ ΕΚ· ὥςτε καὶ ἡ ΔΘ τῇ ΕΚ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΕΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΔΕ λοιπῇ τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. ὥςτε καὶ τὸ μὲν ΔΕΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΒ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΔΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΖΑΗ τρίγωνον τῷ ΜΑΝ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ τὸ μὲν ΓΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ ἴσον, τὸ δὲ ΓΗ τῷ ΒΝ, ἀπεναντίον γάρ· καὶ τὸ πρίσμα ἄρα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΑΖΗ ΓΔΕ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΑΔ ΔΗ ΗΓ ἴσον ἐστὶ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων, τῶν ΜΑΝ ΘΒΚ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων, τῶν ΒΜ ΘΝ ΝΒ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΘΜ· ὅλον ἄρα τὸ ΓΜ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΓΝ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λ'.

Τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ὑφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν, ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 30.

Ἔστω γὰρ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΑΒ στερεα παραλληλεπίπεδα τὰ ΓΜ ΓΝ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ ΑΗ ΑΜ ΑΝ ΓΔ Fig. 3

ΓΕ ΒΘ ΒΚ μὴ ἔστωσαν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΜ στερεὸν τῷ ΓΝ στερεῷ.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ αἱ ΝΚ ΔΘ, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ρ σημεῖον, καὶ ἔτι ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΖΜ ΗΕ ἐπὶ τὰ Ο Π σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΞ ΛΟ ΓΠ ΒΡ. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΓΜ στερεὸν, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΖΔΘΜ, τῷ ΓΟ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΖ ΑΞ ΛΜ ΛΟ ΓΔ ΓΠ ΒΘ ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν ΖΟ ΔΡ. Ἀλλὰ τὸ ΓΟ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΞΠΡΟ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΓΒΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΗΕΚΝ, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΑΓΒΛ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι αἱ ΑΗ ΑΞ ΓΕ ΓΠ ΛΝ ΛΟ ΒΚ ΒΡ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν, τῶν ΗΠ ΝΡ· ὥςτε καὶ τὸ ΓΜ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΝ στερεῷ.

Τὰ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λα΄.

Τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν. 31.

Ἔστω ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΑΒ ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΕ ΓΖ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. Fig. 31.

Ἔστωσαν δὴ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΘΚ ΒΕ ΑΗ ΛΜ ΟΠ ΔΖ ΓΞ ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς

ΑΒ ΓΔ βάσεσιν, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ᾽ εὐθείας τῇ ΓΡ εὐθεία ἡ ΡΤ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΡΤ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ρ τῇ ὑπὸ ΛΑΒ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΤΡΥ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΑΛ ἴση ἡ ΡΤ, τῇ δὲ ΑΒ ἴση ἡ ΡΥ, καὶ συμπεπληρώσθω ἥτε ΡΧ βάσις καὶ τὸ ΨΥ στερεόν. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΤΡ ΡΥ δυσὶ ταῖς ΛΑ ΑΒ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιον τὸ ΡΧ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΛ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ πάλιν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΛ τῇ ΡΤ, ἡ δὲ ΑΜ τῇ ΡΣ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσιν· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΜ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΛΕ τῷ ΣΥ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΑΕ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΨΥ στερεοῦ ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τέ ἐστι καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΕ στερεὸν παραλληλεπίπεδον ὅλῳ τῷ ΨΥ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ ἴσον ἐστί. Διήχθωσαν αἱ ΔΡ ΧΥ καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις κατὰ τὸ Ω, καὶ διὰ τοῦ Τ τῇ ΔΩ παράλληλος ἤχθω ἡ Ττ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἡ Ττ καὶ ἡ ΟΔ καὶ συνεζεύχθωσαν κατὰ τὸ α, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΩΨ ΡΙ στερεά. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΨΩ στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ Ωπ τῷ ΨΥ στερεῷ, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΡΨ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΥΦ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΨ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι, αἱ ΡΩ ΡΥ Ττ ΤΧ Σσ ΣΝ Ψπ ΨΦ ἐπὶ τῶν αὐτῶν εἰσιν εὐθειῶν τῶν ΩΧ σΦ· ἀλλὰ τὸ ΨΥ στερεὸν τῷ ΑΕ ἴσον ἐστίν· καὶ τὸ ΨΩ ἄρα στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστίν. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΡΥΧΤ παραλληλόγραμμον τῷ ΩΤ παραλληλόγραμ-

μῳ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΤ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΡΤ ΩΧ· ἀλλὰ τὸ ΡΥΧΤ τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον, ἐπεὶ καὶ τῷ ΑΒ· καὶ τὸ ΩΤ ἄρα παραλληλόγραμμον τῷ ΓΔ ἐστὶν ἴσον. Ἄλλο δὲ τὸ ΔΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ πρὸς τὴν ΔΤ. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΖ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ, ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΩΙ ἐπιπέδῳ τῷ ΡΨ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἔστιν ὡς ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ βάσιν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν. Ἀλλ' ὡς ἡ ΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ, οὕτως ἡ ΩΤ βάσις πρὸς τὴν ΔΤ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΓΖ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεὸν, οὕτως τὸ ΩΨ στερεὸν πρὸς τὸ ΡΙ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΓΖ ΩΨ στερεῶν πρὸς τὸ ΡΙ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΖ στερεὸν τῷ ΩΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ ΩΨ τῷ ΑΕ ἐδείχθη ἴσον· καὶ τὸ ΑΕ ἄρα τῷ ΓΖ ἐστὶν ἴσον.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ ΘΚ ΒΕ ΛΜ ΓΞ ΟΠ ΔΖ ΡΣ πρὸς ὀρθὰς ταῖς ΑΒ ΓΔ βάσεσι· λέγω πάλιν ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕ στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ. Ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Κ Ε Η Μ Π Ζ Ξ Σ σημείων ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον κάθετοι αἱ ΚΝ ΕΤ ΗΥ ΜΦ ΠΧ ΖΨ ΞΩ ΣΙ, καὶ συμβαλλέτωσαν τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὰ Ν Τ Υ Φ Χ Ψ Ω Ι σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΤ ΥΦ ΝΥ ΤΦ ΧΨ ΧΩ ΩΙ ΨΙ. Ἴσον δή ἐστι τὸ ΚΦ στερεὸν τῷ ΠΙ στερεῷ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΚΜ ΠΣ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, ὧν αἱ ἐφεστῶσαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΚΦ στερεὸν τῷ ΑΕ στερεῷ ἴσον ἐστὶ, τὸ δὲ ΠΙ

τῷ ΓΖ, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν·) καὶ τὸ ΑΕ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΖ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τὰ ἄρα ἐπὶ ἴσων βάσεων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λβ.

Τὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. 32.

Ἔστω ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι τὰ ΑΒ ΓΔ στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις, τοῦτ᾽ ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν. Fig. 32.

Παραβεβλήσθω γὰρ παρὰ τὴν ΖΗ τῷ ΑΕ παραλληλογράμμῳ ἴσον τὸ ΖΘ, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΖΘ, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΓΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον συμπεπληρώσθω τῷ ΗΚ· ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΗΚ στερεῷ, ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΑΕ ΖΘ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. Καὶ ἐπεὶ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΓΚ ἐπιπέδῳ τῷ ΔΗ τέτμηται, παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις, ἐστὶν ἄρα ὡς ἡ ΘΖ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΘΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεόν. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΘ βάσις τῇ ΑΕ βάσει, τὸ δὲ ΗΚ στερεὸν τῷ ΑΒ στερεῷ· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΕ βάσις πρὸς τὴν ΓΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεόν.

Τὰ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λγ'.

Τὰ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλα ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 33.

Ἔστω ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ ΓΔ, ὁμόλογος δὲ ἔστω ἡ ΑΕ τῇ ΓΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ. Fig. 33.

Ἐκβεβλήσθωσαν γὰρ ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΕ ΗΕ ΘΕ αἱ ΕΚ ΕΛ ΕΜ, καὶ κείσθω τῇ μὲν ΓΖ ἴση ἡ ΕΚ, τῇ δὲ ΖΝ ἴση ἡ ΕΛ, καὶ ἔτι τῇ ΖΡ ἴση ἡ ΕΜ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον, καὶ τὸ ΚΟ στερεόν.

Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΚΕ ΕΛ δυσὶ ταῖς ΓΖ ΖΝ ἴσαι εἰσὶν, ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΚΕΛ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση (ἐπειδήπερ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΗ τῇ ὑπὸ ΓΖΝ ἐστὶν ἴση διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν)· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ ὅμοιον τὸ ΚΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΓΝ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΚΜ παραλληλόγραμμον ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον τῷ ΓΡ παραλληλογράμμῳ, καὶ ἔτι τὸ ΕΟ τῷ ΔΖ· τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τοῦ ΚΟ στερεοῦ τρισὶ παραλληλογράμμοις τοῦ ΓΔ στερεοῦ ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια, τὰ δὲ τρία τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα ἐστὶ καὶ ὅμοια· ὅλον ἄρα τὸ ΚΟ στερεὸν ὅλῳ τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον ἐστὶ καὶ ὅμοιον. Συμπεπληρώσθω τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, καὶ ἀπὸ βάσεων μὲν τῶν ΗΚ ΚΛ παραλληλογράμμων, ὕψους δὲ τοῦ αὐτοῦ τῷ ΑΒ, στερεὰ συμπεπληρώσθω τὰ ΕΞ ΛΠ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν ἐστιν ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΓΖ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς τὴν ΖΝ, καὶ ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΖΡ, ἴση δὲ ἡ

μὲν ΖΓ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΖΝ τῇ ΕΛ, ἡ δὲ ΖΡ τῇ ΕΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, καὶ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΚ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΛ, οὕτως τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς τὴν ΕΜ, οὕτως τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΚΗ πρὸς τὸ ΚΛ, καὶ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΗ πρὸς τὸ ΗΚ, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΗΚ πρὸς τὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ΞΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΠΛ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΠΕ πρὸς τὸ ΚΜ, οὕτως τὸ ΠΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΕΞ πρὸς τὸ ΠΛ, καὶ τὸ ΠΛ πρὸς τὸ ΚΟ. Ἐὰν δὲ τέσσαρα μεγέθη κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον ᾖ, τὸ πρῶτον πρὸς τὸ τέταρτον τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὸ δεύτερον· τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ πρὸς τὸ ΕΞ, οὕτως τὸ ΑΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΚ, καὶ ἡ ΛΕ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΕΚ· ὥςτε καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΚΟ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΛΕ πρὸς τὴν ΕΚ. Ἴσον δὲ τὸ μὲν ΚΟ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἡ δὲ ΕΚ εὐθεῖα τῇ ΓΖ· καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΓΔ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος αὐτοῦ πλευρὰ ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΓΖ.

Τὰ ἄρα ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἑξῆς ἀνάλογον ὦσιν, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν

τετάρτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης στερεὸν παραλληλεπίπεδον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενον· (ἐπειδήπερ καὶ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τετάρτην τριπλασίονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν δευτέραν.)

Πρότασις λδ'.

Τῶν ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα. 34.

Ἔστω ἴσα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΑΒ ΓΔ· λέγω ὅτι τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. *Fig.* 34.

Ἔστωσαν γὰρ πρότερον αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΑΗ ΕΖ ΛΒ ΘΚ ΓΜ ΝΞ ΟΔ ΠΡ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ.

Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· ἔσται καὶ ἡ ΓΜ τῇ ΑΗ ἴση. Εἰ γάρ, τῶν ΕΘ ΝΠ βάσεων ἴσων οὐσῶν, μὴ εἴη τὰ ΑΗ ΓΜ ὕψη ἴσα· οὐδ' ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν ἴσον ἔσται τῷ ΓΔ. Ὑπόκειται δὲ ἴσον· οὐκ ἄρα ἄνισόν ἐστι τὸ ΓΜ ὕψος τῷ ΑΗ ὕψει· ἴσον ἄρα· καὶ ἔσται ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, καὶ φανερὸν ὅτι τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Μὴ ἔστω δὴ ἴση ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἴσον· μείζων ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΜ

τῆς ΑΗ. Εἰ γὰρ μή· οὐδ' ἄρα πάλιν τὰ ΑΒ ΓΔ στερεὰ ἴσα ἔσται· ὑπόκειται δὲ ἴσα. Κείσθω οὖν τῇ ΑΗ ἴση ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ἀπὸ βάσεως μὲν τῆς ΝΠ, ὕψους δὲ τοῦ ΓΤ, στερεὸν παραλληλεπίπεδον τὸ ΦΓ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἄλλο δέ τι τὸ ΓΦ, τὰ δὲ ἴσα πρὸς τὸ αὐτὸ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν. Ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, ἰσοϋψῆ γὰρ τὰ ΑΒ ΓΦ στερεά· ὡς δὲ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως ἡ ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἴση δὲ ἡ ΓΤ τῇ ΑΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΑΗ. Τῶν ΑΗ ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Ἔστωσαν γὰρ πάλιν αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσι. Καὶ εἰ μὲν ἴση ἐστὶν ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ βάσει, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος τῷ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψει. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ ΕΘ βάσις τῇ ΝΠ ἴση, ἀλλ' ἔστω μείζων ἡ ΕΘ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ τοῦ ΓΔ

στερεοῦ ὕψος τοῦ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψους, τουτ' ἔστιν ἡ ΓΜ τῆς ΑΗ. Κείσθω τῇ ΑΗ ἴση πάλιν ἡ ΓΤ, καὶ συμπεπληρώσθω ὁμοίως τὸ ΓΦ στερεόν. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΓΜ πρὸς τὴν ΑΗ, ἴση δὲ ἡ ΑΗ τῇ ΓΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, ἰσοϋψῆ γάρ ἐστι τὰ ΑΒ ΓΦ στερεά· ὡς δὲ ἡ ΜΓ πρὸς τὴν ΓΤ, οὕτως ἥτε ΜΠ βάσις πρὸς τὴν ΠΤ βάσιν, καὶ τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεὸν, οὕτως τὸ ΓΔ στερεὸν πρὸς τὸ ΓΦ στερεόν· ἑκάτερον ἄρα τῶν ΑΒ ΓΔ πρὸς τὸ ΓΦ τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Μὴ ἔστωσαν δὴ αἱ ἐφεστηκυῖαι αἱ ΖΕ ΒΛ ΗΑ ΚΘ ΞΝ ΔΟ ΜΓ ΡΠ πρὸς ὀρθὰς ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Ζ Η Β Κ Ξ Μ Δ Ρ σημείων ἐπὶ τὰ τῶν ΕΘ ΝΠ βάσεων ἐπίπεδα κάθετοι, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις κατὰ τὰ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ α Ω σημεῖα, καὶ συμπεπληρώσθω τὰ ΖΦ ΞΩ στερεά· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἴσων ὄντων τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος.

Ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ, ἀλλὰ τῷ μὲν ΑΒ τὸ ΒΤ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,) τὸ δὲ ΓΔ στερεὸν τῷ ΔΨ ἐστὶν ἴσον, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΡΞ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν

αὐτῶν εὐθειῶν·) καὶ τὸ ΒΤ ἄρα στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ ἴσον ἐστί. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων, ὧν τὰ ὕψη πρὸς ὀρθάς ἐστι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν, ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΖΚ βάσις τῇ ΕΘ βάσει, ἡ δὲ ΞΡ βάσις τῇ ΝΠ βάσει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΔΨ ΒΤ στερεῶν καὶ τῶν ΔΓ ΒΑ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΓ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΑΒ ΓΔ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι.

Πάλιν δὴ τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒ στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΕΘ βάσις πρὸς τὴν ΝΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος· ἴση δὲ ἡ μὲν ΕΘ βάσις τῇ ΖΚ βάσει, ἡ δὲ ΝΠ τῇ ΞΡ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΓΔ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΑΒ στερεοῦ ὕψος. Τὰ δ' αὐτὰ ὕψη ἐστὶ τῶν ΑΒ ΓΔ στερεῶν καὶ τῶν ΒΤ ΔΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΚ βάσις πρὸς τὴν ΞΡ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΔΨ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΤ στερεοῦ ὕψος· τῶν ΒΤ ΔΨ ἄρα στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν. Ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων αἱ ἐφεστηκυῖαι πρὸς ὀρθάς εἰσι ταῖς βάσεσιν αὐτῶν,

ἀντιπεπόνθασι δὲ αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΤ στερεὸν τῷ ΔΨ στερεῷ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ΒΤ τῷ ΑΒ ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΖΚ, καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστῶσαι οὐκ εἰσιν ἐπὶ τῶν αὐτῶν εὐθειῶν,) τὸ δὲ ΔΨ στερεὸν τῷ ΔΓ στερεῷ ἴσον ἐστὶν, ἐπί τε γὰρ πάλιν τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΞΡ καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, (ὧν αἱ ἐφεστηκυῖαι οὐκ ἐν ταῖς αὐταῖς εὐθείαις·) καὶ τὸ ΑΒ ἄρα στερεὸν τῷ ΓΔ στερεῷ ἐστιν ἴσον.

Τῶν ἄρα ἴσων στερεῶν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λέ.

Ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι ἴσαι, ἐπὶ δὲ τῶν κορυφῶν αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐπισταθῶσιν ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἐπὶ δὲ τῶν μετεώρων ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, κάθετοι ἀχθῶσιν, ἀπὸ δὲ τῶν γενομένων σημείων, ἐν τοῖς ἐπιπέδοις ἐπὶ τὰς ἐξ ἀρχῆς γωνίας ἐπιζευχθῶσιν εὐθεῖαι· ἴσας γωνίας περιέξουσι μετὰ τῶν μετεώρων. 35.

Ἔστωσαν δύο γωνίαι εὐθύγραμμοι ἴσαι, αἱ ὑπὸ ΒΑΓ ΕΔΖ, ἀπὸ δὲ τῶν Α Δ σημείων μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστάτωσαν αἱ ΑΗ ΔΜ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΜΔΕ τῇ ὑπὸ ΗΑΒ, τὴν δὲ ὑπὸ ΜΔΖ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῶν ΑΗ ΔΜ τυχόντα σημεῖα, τὰ Η Μ, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Η Μ σημείων ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΒΑΓ ΕΔΖ ἐπίπεδα κάθετοι αἱ ΗΛ ΜΝ, καὶ συμβαλλέτωσαν τοῖς ἐπιπέδοις Fig. 35.

κατὰ τὰ Λ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΑ ΝΔ· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΛΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΔΝ γωνίᾳ.

Κείσθω τῇ ΔΜ ἴση ἡ ΑΘ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ σημείου τῇ ΗΑ παράλληλος ἡ ΘΚ. Ἡ δὲ ΗΑ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπίπεδον· καὶ ἡ ΘΚ ἄρα κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὸ διὰ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐπίπεδον. Ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Κ Ν σημείων ἐπὶ τὰς ΑΒ ΑΓ ΔΖ ΔΕ εὐθείας κάθετοι αἱ ΚΒ ΚΓ ΝΖ ΝΕ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΓ ΓΒ ΜΖ ΖΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΚΑ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΚΓ ΓΑ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΑ ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΓ ΓΑ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΘΓ ΓΑ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΓΑ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΖΜ γωνία ὀρθή ἐστιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΜ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ὑπὸ ΜΔΖ ἴση· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΜΔΖ ΘΑΓ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΑΘ τῇ ΔΜ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση ἐστίν, (οὕτως.

Ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΒ ΜΕ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΚ ΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΚ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΚ ΚΘ ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΘ. Ἀλλὰ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΚ ΚΘ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΘΚΒ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον εἶναι ἐπὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ· ὀρθὴ ἄρα

ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΘ γωνία. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΕΜ γωνία ὀρθή ἐστιν. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΔΜ ἴση· ὑπόκεινται γὰρ, καὶ ἔστιν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ.)

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ· δύο δὴ αἱ ΓΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΖΔ ΔΕ ἴσαι εἰσίν. Ἀλλὰ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΑΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΔΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστί· καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΑΓΚ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΔΖΝ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΚ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΖΝ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΚ τῇ ὑπὸ ΖΕΝ ἴση ἐστίν. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΓΒΚ ΖΕΝ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΖΝ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΖ ἴση, δύο δὴ αἱ ΑΓ ΓΚ δυσὶ ταῖς ΔΖ ΖΝ ἴσαι εἰσὶ καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΚ βάσει τῇ ΔΝ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΘ τῇ ΔΜ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΘ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΚ ΚΘ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΑΚΘ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΜ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΔΝ ΝΜ, ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΚ ΚΘ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΔΝ ΝΜ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΝ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΝΜ· ἴση ἄρα ἡ ΘΚ τῇ ΜΝ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΘΑ ΑΚ δυσὶ ταῖς ΜΔ ΔΝ, ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΘΚ βάσει τῇ ΝΜ ἐδείχθη ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΚ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΜΔΝ ἐστιν ἴση.

Ἐὰν ἄρα ὦσι δύο γωνίαι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἐὰν ὦσι δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι, ἐπισταθῶσι δὲ ἀπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἴσαι, ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν, ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἀπ᾽ αὐτῶν κάθετοι, ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, ἐν οἷς εἰσιν αἱ ἐξ ἀρχῆς γωνίαι, ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Πρότασις λϛ΄.

Ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· τὸ ἐκ 36.
τῶν τριῶν στερεὸν παραλληλεπίπεδον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ Α Β Γ, ὡς Fig. 36.
ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ· λέγω ὅτι τὸ ἐκ τῶν Α Β Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐκκείσθω στερεὰ γωνία ἡ πρὸς τῷ Ε περιεχομένη ὑπὸ τριῶν γωνιῶν ἐπιπέδων τῶν ὑπὸ ΔΕΗ ΗΕΖ ΖΕΔ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἑκάστη τῶν ΔΕ ΗΕ ΕΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΕΚ στερεὸν παραλληλεπίπεδον, τῇ δὲ Α κείσθω ἴση ἡ ΛΜ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΛΜ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Λ τῇ πρὸς τῷ Ε στερεᾷ γωνίᾳ ἴση στερεὰ γωνία ἡ περιεχομένη ὑπὸ τῶν ΝΛΞ ΞΛΜ ΜΛΝ, καὶ κείσθω τῇ μὲν Β ἴση ἡ ΛΞ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΛΝ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ἡ Β πρὸς τὴν Γ, ἴση δὲ ἡ μὲν Α τῇ ΛΜ, ἡ δὲ Β ἑκάστη τῶν ΛΞ ΕΖ ΕΗ ΕΔ, ἡ δὲ Γ τῇ ΛΝ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΜ πρὸς τὴν ΕΖ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΛΝ.

ΛΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας, τὰς ὑπὸ ΜΛΝ ΔΕΖ αἱ πλευραὶ ἀντιπεπόνθασιν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΜΝ παραλληλόγραμμον τῷ ΔΖ παραλληλογράμμῳ. Καὶ ἐπεὶ δύο γωνίαι ἐπίπεδοι εὐθύγραμμοι ἴσαι εἰσὶν αἱ ὑπὸ ΔΕΖ ΝΛΜ, καὶ ἐπ᾽ αὐτῶν μετέωροι εὐθεῖαι ἐφεστήκασιν αἱ ΛΞ ΕΗ ἴσαι τε ἀλλήλαις καὶ ἴσας γωνίας περιέχουσαι μετὰ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν ἑκατέραν ἑκατέρᾳ· αἱ ἄρα ἀπὸ τῶν Η Ξ σημείων κάθετοι ἀγόμεναι ἐπὶ τὰ διὰ τῶν ΝΛΜ ΔΕΖ ἐπίπεδα ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὥςτε τὰ ΛΘ ΕΚ στερεὰ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἐστί. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛ στερεὸν τῷ ΕΚ στερεῷ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΘΛ τὸ ἐκ τῶν Α Β Γ στερεὸν, τὸ δὲ ΕΚ τὸ ἀπὸ τῆς Β στερεόν· τὸ ἄρα ἐκ τῶν Α Β Γ στερεὸν ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Β στερεῷ, ἰσοπλεύρῳ μὲν, ἰσογωνίῳ δὲ τῷ προειρημένῳ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λζ΄.

Ἐὰν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσι· καὶ τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ἔσται· καὶ ἐὰν τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως ἀναγραφόμενα ἀνάλογον ᾖ· καὶ αὐταὶ αἱ εὐθεῖαι ἀνάλογον ἔσονται. 37.

Ἔστωσαν τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον αἱ ΑΒ ΓΔ Fig. 37.
ΕΖ ΗΘ, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἀναγεγράφθωσαν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ ΕΖ ΗΘ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ΚΔ ΛΓ ΜΕ ΝΗ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ΚΔ πρὸς τὸ ΛΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἐπεὶ γὰρ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΔ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΔΓ· τὸ ΚΔ ἄρα πρὸς τὸ ΔΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ· ὡς ἄρα τὸ ΔΚ πρὸς τὸ ΔΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ.

Ἀλλὰ δὴ ἔστω ὡς τὸ ΔΚ στερεὸν πρὸς τὸ ΔΓ στερεὸν, οὕτως τὸ ΜΕ στερεὸν πρὸς τὸ ΝΗ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐπεὶ γὰρ πάλιν τὸ ΚΔ πρὸς τὸ ΔΓ τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, ἔχει δὲ καὶ τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ, καὶ ἔστιν ὡς τὸ ΚΔ πρὸς τὸ ΔΓ, οὕτως τὸ ΜΕ πρὸς τὸ ΝΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΘ.

Ἐὰν ἄρα τέσσαρες εὐθεῖαι ἀνάλογον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λη΄.

Ἐὰν ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον ὀρθὸν ᾖ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον κάθετος ἀχθῇ· ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς πεσεῖται τῶν ἐπιπέδων ἡ ἀγομένη κάθετος. 38.

Ἐπίπεδον γὰρ τὸ ΓΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἔστω, κοινὴ δὲ αὐτῶν τομὴ ἔστω ἡ ΑΔ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τοῦ ΓΔ ἐπιπέδου τυχὸν σημεῖον τὸ Ε· λέγω ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐπὶ τῆς ΔΑ πεσεῖται. Fig. 3[illegible]

Μὴ γάρ· ἀλλ', εἰ δυνατόν, πιπτέτω ἐκτὸς ὡς ἡ ΕΖ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ζ σημεῖον, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΔΑ ἐν τῷ ΑΒ ἐπι-

πέδῳ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΗ, ἥτις καὶ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΗ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΗ τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἡ ΕΗ, οὖσα ἐν τῷ ΓΔ ἐπιπέδῳ· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΗΕ γωνία. Ἀλλὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῷ ΑΒ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΗ ὀρθή ἐστι. Τριγώνου δὴ τοῦ ΕΖΗ αἱ δύο γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶν, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Ε ἐπὶ τὸ ΑΒ ἐπίπεδον κάθετος ἀγομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς ΔΑ· ἐπὶ τὴν ΔΑ ἄρα πεσεῖται.

Ἐὰν ἄρα ἐπίπεδον πρὸς ἐπίπεδον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις λθ΄.

39. Ἐὰν στερεοῦ παραλληλεπιπέδου τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων αἱ πλευραὶ δίχα τμηθῶσι, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβληθῇ· ἡ κοινὴ τομὴ τῶν ἐπιπέδων καὶ ἡ τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διάμετρος δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

Στερεοῦ γὰρ παραλληλεπιπέδου τοῦ ΑΖ τῶν ἀπεναντίον ἐπιπέδων τῶν ΓΖ ΑΘ αἱ πλευραὶ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ Κ Λ Μ Ν Ξ Π Ο Ρ σημεῖα, διὰ δὲ τῶν τομῶν ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω τὰ ΚΝ ΞΡ, κοινὴ δὲ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἔστω ἡ ΥΣ, τοῦ δὲ ΑΖ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου διαγώνιος ἡ ΔΗ· λέγω ὅτι αἱ ΥΣ ΔΗ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας, (τοῦτ᾽ ἔστιν ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΥΤ τῇ ΤΣ, ἡ δὲ ΔΤ τῇ ΤΗ.) Fig. 39.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΔΥ ΥΕ ΒΣ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΞ τῇ ΟΕ, αἱ ἐναλλὰξ ἄρα γωνίαι αἱ ὑπὸ ΔΞΥ ΥΟΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΞ τῇ ΟΕ, ἡ δὲ ΞΥ τῇ ΥΟ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΥ

τῇ ΥΕ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΔΞΥ τρίγωνον τῷ ΟΥΕ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΞΥΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΟΥΕ γωνίᾳ· διὰ δὴ τοῦτο εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΔΥΕ· καὶ ἴση ἡ ΔΥ τῇ ΥΕ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΣΗ εὐθεῖά ἐστι καὶ ἴση ἡ ΒΣ τῇ ΣΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΑ τῇ ΔΒ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος, ἀλλὰ ἡ ΓΑ καὶ τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΔΒ ἄρα τῇ ΕΗ ἴση τέ ἐστι καὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΔΕ ΗΒ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ. Καὶ εἴληπται ἐφ' ἑκατέρας αὐτῶν τυχόντα σημεῖα τὰ Δ Υ Η Σ, καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰ αἱ ΔΗ ΥΣ· ἐν ἑνὶ ἄρα εἰσὶν ἐπιπέδῳ αἱ ΔΗ ΥΣ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΗ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΤ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΗΤ, ἐναλλὰξ γάρ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΤΥ τῇ ὑπὸ ΗΤΣ ἴση. Δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΔΤΥ ΗΤΣ τὰς δύο γωνίας ταῖς δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχοντα καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, τὴν ΔΥ τῇ ΗΣ, ἡμίσειαι γάρ εἰσι τῶν ΔΕ ΒΗ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΔΤ τῇ ΤΗ, ἡ δὲ ΥΤ τῇ ΤΣ.

Ἐὰν ἄρα στερεοῦ παραλληλεπιπέδου . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις μ'.

Ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ἴσα ἔσται τὰ πρίσματα. 40.

Ἔστω πρίσματα ἰσοϋψῆ τὰ ΑΒΓΔΕΖ ΗΘΚΛΜΝ, Fig. 40
καὶ τὸ μὲν ἐχέτω βάσιν τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον,

τὸ δὲ τὸ ΗΘΚ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ἔστω τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΑΞ ΗΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου, ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ΘΚ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΗΘΚ τριγώνου· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον τῷ ΘΚ παραλληλογράμμῳ. Τὰ δὲ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ἴσα ἀλλήλοις εἰσίν· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΞ στερεὸν τῷ ΗΟ στερεῷ. Καὶ ἔστι τοῦ μὲν ΑΞ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα, τοῦ δὲ ΗΟ στερεοῦ ἥμισυ τὸ ΗΘΚΛΜΝ πρίσμα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα τῷ ΗΘΚΛΜΝ πρίσματι.

Ἐὰν ἄρα ᾖ δύο πρίσματα . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ ἑνδεκάτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΩΔΕΚΑΤΟΝ.

Πρότασις α΄.

Τὰ ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα. 1.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, καὶ ἐν αὐτοῖς ὅμοια πολύγωνα ἔστω τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, διάμετροι δὲ τῶν κύκλων ἔστωσαν αἱ ΒΜ ΗΝ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον. Fig. 1.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ ΑΜ ΗΛ ΖΝ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον τῷ ΖΗΘΚΛ πολυγώνῳ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΕ, οὕτως ἡ ΗΖ πρὸς τὴν ΖΛ· δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΒΑΕ ΗΖΛ μίαν γωνίαν μιᾷ γωνίᾳ ἴσην ἔχοντα, τὴν ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΗΖΛ, περὶ δὲ τὰς ἴσας γωνίας τὰς πλευρὰς ἀνάλογον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΗΛ τριγώνῳ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΛΗ. Ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΜΒ ἴση ἐστὶν, ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς περιφερείας βεβήκασιν· ἡ δὲ ὑπὸ ΖΛΗ τῇ ὑπὸ ΖΝΗ· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΜΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΝΗ ἴση ἐστίν. Ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΒΑΜ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ ΗΖΝ ἴση· καὶ ἡ

λοιπὴ ἄρα τῇ λοιπῇ ἐστιν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΒΜ τρίγωνον τῷ ΖΗΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ. Ἀλλὰ τοῦ μὲν τῆς ΒΜ πρὸς τὴν ΗΝ λόγου διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετραγώνου πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, τοῦ δὲ τῆς ΒΑ πρὸς τὴν ΗΖ διπλασίων ἐστὶν ὁ τοῦ ΑΒΓΔΕ πολυγώνου πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΜ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΗΝ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΒΓΔΕ πολύγωνον πρὸς τὸ ΖΗΘΚΛ πολύγωνον.

Τὰ ἄρα ἐν τοῖς κύκλοις ὅμοια πολύγωνα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ 2.
ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα.

Ἔστωσαν κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ, διάμετροι *Fig.* 2.
δὲ αὐτῶν ἔστωσαν αἱ ΒΔ ΖΘ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος ἤτοι πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλασσον τὸ Σ. Καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ δὴ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε Ζ Η Θ σημείων ἐφαπτομένας εὐθείας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, τοῦ περιγραφομένου περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου ἥμισύ ἐστι τὸ ΕΖΗΘ

τετράγωνον. Τοῦ δὲ περιγραφέντος τετραγώνου ἐλάσσων ἐστὶν ὁ κύκλος· ὥςτε τὸ ΕΖΗΘ ἐγγεγραμμένον τετράγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Τετμήσθωσαν δίχα αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ περιφέρειαι κατὰ τὰ Κ Λ Μ Ν σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΚ ΚΖ ΖΛ ΛΗ ΗΜ ΜΘ ΘΝ ΝΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΚΖ ΖΛΗ ΗΜΘ ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Κ Λ Μ Ν σημείων ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου ἀγάγωμεν, καὶ ἀναπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ εὐθειῶν παραλληλόγραμμα, ἕκαστον τῶν ΕΚΖ ΖΛΗ ΗΜΘ ΘΝΕ τριγώνων ἥμισυ ἔσται τοῦ καθ' ἑαυτὸ παραλληλογράμμου. Ἀλλὰ τὸ καθ' ἑαυτὸ τμῆμα ἔλαττόν ἐστι τοῦ παραλληλογράμμου· ὥςτε ἕκαστον τῶν ΕΚΖ ΖΛΗ ΗΜΘ ΘΝΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινα τμήματά ποτε τοῦ κύκλου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου. (Ἐδείχθη γὰρ ἐν τῷ πρώτῳ θεωρήματι τοῦ δεκάτου βιβλίου, ὅτι δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους.) Λελείφθω οὖν, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΚ ΚΖ ΖΛ ΛΗ ΗΜ ΜΘ ΘΝ ΝΕ τμήματα τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου ἐλάσσονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘ κύκλος τοῦ Σ χωρίου· λοιπὸν ἄρα τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον μεῖζόν ἐστι τοῦ Σ χωρίου. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνῳ ὅμοιον πολύγωνον τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ· ἔστιν ἄρα ὡς

τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Σ χωρίον, οὕτως τὸ ΑΞΒΟΓΠΔΡ πολύγωνον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ ἐν αὐτῷ πολύγωνον, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολύγωνον. Μείζων δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ ἐν αὐτῷ πολυγώνου· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΚΖΛΗΜΘΝ πολυγώνου. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον.

Εἰ γὰρ δυνατόν· ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Σ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον· ἀλλ᾽ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου χωρίον. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ

τῆς ΖΘ τετράγωνον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον.

Οἱ ἄρα κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

(Λ ῆ μ μ α.

Λέγω δὴ, ὅτι τοῦ Σ χωρίου μείζονος ὄντος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ἔστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλασσόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον.

Γεγονέτω γὰρ ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· λέγω ὅτι ἔλασσόν ἐστι τὸ Τ χωρίον τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Ἐπεὶ γὰρ ἔστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον· ἐναλλὰξ ἄρα ἔστιν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸ Τ χωρίον. Μεῖζον δὲ τὸ Σ χωρίον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· μείζων ἄρα καὶ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος τοῦ Τ χωρίου· ὥςτε ἐστὶν ὡς τὸ Σ χωρίον πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου χωρίον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.)

Πρότασις γ'.

Πᾶσα πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας, τριγώνους βάσεις ἐχούσας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. 3.

Ἔστω πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΔ πυραμὶς διαιρεῖται εἰς δύο πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ Fig. 3.

ὅλη, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος.

Τετμήσθωσαν γὰρ αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΑ ΑΔ ΔΒ ΔΓ δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ Η Θ Κ Λ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΕΗ ΗΘ ΘΚ ΚΛ ΛΘ ΚΖ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΒ, ἡ δὲ ΑΘ τῇ ΘΔ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΑΒ παράλληλός ἐστι· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΕΒΚ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΘΚ τῇ ΕΒ. Ἀλλὰ ἡ ΕΒ τῇ ΕΑ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΕΑ ἄρα τῇ ΘΚ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΔ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ ΑΘ δυσὶ ταῖς ΚΘ ΘΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΑΘ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΘΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΘ βάσει τῇ ΚΔ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΑΕΘ τρίγωνον τῷ ΘΚΔ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΘΗ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΕΘ ΘΗ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΔ ΔΛ εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· ἴσας γωνίας περιέχουσιν. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΔΛ γωνίᾳ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΘ ΘΗ δυσὶ ταῖς ΚΔ ΔΛ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΕΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΚΔΛ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΕΗ βάσει τῇ ΚΛ ἐστὶν ἴση· ἴσον ἄρα καὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΘΗ τρίγωνον τῷ ΚΔΛ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ ἴσον τέ ἐστι καὶ ὅμοιον· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση καὶ ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΔΒ παρὰ μίαν τῶν πλευρῶν τὴν ΑΒ, ἦκται ἡ ΘΚ· ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ, καὶ τὰς πλευ-

ρὰς ἀνάλογον ἔχουσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΒ τρίγωνον τῷ ΔΘΚ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΚΛ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΑΔΓ τῷ ΔΛΘ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι ἁπτόμεναι ἀλλήλων αἱ ΒΑ ΑΓ παρὰ δύο εὐθείας ἁπτομένας ἀλλήλων τὰς ΚΘ ΘΛ εἰσὶν, οὐκ ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι· ἴσας γωνίας περιέχουσιν. Ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΘΛ. Καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΛΘ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΘΚΛ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἀλλὰ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ὥςτε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕΗΘ ΘΚΛΔ πυραμίδων ὁμοία ἐστὶ τῇ ὅλῃ τῇ ΑΒΓΔ πυραμίδι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΖ τῇ ΖΓ, διπλάσιόν ἐστι τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον τοῦ ΗΖΓ τριγώνου. Καὶ ἐπεὶ ἐὰν ᾖ δύο πρίσματα ἰσοϋψῆ, καὶ τὸ μὲν ἔχῃ βάσιν παραλληλόγραμμον, τὸ δὲ τρίγωνον, διπλάσιον δὲ ᾖ τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου, ἴσα ἐστὶ τὰ πρίσματα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ πρίσμα τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΒΚΖ ΕΘΗ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΕΒΖΗ ΕΒΚΘ ΘΚΖΗ τῷ πρίσματι τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ δύο μὲν τριγώνων τῶν ΗΖΓ ΘΚΛ, τριῶν δὲ παραλληλογράμμων τῶν ΚΖΓΛ ΛΓΗΘ ΘΚΖΗ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἑκάτερον τῶν πρισμάτων, οὗ τε βάσις τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ

εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΚΛΘ τρίγωνον, μεῖζόν ἐστιν ἑκατέρας τῶν πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ Δ σημεῖα· ἐπειδήπερ καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΕΖ ΕΚ εὐθείας, τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΒΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ἴσων καὶ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται· ὥστε καὶ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, μεῖζόν ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον. Ἴσον δὲ τὸ μὲν πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΒΖΗ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΘΚ εὐθεῖα, τῷ πρίσματι, οὗ βάσις μὲν τὸ ΗΖΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΘΚΛ τρίγωνον· ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΕΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΚΛ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον· τὰ ἄρα εἰρημένα δύο πρίσματα μείζονά ἐστι τῶν εἰρημένων δύο πυραμίδων, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΕΗ ΘΚΛ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Θ Δ σημεῖα.

Ἡ ἄρα ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, διῄρηται εἰς δύο πυραμίδας, ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τὰ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ.

Ἐὰν ὦσι δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, διαιρεθῇ δὲ ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίνηται· ἔσται ὡς ἡ τῆς μιᾶς πυραμίδος βάσις πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας πυραμίδος βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ μιᾷ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. 4.

Ἔστωσαν δύο πυραμίδες ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος, τριγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓ ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η Θ σημεῖα, καὶ διῃρήσθω ἑκατέρα αὐτῶν εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ, καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα, καὶ τῶν γενομένων πυραμίδων ἑκατέρα τὸν αὐτὸν τρόπον νενοήσθω διῃρημένη, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Fig. 4.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΞ τῇ ΞΓ, ἡ δὲ ΑΛ τῇ ΛΓ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΞΛ τῇ ΑΒ, καὶ ὅμοιον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΛΞΓ τριγώνῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον τῷ ΡΦΖ τριγώνῳ ὅμοιόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ μὲν ΒΓ τῆς ΓΞ, ἡ δὲ ΕΖ τῆς ΖΦ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΞ, οὕτως ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΦ. Καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῶν ΒΓ ΓΞ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΑΒΓ ΛΞΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΕΖ ΖΦ ὅμοιά τε καὶ ὁμοίως κείμενα εὐθύγραμμα τὰ ΔΕΖ ΡΦΖ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον

πρὸς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΔΕΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ ΛΞΓ πρὸς τὸ ΡΦΖ. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις, ἀλλὰ μὴν καὶ τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα ἴσα ἐστὶν ἀλλήλοις· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΛΞΒ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΜΟ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΕΠΡΦ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· συνθέντι ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΜΟ ΛΞΓΜΝΟ πρίσματα πρὸς τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα, οὕτως τὰ ΠΕΦΡΣΤ ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς τὰ ΚΒΞΛΟΜ ΛΞΓΟΜΝ πρὸς τὰ ΠΕΦΡΣΤ ΡΦΖΣΤΥ πρίσματα, οὕτως τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα. Ὡς δὲ τὸ ΛΞΓΜΝΟ πρίσμα πρὸς τὸ ΡΦΖΣΤΥ πρίσμα, οὕτως ἐδείχθη ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, καὶ ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς γενομένας πυραμίδας διέλωμεν τὸν αὐτὸν τρόπον οἷον

ὡς τὰς ΟΜΝΗ ΣΤΥΘ· ἔσται ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν· ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΞΓ ΡΦΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως καὶ τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα, καὶ τέσσαρα πρὸς τέσσαρα. Τὰ αὐτὰ δὴ δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν γενομένων πρισμάτων ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ΑΚΛΟ καὶ ΔΠΡΣ πυραμίδων καὶ πάντων ἁπλῶς τῶν ἰσοπληθῶν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα.

Ὅτι δέ ἐστιν ὡς τὸ ΛΞΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΦ, οὕτως δεικτέον.

Ἐπὶ γὰρ τῆς αὐτῆς καταγραφῆς νενοήσθωσαν ἀπὸ τῶν Η Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἐπίπεδα, ἴσαι δηλαδὴ τυγχάνουσαι διὰ τὸ ἰσοϋψεῖς ὑποκεῖσθαι τὰς πυραμίδας. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι, ἥτε ΗΓ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η κάθετος ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων τῶν ΑΒΓ ΟΜΝ τέμνονται· εἰς τοὺς αὐτοὺς λόγους τμηθήσονται. Καὶ τέτμηται ἡ ΗΓ δίχα ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου κατὰ τὸ Ν· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Η ἄρα κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΟΜΝ ἐπιπέδου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Θ κάθετος ἐπὶ τὸ ΔΕΖ ἐπίπεδον δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ΣΤΥ ἐπιπέδου. Καὶ εἰσὶν ἴσαι αἱ

ἀπὸ

ἀπὸ τῶν Η Θ κάθετοι ἐπὶ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ ἐπίπεδα· ἴσαι ἄρα καὶ αἱ ἀπὸ τῶν ΟΜΝ ΣΤΥ τριγώνων ἐπὶ τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ κάθετοι· ἰσοϋψῆ ἄρα ἐστὶ τὰ πρίσματα, ὧν βάσεις μὲν εἰσι τὰ ΛΞΓ ΡΦΖ τρίγωνα, ἀπεναντίον δὲ τὰ ΟΜΝ ΣΤΥ· ὥστε καὶ τὰ στερεὰ παραλληλεπίπεδα τὰ ἀπὸ τῶν εἰρημένων πρισμάτων ἀναγραφόμενα, ἰσοϋψῆ τυγχάνοντα, πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· καὶ τὰ ἡμίση. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΛΞΓ βάσις πρὸς τὴν ΡΦΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 5.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ υψος πυραμίδες, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα. Fig. 5.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεὸν, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Χ, καὶ διῃρήσθω ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς εἴς τε δύο πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ ὁμοίας τῇ ὅλῃ καὶ εἰς δύο πρίσματα ἴσα· τὰ δὴ δύο πρίσματα μείζονά ἐστιν, ἢ τὸ ἥμισυ τῆς ὅλης πυραμίδος. Καὶ πάλιν αἱ ἐκ τῆς διαιρέσεως γενόμεναι πυραμίδες ὁμοίως διῃρήσθωσαν, καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως οὗ λειφθῶσί τινες πυραμίδες ἀπὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος, αἵ εἰσιν ἐλάττονες τῆς ὑπεροχῆς, ἧς ὑπερέχει ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς τοῦ Χ στερεοῦ. Δε-

λείφθωσαν καὶ ἐστωσαν λόγου ἕνεκα αἱ ΛΠΡΣ ΣΤΥΘ· λοιπὰ ἄρα τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα μείζονά ἐστι τοῦ Χ στερεοῦ. Διῃρήσθω καὶ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς ὁμοίως καὶ ἰσοπληθῶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὸ Χ στερεόν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὰ ἐν αὐτῇ πρίσματα, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῶν ἐν αὐτῇ πρισμάτων· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Χ στερεὸν τῶν ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρισμάτων. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι οὐδὲ ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος στερεόν.

Λέγω δὴ ὅτι οὐκ ἔστιν οὐδὲ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Χ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα. Ὡς δὲ τὸ Χ στερεὸν πρὸς τὴν ΑΒΓΗ πυραμίδα, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔΕΖ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓ βάσιν, οὕτως ἡ ΔΕΖΘ πυραμὶς πρὸς ἔλαττόν τι τῆς ΑΒΓΗ πυρα-

μίδος, ὅπερ ἄτοπον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς μεῖζόν τι τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα.

Αἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι πυραμίδες καὶ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 6.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος πυραμίδες, ὧν αἱ βάσεις μὲν τὰ ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ πολύγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Μ Ν σημεῖα· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα. Fig. 6.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΑΔ ΖΘ ΖΚ. Ἐπεὶ οὖν δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΒΓΜ ΑΓΔΜ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα· καὶ συνθέντι ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΓΔ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς ἡ ΑΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Καὶ συνθέντι πάλιν, ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ὡς ἡ ΖΗΘΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως καὶ ἡ ΖΗΘΚΛΝ πυ-

ραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Καὶ ἐπεὶ δύο πυραμίδες εἰσὶν αἱ ΑΔΕΜ ΖΚΛΝ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, καὶ ὕψος ἴσον· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΔΕ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα· ὡς δὲ ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΚΛΝ πυραμίδα. Ἀλλὰ μὴν καὶ ὡς ἡ ΖΚΛ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἦν καὶ ἡ ΖΚΛΝ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα· καὶ διΐσου πάλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΗΘΚΛΝ πυραμίδα.

Αἱ πυραμίδες ἄρα, αἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος οὖσαι καὶ ... καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει ... ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Πᾶν πρίσμα τρίγωνον ἔχον βάσιν διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. 7.

Ἔστω πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· λέγω ὅτι τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα διαιρεῖται εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους βάσεις ἐχούσας. Fig. 7

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΔ ΕΓ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΕΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΔΒ τριγώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ

δὲ τὸ Γ σημεῖον. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΔΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΖΓΒΕ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΓΕ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΓΖ τρίγωνον τῷ ΓΒΕ τριγώνῳ· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΕΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΓΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον. Ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΒΓΕ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐδείχθη πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΕΖ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ἴση ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον· διῄρηται ἄρα τὸ ΑΒΓΔΕΖ πρίσμα εἰς τρεῖς πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις, τριγώνους ἐχούσας βάσεις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Καὶ ἐπεὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, ἡ αὐτή ἐστι πυραμίδι, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΓΑΒ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, ὑπὸ γὰρ τῶν αὐτῶν ἐπιπέδων περιέχεται, ἡ δὲ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΒΔ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Γ σημεῖον, τρίτον ἐδείχθη τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Δ σημεῖον, τρίτον ἐστὶ τοῦ πρίσματος τοῦ ἔχοντος βάσιν τὴν αὐτὴν, τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΔΕΖ·

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι πᾶσα πυραμὶς τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ πρίσματος, τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῇ καὶ τὸ ὕψος ἴσον· (ἐπειδήπερ κἂν ἕτερόν τι σχῆμα εὐθύγραμμον ἔχῃ τὴν βάσιν τὸ πρίσμα καὶ τὸ ἀπεναντίον, τὸ αὐτὸ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπεναντίον, καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον . . . . κ. τ. λ. . . .)

Πρότασις η'.

Αἱ ὅμοιαι πυραμίδες, καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις, ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. 8.

Ἔστωσαν ὅμοιαι καὶ ὁμοίως κείμεναι πυραμίδες, ὧν βάσεις μέν εἰσι τὰ ΑΒΓ ΔΕΖ τρίγωνα, κορυφαὶ δὲ τὰ Η Θ σημεῖα· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Fig. 8.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστιν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίᾳ, ἡ δὲ ὑπὸ ΗΒΓ τῇ ὑπὸ ΘΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΗ τῇ ὑπὸ ΔΕΘ, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ ἡ ΒΗ πρὸς τὴν ΕΘ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΔΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΠ παραλληλογράμμῳ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ μὲν ΒΝ τῷ ΕΡ ὅμοιόν ἐστι, τὸ δὲ ΒΚ τῷ ΕΞ· τὰ τρία ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ΜΒ ΒΚ ΒΝ τρισὶ τοῖς ΕΠ ΕΞ ΕΡ ὅμοιά ἐστιν. Ἀλλὰ τὰ μὲν τρία τὰ ΜΒ ΒΚ ΒΝ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα τε καὶ ὅμοιά ἐστι, τὰ δὲ τρία τὰ ΕΠ ΕΞ ΕΡ τρισὶ τοῖς ἀπεναντίον ἴσα

τε καὶ ὅμοιά ἐστι· τὰ ΒΗΜΛ ΕΘΠΟ ἄρα στερεὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων ἴσων τὸ πλῆθος περιέχεται. Ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τὰ δὲ ὅμοια στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· τὸ ΒΗΜΛ ἄρα στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν τὴν ΕΖ. Ὡς δὲ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν πρὸς τὸ ΕΘΠΟ στερεὸν, οὕτως ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα, ἐπειδήπερ ἡ πυραμὶς ἕκτον μέρος ἐστὶ τοῦ στερεοῦ, διὰ τὸ καὶ τὸ πρίσμα, ἥμισυ ὂν τοῦ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου, τριπλάσιον εἶναι τῆς πυραμίδος.

Καὶ ἡ ΑΒΓΗ ἄρα πυραμὶς πρὸς τὴν ΔΕΖΘ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι καὶ αἱ πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν. Διαιρεθεισῶν γὰρ αὐτῶν εἰς τὰς ἐν αὐταῖς πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τῷ καὶ τὰ ὅμοια πολύγωνα τῶν βάσεων εἰς ὅμοια τρίγωνα διαιρεῖσθαι, καὶ ἴσα τῷ πλήθει καὶ ὁμόλογα τοῖς ὅλοις, ἔσται ὡς ἐν τῇ ἑτέρᾳ μία πυραμὶς τρίγωνον ἔχουσα βάσιν, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ μίαν πυραμίδα τρίγωνον ἔχουσαν βάσιν, οὕτως καὶ ἅπασαι αἱ ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδες τριγώνους ἔχουσαι βάσεις πρὸς τὰς ἐν τῇ ἑτέρᾳ πυραμίδι πυραμίδας τριγώνους βάσεις ἐχούσας, τοῦτ᾽ ἔστιν αὐτὴ ἡ πολύγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν πυραμίδα. Ἡ δὲ τρίγωνον βάσιν ἔχουσα πυραμὶς πρὸς τὴν τρίγωνον βάσιν ἔχουσαν ἐν τριπλασίονι λόγῳ ἐστὶ τῶν ὁμολόγων

πλευρῶν· καὶ ἡ πολύγωνον ἄρα βάσιν ἔχουσα πρὸς τὴν ὁμοίαν πολύγωνον βάσιν ἔχουσαν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευράν.

Πρότασις θ'.

Τῶν ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν πυραμίδων τριγώνους βάσεις ἐχουσῶν ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσαι εἰσὶν ἐκεῖναι. 9.

Ἔστωσαν γὰρ ἴσαι πυραμίδες, τριγώνους βάσεις ἔχουσαι, τὰς ΑΒΓ ΔΕΖ, κορυφὰς δὲ τὰ Η Θ σημεῖα· λέγω ὅτι τῶν ΑΒΓΗ ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. Fig. 9.

Συμπεπληρώσθω γὰρ τὰ ΒΗΜΛ ΕΘΠΟ στερεὰ παραλληλεπίπεδα. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι, καί ἐστι τῆς μὲν ΑΒΓΗ πυραμιδος ἑξαπλάσιον τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν, τῆς δὲ ΔΕΖΘ πυραμίδος ἑξαπλάσιον τὸ ΕΘΠΟ στερεόν· ἴσον ἄρα τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ. Τῶν δὲ ἴσων στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλ' ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΕΖ τρίγωνον, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τοῦ ΕΘΠΟ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψει,

τὸ δὲ τοῦ ΒΗΜΛ στερεοῦ ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· τῶν ἄρα ΑΒΓΗ ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΒΓΗ ΔΕΖΘ πυραμίδων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος· ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΒΜ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΕΠ παραλληλόγραμμον, οὕτως τὸ τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος πρὸς τὸ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος. Ἀλλὰ τὸ μὲν τῆς ΔΕΖΘ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψει, τὸ δὲ τῆς ΑΒΓΗ πυραμίδος ὕψος τὸ αὐτό ἐστι τῷ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΜ βάσις πρὸς τὴν ΕΠ βάσιν, οὕτως τὸ τοῦ ΕΘΠΟ παραλληλεπιπέδου ὕψος πρὸς τὸ τοῦ ΒΗΜΛ παραλληλεπιπέδου ὕψος. Ὧν δὲ στερεῶν παραλληλεπιπέδων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσα ἐστὶν ἐκεῖνα· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΗΜΛ στερεὸν παραλληλεπίπεδον τῷ ΕΘΠΟ στερεῷ παραλληλεπιπέδῳ. Καί ἐστι τοῦ μὲν ΒΗΜΛ ἕκτον μέρος ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς, τοῦ δὲ ΕΘΠΟ στερεοῦ παραλληλεπιπέδου ἕκτον μέρος ἡ ΔΕΖΘ πυραμίς· ἴση ἄρα ἡ ΑΒΓΗ πυραμὶς τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι.

Τῶν ἄρα ἴσων πυραμίδων καὶ τριγώνους . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι'.

Πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. 10.

Ἐχέτω γὰρ κῶνος κυλίνδρῳ βάσιν τε τὴν αὐτὴν, τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, καὶ ὕψος ἴσον· λέγω ὅτι ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦτ᾽ ἔστιν ὅτι ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων ἐστίν. Fig. 10.

Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου τριπλασίων, ἔσται ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἤτοι μείζων ἢ τριπλασίων, ἢ ἐλάσσων ἢ τριπλασίων. Ἔστω πρότερον μείζων ἢ τριπλασίων, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ δὴ ΑΒΓΔ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πρίσμα ἰσοϋψὲς τῷ κυλίνδρῳ, τὸ δὴ ἀνεσταμένον πρίσμα μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ κἂν περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον ἥμισύ ἐστι τοῦ περιγεγραμμένου, καί ἐστι τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀνεστάμενα πρίσματα ἰσοϋψῆ στερεὰ παραλληλεπίπεδα· τὰ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντα στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις· τὰ ἄρα πρίσματα ἐστὶν ὡς αἱ βάσεις καὶ τὸ ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ ἄρα τετραγώνου ἀνασταθὲν πρίσμα ἥμισύ ἐστι τοῦ ἀνασταθέντος πρίσματος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, καὶ ἔστιν ὁ κύλινδρος ἐλάττων τοῦ πρίσματος τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν ΑΒΓΔ κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου· τὸ ἄρα πρίσμα τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἰσοϋψὲς τῷ κυλίν-

δρῳ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἡμίσεως τοῦ κυλίνδρου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ Η Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν. Ἀνεστάτω ἀφ᾽ ἑκάστου τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ἀνασταθέντων πρισμάτων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ᾽ ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κυλίνδρου, ἐπειδήπερ ἐὰν διὰ τῶν Ε Ζ Η Θ σημείων παραλλήλους ταῖς ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ ἀγάγωμεν, καὶ συμπληρώσωμεν τὰ ἐπὶ τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ παραλληλόγραμμα, καὶ ἀπ᾽ αὐτῶν ἀναστήσωμεν στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, ἑκάστου τῶν ἀνασταθέντων ἡμίσεά ἐστι τὰ πρίσματα τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων· καὶ ἔστι τὰ τοῦ κυλίνδρου τμήματα ἐλάττονα τῶν ἀναοιαθέντων στερεῶν παραλληλεπιπέδων· ὥςτε καὶ τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων πρίσματα μείζονά ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τῶν καθ᾽ ἑαυτὰ τοῦ κυλίνδρου τμημάτων· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἀφ᾽ ἑκάστου τῶν τριγώνων πρίσματα ἰσοϋψῆ τῷ κυλίνδρῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κυλίνδρου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κύλινδρος τοῦ τριπλασίου τοῦ κώνου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· λοιπὸν ἄρα τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστιν ἢ τριπλάσιον τοῦ κώνου. Ἀλλὰ τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, τριπλάσιόν

ἐστι τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ· καὶ ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ κώνου, τοῦ βάσιν ἔχοντος τὸν ΑΒΓΔ κύκλον. Ἀλλὰ καὶ ἐλάττων, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ᾽ αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου μείζων ἢ τριπλασίων.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἐλάττων ἢ τριπλασίων ἐστὶν ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἐλάττων ἢ τριπλάσιος ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ἀνάπαλιν ἄρα ὁ κῶνος τοῦ κυλίνδρου μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος. Ἐγγεγράφθω δὴ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ· τὸ ΑΒΓΔ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου πυραμὶς, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου, ἐπειδήπερ ὡς ἔμπροσθεν ἐδείκνυμεν, ὅτι ἐὰν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον περιγράψωμεν, ἔσται τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον ἥμισυ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφομένου τετραγώνου· καὶ ἐὰν ἀπὸ τῶν τετραγώνων στερεὰ παραλληλεπίπεδα ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἃ καὶ καλεῖται πρίσματα, ἔσται τὸ ἀνασταθὲν ἀπὸ τοῦ ΑΒΓΔ τετραγώνου ἥμισυ τοῦ ἀνασταθέντος ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου, πρὸς ἄλληλα γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις· ὥςτε καὶ τὰ τρίτα· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, ἥμισύ ἐστι τῆς πυραμίδος τῆς ἀνασταθείσης ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον περιγραφέντος τετραγώνου. Καί ἐστι μείζων ἡ πυραμὶς ἡ ἀνασταθεῖσα ἀπὸ τοῦ περὶ τὸν κύκλον τετραγώνου τοῦ κώνου, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτόν· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΒΓΔ τετράγωνον, κορυφὴ

δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ε Ζ Η Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΑΕΒ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΑΕΓΔ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀφ' ἑκάστου τῶν ΑΗΔ ΒΖΓ ΓΗΔ ΔΘΑ τριγώνων πυραμίδες, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαι τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου· Τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομέμας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδα τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσαν τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ κῶνος τοῦ τρίτου μέρους τοῦ κυλίνδρου. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΑΕ ΕΒ ΒΖ ΖΓ ΓΗ ΗΔ ΔΘ ΘΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τρίτον μέρος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλ' ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, τρίτον ἐστὶ μέρος τοῦ πρίσματος, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ· τὸ ἄρα πρίσμα, οὗ βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΕΒΖΓΗΔΘ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κυλίνδρῳ, μεῖζόν ἐστι τοῦ κυλίνδρου, οὗ βάσις ἐστὶν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ἐμπεριέχεται γὰρ ὑπ' αὐτοῦ, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου ἐλάττων ἐστὶν ἢ τριπλάσιος. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ μείζων ἢ τριπλάσιος· τριπλάσιος ἄρα ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου· ὥστε ὁ κῶνος τρίτον μέρος ἐστὶ τοῦ κυλίνδρου.

Πᾶς ἄρα κῶνος κυλίνδρου τρίτον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια'.

Οἱ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. 11.

Ἔστωσαν ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ κύκλοι, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ ΜΝ, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΑΓ ΕΗ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον. Fig. 11.

Εἰ γὰρ μή· ἔσται ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος ἤτοι πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεὸν ἢ πρὸς μεῖζον. Ἔστω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ᾧ ἔλασσόν ἐστι τὸ Ξ στερεὸν τοῦ ΕΝ κώνου, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ Ψ στερεόν· ὁ ΕΝ κῶνος ἄρα ἴσον ἐστὶ τοῖς Ξ Ψ στερεοῖς. Ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κύκλου. Ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου· ἐπειδήπερ ἐὰν περιγράψωμεν περὶ τὸν κύκλον τετράγωνον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀναστήσωμεν πυραμίδα ἰσοϋψῆ τῷ κώνῳ, ἡ ἐγγραφεῖσα πυραμὶς ἥμισύ ἐστι τῆς περιγραφείσης· πρὸς ἀλλήλας γάρ εἰσιν ὡς αἱ βάσεις. Ἐλάττων δὲ ὁ κῶνος τῆς περιγραφείσης πυραμίδος· ἡ ἄρα πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΖΗΘ τετράγωνον, κορυφὴ δὲ ἡ αὐτὴ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο Π Ρ Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΟ ΟΕ ΕΠ ΠΖ ΖΡ ΡΗ ΗΣ ΣΘ· ἕκαστον ἄρα τῶν ΘΟΕ ΕΠΖ ΖΡΗ ΗΣΘ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ καθ'

ἑαυτὸ τμήματος τοῦ κύκλου. Ἀνεστάτω ἀφ' ἑκάστου τῶν ΘΟΕ ΕΠΖ ΖΡΗ ΗΣΘ τριγώνων πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου· τέμνοντες δὴ τὰς ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἀφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας ἰσοϋψεῖς τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάσσονα τοῦ Ψ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΘΟ ΟΕ ΕΠ ΠΖ ΖΡ ΡΗ ΗΣ ΣΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὕψος δὲ τὸ αὐτὸ τῷ κώνῳ, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ, καὶ ἀνεστάτω ἀπ' αὐτῷ πυραμὶς ἰσοϋψὴς τῷ ΑΛ κώνῳ. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΗ, οὕτως ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον. Ὡς δὲ ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, ὡς δὲ τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον πρὸς τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΔΤΑΥΒΦΓΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΘΟΕΠΖΡΗΣ

πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδα. Μείζων δὲ ὁ ΑΛ κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς ἐν τῷ ΕΝ κώνῳ πυραμίδος. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδέ ἐστιν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεόν· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΕΖΗΘ κύκλος πρὸς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, οὕτως ὁ ΕΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΛ κώνου στερεὸν, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΝ κώνου στερεόν. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλασσον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως ὁ ΑΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΝ κῶνον.

Ἀλλ᾽ ὡς ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλασίων γὰρ ἑκάτερος ἑκατέρου· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΑΒΓΔ κύκλος πρὸς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον, οὕτως οἱ ἐπ᾽ αὐτῶν ἰσοϋψεῖς τοῖς κώνοις κύλινδροι.

Οἱ ἄρα ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρό-

Πρότασις ιβ.

Οἱ ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἐν ταῖς βάσεσι διαμέτρων. 12.

Ἔστωσαν ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ τῶν βάσεων αἱ ΒΔ ΖΘ, ἄξονες δὲ τῶν κώνων καὶ κυλίνδρων οἱ ΚΛ ΜΝ· λέγω ὅτι ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸν κῶνον, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Fig. 12.

Εἰ γὰρ μὴ ἔχει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἕξει ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος ἢ πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, ἢ πρὸς μεῖζον. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἔλαττον τὸ Ξ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘ κύκλον τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ· τὸ ἄρα ΕΖΗΘ τετράγωνον μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· ἡ ἄρα ἀνασταθεῖσα πυραμὶς μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ κώνου. Τετμήσθωσαν δὴ αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Ο Π Ρ Σ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΟ ΟΖ ΖΠ ΠΗ ΗΡ ΡΘ ΘΣ ΣΕ· καὶ ἕκαστον ἄρα τῶν ΕΟΖ ΖΠΗ ΗΡΘ ΘΣΕ τριγώνων μεῖζόν ἐστιν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὸ τμήματος τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Καὶ ἀνεστάτω ἐφ' ἑκάστου τῶν ΕΟΖ ΖΠΗ ΗΡΘ ΘΣΕ τριγώνων πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ἀνασταθεισῶν πυραμίδων μείζων ἐστὶν ἢ τὸ ἥμισυ μέρος τοῦ καθ' ἑαυτὴν τμήματος τοῦ κώνου. Τέμνοντες δὴ τὰς

ὑπολειπομένας περιφερείας δίχα, καὶ ἐπιζευγνύντες εὐθείας, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας, τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσας τῷ κώνῳ, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινά ποτε τμήματα τοῦ κώνου, ἃ ἔσται ἐλάττονα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος τοῦ Ξ στερεοῦ. Λελείφθω, καὶ ἔστω τὰ ἐπὶ τῶν ΕΟ ΟΖ ΖΠ ΠΗ ΗΡ ΡΘ ΘΣ ΣΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, μείζων ἐστὶ τοῦ Ξ στερεοῦ. Ἐγγεγράφθω καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον τῷ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολυγώνῳ ὅμοιόν τε καὶ ὁμοίως κείμενον πολύγωνον τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ, καὶ ἀνεστάτω ἐπὶ τοῦ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολυγώνου πυραμὶς τὴν αὐτὴν κορυφὴν ἔχουσα τῷ κώνῳ, καὶ τῶν μὲν περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΛΒΤ, τῶν δὲ περιεχόντων τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ἓν τρίγωνον ἔστω τὸ ΝΟΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΤ ΜΟ. Καὶ ἐπεὶ ὅμοιός ἐστιν ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος τῷ ΕΖΗΘΝ κώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ὁ ΚΛ ἄξων πρὸς τὸν ΜΝ ἄξονα. Ὡς δὲ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ, οὕτως ἡ ΚΛ πρὸς τὴν ΜΝ· καὶ ἐναλλὰξ ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, καὶ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΚΛ ΖΜΝ ἴσαι, ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΛ ΖΜΝ αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΛ τρίγωνον τῷ ΖΜΝ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΤ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΟ, καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΒΚΤ ΖΜΟ, ἐπειδήπερ ὃ μέρος ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΚΤ γωνία τῶν πρὸς τῷ Κ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ

ἡ ὑπὸ ΖΜΟ γωνία τῶν πρὸς τῷ Μ κέντρῳ τεσσάρων ὀρθῶν. Ἐπεὶ οὖν περὶ ἴσας γωνίας αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΚΤ τρίγωνον τῷ ΖΜΟ τριγώνῳ. Πάλιν, ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΖΜ πρὸς τὴν ΜΝ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΚ τῇ ΚΤ, ἡ δὲ ΖΜ τῇ ΟΜ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΚΛ, οὕτως ἡ ΟΜ πρὸς τὴν ΜΝ. Καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς ὑπὸ ΤΚΛ ΟΜΝ, ὀρθαὶ γὰρ, αἱ πλευραὶ ἀνάλογόν εἰσιν· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΚΤ τρίγωνον τῷ ΝΜΟ τριγώνῳ. Καὶ ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΚΒ ΝΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΚ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΒΚΤ ΖΜΟ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΟ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΛΒ πρὸς τὴν ΒΤ, οὕτως ἡ ΝΖ πρὸς τὴν ΖΟ. Πάλιν, ἐπεὶ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΛΤΚ ΝΟΜ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΚ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΜ, διὰ δὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΚΒΤ ΟΜΖ τριγώνων ἐστὶν ὡς ἡ ΚΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΜΟ πρὸς τὴν ΟΖ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΛΤ πρὸς τὴν ΤΒ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΖ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὡς ἡ ΤΒ πρὸς τὴν ΒΛ, οὕτως ἡ ΟΖ πρὸς τὴν ΖΝ· διΐσου ἄρα ὡς ἡ ΤΛ πρὸς τὴν ΛΒ, οὕτως ἡ ΟΝ πρὸς τὴν ΝΖ· τῶν ΛΤΒ ΝΟΖ ἄρα τριγώνων ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ἰσογώνια ἄρα ἐστὶ τὰ ΛΤΒ ΝΟΖ τρίγωνα· ὥστε καὶ ὅμοια· καὶ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΒΚΤ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, ὁμοία ἐστὶ πυραμίδι, ἧς βάσις μὲν τὸ ΖΜΟ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, ὑπὸ γὰρ ὁμοίων ἐπιπέδων περιέχονται ἴσων τὸ πλῆθος. Αἱ δὲ ὁμοίαι πυραμίδες καὶ τριγώνους ἔχουσαι βάσεις ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ ἄρα ΒΚΤΛ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει,

ἤπερ ἡ ΒΚ πρὸς τὴν ΖΜ. Ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνύντες ἀπὸ τῶν Α Χ Δ Φ Γ Υ εὐθείας ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε Σ Θ Ρ Η Π ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀνιστάντες ἐφ' ἑκάστου τῶν τριγώνων πυραμίδας τὰς αὐτὰς κορυφὰς ἐχούσας τοῖς κώνοις, δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ὁμοταγῶν πυραμίδων πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΒΚ ὁμόλογος πλευρὰ πρὸς τὴν ΖΜ ὁμόλογον πλευράν, τοῦτ' ἔστιν, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἀλλ' ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΒΚΤΔ πυραμὶς πρὸς τὴν ΖΜΟΝ πυραμίδα, οὕτως ἡ ὅλη πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ὅλην πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον· ὥςτε καὶ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὑπόκειται δὲ καὶ ὁ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, τριπλασίονα λόγον ἔχων, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὸ Ξ στερεὸν, οὕτως ἡ πυραμὶς, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν αὐτῷ πυραμίδα, ἧς βάσις μὲν τὸ ΑΤΒΥΓΦΔΧ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Λ, οὕτως τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὴν πυραμίδα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ

Ν. Μείζων δὲ ὁ εἰρημένος κῶνος τῆς ἐν αὐτῷ πυραμίδος, ἐμπεριέχει γὰρ αὐτήν· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ Ξ στερεὸν τῆς πυραμίδος, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΟΖΠΗΡΘΣ πολύγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Ν. Ἀλλὰ καὶ ἔλαττον, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ὁ κῶνος, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΑΒΓΔ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Λ σημεῖον, πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ κώνου στερεὸν, οὗ βάσις μέν ἐστιν ὁ ΕΖΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ν σημεῖον, τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ.

Λέγω ὅτι οὐδὲ ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Εἰ γὰρ δυνατόν· ἐχέτω πρὸς μεῖζον τὸ Ξ· ἀνάπαλιν ἄρα τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ. Ὡς δὲ τὸ Ξ στερεὸν πρὸς τὸν ΑΒΓΔΛ κῶνον, οὕτως ὁ ΕΖΗΘΝ κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεόν· καὶ ὁ ΕΖΗΘΝ ἄρα κῶνος πρὸς ἔλαττόν τι τοῦ ΑΒΓΔΛ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΒΔ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα ὁ ΑΒΓΔΛ κῶνος πρὸς μεῖζόν τι τοῦ ΕΖΗΘΝ κώνου στερεὸν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἔλαττον· ὁ ΑΒΓΔΛ ἄρα κῶνος πρὸς τὸν ΕΖΗΘΝ κῶνον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Ὡς δὲ ὁ κῶνος πρὸς τὸν κῶνον, οὕτως ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, τριπλάσιος γὰρ ὁ κύλινδρος τοῦ κώνου, ὁ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῷ κώνῳ καὶ ἰσοϋψὴς αὐτῷ· καὶ κύλινδρος ἄρα πρὸς τὸν κύλινδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΖΘ.

Οἱ ἄρα ὅμοιοι κῶνοι καὶ κύλινδροι . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ'.

Ἐὰν κύλινδρος ἐπιπέδῳ τμηθῇ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔσται ὡς ὁ κύλινδρος πρὸς τὸν κύλινδρον, οὕτως ὁ ἄξων πρὸς τὸν ἄξονα. 13.

Κύλινδρος γὰρ ὁ ΑΔ ἐπιπέδῳ τῷ ΗΘ τετμήσθω παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τοῖς ΑΒ ΓΔ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ΕΖ ἄξονι τὸ ΗΘ ἐπίπεδον κατὰ τὸ Κ σημεῖον· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα. Fig. 13.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΕΖ ἄξων ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Λ Μ σημεῖα, καὶ ἐκκείσθωσαν τῷ μὲν ΕΚ ἄξονι ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΕΝ ΝΛ, τῷ δὲ ΖΚ ἴσοι ὁσοιδηποτοῦν οἱ ΖΞ ΞΜ, καὶ νοείσθω ὁ ἐπὶ τοῦ ΛΜ ἄξονος κύλινδρος ὁ ΟΧ, οὗ βάσεις οἱ ΟΠ ΦΧ κύκλοι· καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῶν Ν Ζ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα τοῖς ΑΒ ΓΔ, καὶ ταῖς βάσεσι τοῦ ΟΧ κυλίνδρου· καὶ ποιείτωσαν τοὺς ΡΣ ΤΥ κύκλους περὶ τὰ Ν Ξ κέντρα. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΛΝ ΝΕ ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις· οἱ ἄρα ΠΡ ΡΒ ΒΗ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις· ἴσοι ἄρα καὶ οἱ ΠΡ ΡΒ ΒΗ κύλινδροι ἀλλήλοις. Ἐπεὶ οὖν οἱ ΛΝ ΝΕ ΕΚ ἄξονες ἴσοι εἰσὶν ἀλλήλοις, εἰσὶ δὲ καὶ οἱ ΠΡ ΡΒ ΒΗ κύλινδροι ἴσοι ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ΛΝ ΝΕ ΕΚ τῷ πλήθει τῶν ΠΡ ΡΒ ΒΗ· ὁσαπλασίων ἄρα ἐστὶν ὁ ΛΚ ἄξων τοῦ ΕΚ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΒ κυλίνδρου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁσαπλασίων ἐστὶν ὁ ΜΚ ἄξων τοῦ ΚΖ ἄξονος, τοσαυταπλασίων ἐστὶ

καὶ ὁ ΧΗ κύλινδρος τοῦ ΗΔ κυλίνδρου. Καὶ εἰ μὲν ἴσος ἐστὶν ὁ ΚΛ ἄξων τῷ ΚΜ ἄξονι, ἴσος ἔσται καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τῷ ΗΧ κυλίνδρῳ· εἰ δὲ μείζων ὁ ἄξων τοῦ ἄξονος, μείζων καὶ ὁ κύλινδρος τοῦ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἐλάσσων, ἐλάσσων. Τεσσάρων δὴ μεγεθῶν ὄντων, ἀξόνων μὲν τῶν ΕΚ ΚΖ, κυλίνδρων δὲ τῶν ΒΗ ΗΔ, εἴληπται ἰσάκις πολλαπλάσια, τοῦ μὲν ΕΚ ἄξονος καὶ τοῦ ΒΗ κυλίνδρου, ὅ τε ΛΚ ἄξων καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος, τοῦ δὲ ΚΖ ἄξονος καὶ τοῦ ΗΔ κυλίνδρου, ὅ τε ΚΜ ἄξων καὶ ὁ ΗΧ κύλινδρος, καὶ δέδεικται, ὅτι εἰ ὑπερέχει ὁ ΚΛ ἄξων τοῦ ΚΜ ἄξονος, ὑπερέχει καὶ ὁ ΠΗ κύλινδρος τοῦ ΗΧ κυλίνδρου, καὶ εἰ ἴσος, ἴσος, καὶ εἰ ἐλάττων, ἐλάττων· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΚ ἄξων πρὸς τὸν ΚΖ ἄξονα, οὕτως ὁ ΒΗ κύλινδρος πρὸς τὸν ΗΔ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Οἱ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ὕψη. 14.

Ἔστωσαν γὰρ ἐπὶ ἴσων βάσεων, τῶν ΑΒ ΓΔ κύκλων, κύλινδροι οἱ ΕΒ ΖΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. Fig. 14

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ὁ ΚΛ ἄξων ἐπὶ τὸ Ν σημεῖον, καὶ κείσθω τῷ ΗΘ ἄξονι ἴσος ὁ ΛΝ, καὶ περὶ ἄξονα τὸν ΛΝ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν οἱ ΕΒ ΓΜ κύλινδροι ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶ, πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις. Ἴσαι δέ εἰσιν αἱ βάσεις ἀλλήλαις· ἴσοι ἄρα εἰσὶ καὶ οἱ ΕΒ ΓΜ κύλινδροι ἀλλήλοις. Καὶ ἐπεὶ κύλινδρος ὁ ΖΜ ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΓΔ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΓΜ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΔ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΛΝ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα.

Ἴσος δέ ἐστιν ὁ μὲν ΓΜ κύλινδρος τῷ ΕΒ κυλίνδρῳ, ὁ δὲ ΛΝ ἄξων τῷ ΗΘ ἄξονι· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΛ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα. Ὡς δὲ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΛ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον· τριπλάσιοι γὰρ οἱ κύλινδροι τῶν κώνων· καὶ ὡς ἄρα ὁ ΗΘ ἄξων πρὸς τὸν ΚΛ ἄξονα, οὕτως ὁ ΑΒΗ κῶνος πρὸς τὸν ΓΔΚ κῶνον καὶ ὁ ΕΒ κύλινδρος πρὸς τὸν ΖΛ κύλινδρον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιέ.

Τῶν ἴσων κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι· καὶ ὧν κώνων καὶ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν, ἴσοι εἰσὶν ἐκεῖνοι. 15.

Ἔστωσαν ἴσοι κῶνοι καὶ κύλινδροι, ὧν βάσεις μὲν οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ κύκλοι, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ ΕΗ, ἄξονες δὲ οἱ ΚΛ ΜΝ, οἵ τινες καὶ ὕψη εἰσὶν τῶν κώνων ἢ κυλίνδρων, καὶ συμπεπληρώσθωσαν οἱ ΑΞ ΕΟ κύλινδροι· λέγω ὅτι τῶν ΑΞ ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, τοῦτ᾿ ἔστιν ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. Fig. 15.

Τὸ γὰρ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ὕψει ἤτοι ἴσον ἐστὶν, ἢ οὔ. Ἔστω πρότερον ἴσον. Ἔστι δὲ καὶ ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ ἴσος. Οἱ δὲ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος ὄντες κῶνοι καὶ κύλινδροι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς αἱ βάσεις· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒΓΔ βάσις τῇ ΕΖΗΘ βάσει· ὥςτε καὶ ἀντιπέπονθεν, ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος. Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΝ ἴσον, ἀλλ᾿ ἔστω μεῖζον τὸ ΜΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τοῦ ΜΝ ὕψους τῷ ΚΛ ἴσον τὸ ΠΜ, καὶ διὰ

τοῦ Π σημείου τεμνέσθω ὁ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις τῶν ΕΖΗΘ ΡΟ κύκλων, καὶ ἀπὸ βάσεως μὲν τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου, ὕψους δὲ τοῦ ΠΜ κύλινδρος νενοήσθω ὁ ΕΣ. Καὶ ἐπεὶ ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ, ἄλλος δέ τις ὁ ΕΣ κύλινδρος· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον. Ἀλλ' ὡς μὲν ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσὶν οἱ ΑΞ ΕΣ κύλινδροι· ὡς δὲ ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, ὁ γὰρ ΕΟ κύλινδρος ἐπιπέδῳ τέτμηται τῷ ΤΥΣ παραλλήλῳ ὄντι τοῖς ἀπεναντίον ἐπιπέδοις· ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. Ἴσον δὲ τὸ ΜΠ ὕψος τῷ ΚΛ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· τῶν ἄρα ΑΞ ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπόνθασιν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσιν.

Ἀλλὰ δὴ τῶν ΑΞ ΕΟ κυλίνδρων ἀντιπεπονθέτωσαν αἱ βάσεις τοῖς ὕψεσι, καὶ ἔστω ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος· λέγω ὅτι ἴσος ἐστὶν ὁ ΑΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ.

Τῶν γὰρ αὐτῶν κατασκευασθέντων ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΚΛ ὕψος, ἴσον δὲ τὸ ΚΛ ὕψος τῷ ΜΠ ὕψει· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος. Ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒΓΔ βάσις πρὸς τὴν ΕΖΗΘ βάσιν, οὕτως ὁ ΑΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, ὑπὸ γὰρ τὸ αὐτὸ ὕψος εἰσίν· ὡς δὲ τὸ ΜΝ ὕψος πρὸς τὸ ΜΠ ὕψος, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς

τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ΛΞ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον, οὕτως ὁ ΕΟ κύλινδρος πρὸς τὸν ΕΣ κύλινδρον· ἴσος ἄρα ὁ ΛΞ κύλινδρος τῷ ΕΟ κυλίνδρῳ. Ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κώνων.

Τῶν ἴσων ἄρα κώνων . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ις΄.

Δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων, εἰς τὸν μείζονα κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου. 16.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο κύκλοι οἱ ΑΒΓΔ ΕΖΗΘ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Κ· δεῖ δὴ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΑΒΓΔ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Fig. 16.

Ἤχθω διὰ τοῦ Κ κέντρου εὐθεῖα ἡ ΒΚΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η σημείου τῇ ΒΔ εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΗΑ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Γ· ἡ ΑΓ ἄρα ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· τέμνοντες δὴ τὴν ΒΑΔ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν ποτε περιφέρειαν ἐλάττονα τῆς ΑΔ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΛΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΔ ΔΝ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΔΝ. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΛΝ τῇ ΑΓ, ἡ δὲ ΑΓ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· ἡ ΛΝ ἄρα οὐκ ἐφάπτεται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου· πολλῷ ἄρα αἱ ΛΔ ΔΝ οὐκ ἐφάπτονται τοῦ ΕΖΗΘ κύκλου. Ἐὰν δὴ τῇ ΛΔ εὐθείᾳ ἴσας κατὰ τὸ συνεχὲς ἐναρμόσωμεν εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον, ἐγγραφήσεται εἰς τὸν ΑΒΓΔ κύκλον πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ

ἀρτιόπλευρον, μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάττονος κύκλου τοῦ ΕΖΗΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιζ.

Δύο σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οἰσῶν, εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάσσονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. 17.

Νενοήσθωσαν δύο σφαῖραι περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον τὸ Α· δεῖ δὴ εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγράψαι μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν. Fig. 17.

Τετμήσθωσαν αἱ σφαῖραι ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ κέντρου· ἔσονται δὴ αἱ τομαὶ κύκλοι, ἐπειδήπερ μενούσης τῆς διαμέτρου καὶ περιφερομένου τοῦ ἡμικυκλίου ἐγίγνετο ἡ σφαῖρα· ὥστε καὶ καθ' οἵας ἂν θέσεως ἐπινοήσωμεν τὸ ἡμικύκλιον, τὸ δι' αὐτοῦ ἐκβαλλόμενον ἐπίπεδον ποιήσει ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας κύκλον. Καὶ φαρερὸν ὅτι καὶ μέγιστον, ἐπειδήπερ ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἥτις ἐστὶ καὶ τοῦ ἡμικυκλίου διάμετρος δηλαδὴ καὶ τοῦ κύκλου, μείζων ἐστὶ πασῶν τῶν εἰς τὸν κύκλον ἢ τὴν σφαῖραν διαγομένων εὐθειῶν. Ἔστω οὖν ἐν μὲν τῇ μείζονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΒΓΔΕ, ἐν δὲ τῇ ἐλάσσονι σφαίρᾳ κύκλος ὁ ΖΗΘ, καὶ ἤχθωσαν αὐτῶν δύο διάμετροι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ ΒΔ ΓΕ, καὶ δύο κύκλων περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον ὄντων τῶν ΒΓΔΕ ΖΗΘ εἰς τὸν μείζονα κύκλον τὸν ΒΓΔΕ πολύγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἀρτιόπλευρον ἐγγεγράφθω μὴ ψαῦον τοῦ ἐλάσσονος κύκλου τοῦ ΖΗΘ, οὗ πλευραὶ ἔστωσαν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ, αἱ ΒΚ ΚΛ ΛΜ ΜΕ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα, ἡ ΚΑ διήχθω ἐπὶ τὸ Ν, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῷ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΞ, καὶ συμβαλλέτω τῇ ἐπι-

φανείᾳ τῆς σφαίρας κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῆς ΔΞ καὶ ἑκατέρας τῶν ΒΔ ΚΝ ἐπίπεδα ἐκβεβλήσθω· ποιήσουσι δὴ διὰ τὰ εἰρημένα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μεγίστους κύκλους. Ποιείτωσαν, ὧν ἡμικύκλια ἔστω ἐπὶ τῶν ΒΔ ΚΝ διαμέτρων τὰ ΒΞΔ ΚΞΝ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΞΔ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, καὶ πάντα ἄρα τὰ διὰ τῆς ΞΔ ἐπίπεδά ἐστιν ὀρθὰ πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον· ὥςτε καὶ τὰ ΒΞΔ ΚΞΝ ἡμικύκλια ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Καὶ ἐπεὶ ἴσα ἐστὶ τὰ ΒΕΔ ΒΞΔ ΚΞΝ ἡμικύκλια, ἐπὶ γὰρ ἴσων εἰσὶ διαμέτρων τῶν ΒΔ ΚΝ, ἴσα ἐστὶ καὶ τὰ ΒΕ ΒΞ ΚΞ τεταρτημόρια ἀλλήλοις· ὅσαι ἄρα εἰσὶν ἐν τῷ ΒΕ τεταρτημορίῳ πλευραὶ τοῦ πολυγώνου, τοσαῦταί εἰσι καὶ ἐν τοῖς ΒΞ ΚΞ τεταρτημορίοις ἴσαι ταῖς ΒΚ ΚΛ ΛΜ ΜΕ εὐθείαις. Ἐγγεγράφθωσαν καὶ ἔστωσαν αἱ ΒΟ ΟΠ ΠΡ ΡΞ ΚΣ ΣΤ ΤΥ ΥΞ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΣΟ ΤΠ ΥΡ, καὶ ἀπὸ τῶν Ο Σ ἐπὶ τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων τὰς ΒΔ ΚΝ, ἐπειδήπερ καὶ τὰ τῶν ΒΞΔ ΚΞΝ κύκλων ἐπίπεδα ὀρθά ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον. Πιπτέτωσαν, καὶ ἔστωσαν αἱ ΟΦ ΣΧ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ ἐν ἴσοις ἡμικυκλίοις τοῖς ΒΞΔ ΚΞΝ ἴσαι ἀπειλημμέναι εἰσὶν αἱ ΒΟ ΚΣ, καὶ κάθετοι ἠγμέναι εἰσὶν αἱ ΟΦ ΣΧ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΟΦ τῇ ΣΧ, ἡ δὲ ΒΦ τῇ ΚΧ. Ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ΒΑ ὅλῃ τῇ ΚΑ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΦΑ λοιπῇ τῇ ΧΑ ἐστὶν ἴση· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΦ πρὸς τὴν ΦΑ, οὕτως ἡ ΚΧ πρὸς τὴν ΧΑ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΟΦ ΣΧ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου ἐπίπεδον, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΟΦ τῇ ΣΧ. Ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση· καὶ αἱ ΧΦ ΣΟ ἄρα ἴσαι εἰσὶ καὶ

παράλληλοι. Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ, ἀλλὰ ἡ ΧΦ τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος· καὶ ἡ ΣΟ ἄρα τῇ ΚΒ ἐστὶ παράλληλος. Καὶ ἐπιζευγνυοῦσιν αὐτὰς αἱ ΒΟ ΚΣ· τὸ ΚΒΟΣ ἄρα τετράπλευρον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἐπειδήπερ ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι, καὶ ἐφ᾽ ἑκατέρας αὐτῶν ληφθῇ τυχόντα σημεῖα, ἡ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ἐστὶ ταῖς παραλλήλοις. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάτερον τῶν ΣΟΠΤ ΤΠΡΥ τετραπλεύρων ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ. Ἐὰν δὴ νοήσωμεν ἀπὸ τῶν Ο Σ Π Τ Ρ Υ σημείων ἐπὶ τὸ Α ἐπιζευγνυμένας εὐθείας, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν πολύεδρον μεταξὺ τῶν ΒΞ ΚΞ περιφερειῶν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ ΚΒΟΣ ΣΟΠΤ ΤΠΡΥ τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον. Ἐὰν δὲ καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ΚΛ ΛΜ ΜΕ πλευρῶν, καθάπερ ἐπὶ τῆς ΚΒ τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, καὶ ἔτι ἐπὶ τῶν λοιπῶν τριῶν τεταρτημορίων, καὶ ἐπὶ τοῦ λοιποῦ ἡμισφαιρίου· συσταθήσεταί τι σχῆμα πολύεδρον ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν σφαῖραν ἐκ πυραμίδων συγκείμενον, ὧν βάσεις μὲν τὰ εἰρημένα τετράπλευρα καὶ τὸ ΥΡΞ τρίγωνον καὶ τὰ ὁμοταγῆ αὐτοῖς, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον.

Λέγω δὴ ὅτι τὸ εἰρημένον πολύεδρον οὐκ ἐφάψεται τῆς ἐλάσσονος σφαίρας, κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐφ᾽ ἧς ἐστιν ὁ ΖΗΘ κύκλος.

Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον κάθετος ἡ ΑΨ, καὶ συμβαλλέτω τῷ ἐπιπέδῳ κατὰ τὸ Ψ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΒΨ ΨΟ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΨ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΚΒΟΣ τετραπλεύρου ἐπίπεδον, καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ τετραπλεύρου ἐπιπέδῳ ὀρθή ἐστιν, ἡ ΑΨ

ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΒΨ ΨΟ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΑΟ, ἴσον ἔστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΒ, ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Ψ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΟ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΒ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΨ ΨΟ. Κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΨΟ ἴσον ἐστίν· ἴση ἄρα ἡ ΒΨ τῇ ΨΟ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ αἱ ἀπὸ τοῦ Ψ ἐπὶ τὰ Κ Σ ἐπιζευγνύμεναι εὐθεῖαι ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρᾳ τῶν ΒΨ ΨΟ· ὁ ἄρα κέντρῳ τῷ Ψ καὶ διαστήματι ἑνὶ τῶν ΨΒ ΨΟ γραφόμενος κύκλος ἥξει καὶ διὰ τῶν Κ Σ, καὶ ἔσται ἐν κύκλῳ τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον.

Καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΚΒ τῆς ΧΦ, ἴση δὲ ἡ ΧΦ τῇ ΣΟ· μείζων ἄρα ἡ ΚΒ τῆς ΣΟ. Ἴση δὲ ἡ ΚΒ ἑκατέρᾳ τῶν ΚΣ ΒΟ· καὶ ἑκατέρα ἄρα τῶν ΚΣ ΒΟ τῆς ΣΟ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ τετράπλευρόν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ, καὶ ἴσαι αἱ ΚΒ ΒΟ ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ, καὶ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἐστὶν ἡ ΒΨ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Καὶ ἤκται ἀπὸ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΒΔ κάθετος ἡ ΟΦ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΒΔ τῆς ΔΦ ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ, καί ἐστιν ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΦ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ ΒΦ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΦ ΦΒ· ἀναγραφομένου δὴ ἀπὸ τῆς ΒΦ τετραγώνου, καὶ συμπληρουμένου τοῦ ἐπὶ τῆς ΦΔ παραλληλογράμμου, καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΒ ΒΦ ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΔΦ ΦΒ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Καὶ ἔστι τῆς ΔΟ ἐπιζευγνυμένης, τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΔΒ ΒΦ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΟ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΔΦ ΦΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΟΦ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΟΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΦ ἔλαττόν ἐστιν ἢ διπλάσιον. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΟ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ μεῖζόν

ἐστιν ἢ διπλάσιον· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ τῇ ΑΟ, ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΟ. Καὶ ἔστι τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ ΨΑ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΟΑ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΟΦ ΦΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΨ ΨΑ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΟΦ ΦΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΟΦ μεῖζον τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΦΑ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΨΑ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΦ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΨ μείζων ἐστὶ τῆς ΑΗ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΨ ἐπὶ μίαν τοῦ πολυέδρου βάσιν, ἡ δὲ ΑΗ ἐπὶ τὴν τῆς ἐλάσσονος σφαίρας ἐπιφάνειαν· ὥςτε τὸ πολύεδρον οὐ ψαύσει τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν.

Δύο ἄρα σφαιρῶν περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον οὐσῶν εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν στερεὸν πολύεδρον ἐγγέγραπται, μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πόρισμα.

Ἐὰν δὲ καὶ εἰς ἑτέραν σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον ἐγγραφῇ, τὸ ἐν τῇ ΒΓΔΕ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ τῆς ΒΓΔΕ σφαίρας διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον· Διαιρεθέντων γὰρ τῶν στερεῶν εἰς τὰς ὁμοπληθεῖς καὶ ὁμοταγεῖς πυραμίδας, ἔσονται αἱ πυραμίδες ὅμοιαι. Αἱ δὲ ὅμοιαι πυραμίδες πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν· ἡ πυραμὶς ἄρα, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΚΒΟΣ τετράπλευρον, κορυφὴ δὲ τὸ Α σημεῖον, πρὸς τὴν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ ὁμοταγῆ πυραμίδα τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ὁμό-

λογος πλευρὰ πρὸς τὴν ὁμόλογον πλευρὰν, τοῦτ᾽ ἔστιν, ἥπερ ἡ ΑΒ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περὶ τὸ κέντρον τὸ Α πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Ὁμοίως δὴ καὶ ἑκάστη πυραμὶς τῶν ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ πρὸς ἑκάστην ὁμοταγῆ πυραμίδα τῶν ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας. Καὶ ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὥςτε καὶ ὅλον τὸ ἐν τῇ περὶ τὸ κέντρον τὸ Α σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς ὅλον τὸ ἐν τῇ ἑτέρᾳ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἕξει, ἤπερ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ἑτέρας σφαίρας, τοῦτ᾽ ἔστιν, ἤπερ ἡ ΒΔ διάμετρος πρὸς τὴν τῆς ἑτέρας σφαίρας διάμετρον.

Πρότασις ιη΄.

Αἱ σφαῖραι πρὸς ἀλλήλας ἐν τριπλασίονι λόγῳ εἰσὶ τῶν ἰδίων διαμέτρων. 18.

Νενοήσθωσαν σφαῖραι αἱ ΑΒΓ ΔΕΖ, διάμετροι δὲ αὐτῶν αἱ ΒΓ ΕΖ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Fig. 1

Εἰ γὰρ μὴ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ, ἕξει ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας ἢ πρὸς μείζονα τριπλασίονα λόγον ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐχέτω πρότερον πρὸς ἐλάσσονα τὴν ΗΘΚ, καὶ νενοήσθω ἡ ΔΕΖ σφαῖρα τῇ ΗΘΚ περὶ τὸ αὐτὸ κέντρον, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὴν μείζονα σφαῖραν τὴν ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον μὴ ψαῦον τῆς ἐλάττονος σφαίρας τῆς ΗΘΚ κατὰ τὴν ἐπιφάνειαν, ἐγγεγράφθω δὲ καὶ εἰς τὴν ΑΒΓ σφαῖ-

σφαῖραν τῷ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεῷ πολυέδρῳ ὅμοιον στερεὸν πολύεδρον· τὸ ἄρα ἐν τῇ ΑΒΓ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ στερεὸν πολύεδρον τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἔχει δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΗΘΚ σφαῖραν, οὕτως τὸ ἐν τῇ ΑΒΓ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον· ἐναλλὰξ ἄρα ὡς ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν αὐτῇ πολύεδρον, οὕτως ἡ ΗΘΚ σφαῖρα πρὸς τὸ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ στερεὸν πολύεδρον. Μείζων δὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα τοῦ ἐν αὐτῇ πολυέδρου· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΗΘΚ σφαῖρα τοῦ ἐν τῇ ΔΕΖ σφαίρᾳ πολυέδρου. Ἀλλὰ καὶ ἐλάσσων, ἐμπεριέχεται γὰρ ἀπ᾽ αὐτοῦ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ διάμετρος πρὸς τὴν ΕΖ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ.

Λέγω δὴ ὅτι οὐδὲ ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐχέτω πρὸς μείζονα τὴν ΛΜΝ· ἀνάπαλιν ἄρα ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΕΖ διάμετρος πρὸς τὴν ΒΓ διάμετρον. Ὡς δὲ ἡ ΛΜΝ σφαῖρα πρὸς τὴν ΑΒΓ σφαῖραν, οὕτως ἡ ΔΕΖ σφαῖρα πρὸς ἐλάττονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας, ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη, ἐπειδήπερ μείζων ἐστὶν ἡ ΛΜΝ τῆς ΔΕΖ· καὶ ἡ ΔΕΖ ἄρα σφαῖρα πρὸς ἐλάσσονά τινα τῆς ΑΒΓ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΒΓ, ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη· οὐκ ἄρα

ἡ ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς μείζονά τινα τῆς ΔΕΖ σφαίρας τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ. Ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ πρὸς ἐλάσσονα· ἡ ἄρα ΑΒΓ σφαῖρα πρὸς τὴν ΔΕΖ σφαῖραν τριπλασίονα λόγον ἔχει, ἤπερ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΕΖ.

Αἱ ἄρα σφαῖραι πρὸς . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ δωδεκάτου βιβλίου.

ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΣΚΑΙΔΕΚΑΤΟΝ.

Πρότασις α'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προςλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης. 1.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΑΓ εὐθεῖα ἡ ΑΔ, καὶ κείσθω τῇ τῆς ΑΒ ἡμισείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Fig. 1.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΔΓ τετράγωνα τὰ ΑΕ ΔΖ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΔΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΓ ἐπὶ τὸ Η. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΖΘ· ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΒΑ τῇ ΚΑ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΑΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῆς ΑΘ. Ὡς δὲ ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΘ, οὕτως τὸ ΚΓ πρὸς τὸ ΓΘ· διπλάσιον ἄρα τὸ ΚΓ τοῦ ΓΘ· Εἰσὶ

δὲ καὶ τὰ ΔΘ ΘΓ τοῦ ΓΘ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΓ τοῖς ΔΘ ΘΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΘ ἴσον· ὅλον ἄρα τὸ ΔΕ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΜΝΞ γνώμονι. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ΔΕ τοῦ ΔΘ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΕ τῷ ΜΝΞ γνώμονι, καὶ ὁ ΜΝΞ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΔΘ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΖ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΔΘ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, τὸ δὲ ΘΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, τὸ μεῖζον τμῆμα προςλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις β.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμήματος ἑαυτῆς πενταπλάσιον δύνηται· τῆς διπλασίας τοῦ εἰρημένου τμήματος ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμα τὸ λοιπὸν μέρος ἐστὶ τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας. 2.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ τμήματος ἑαυτῆς, τῆς ΑΓ, πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΑΓ διπλῆ ἔστω ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι τῆς ΓΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ. *Fig.* 2.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν ΑΒ ΓΔ τετράγωνα τὰ ΑΖ ΓΗ, καὶ καταγεγράφθω ἐν τῷ ΑΖ τὸ σχῆμα, καὶ διήχθω ἡ ΖΒ ἐπὶ τὸ Ε. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΖ τοῦ ΑΘ· τετραπλάσιος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τοῦ ΑΘ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ΓΗ

τοῦ ΛΘ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὁ ΜΝΞ γνώμων τετραπλάσιος τοῦ ΛΘ· ἴσος ἄρα ὁ ΜΝΞ γνώμων τῷ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΔΓ τῆς ΓΑ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΔΓ τῇ ΓΚ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΓΘ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΚΓ τῆς ΓΘ· διπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΚΒ τοῦ ΒΘ. Εἰσὶ δὲ καὶ τὰ ΛΘ ΘΒ τοῦ ΘΒ διπλάσια· ἴσον ἄρα τὸ ΚΒ τοῖς ΛΘ ΘΒ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλος ὁ ΜΝΞ γνώμων ὅλῳ τῷ ΓΗ ἴσος· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΘΖ λοιπῷ τῷ ΒΗ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ, ἴση γὰρ ἡ ΓΔ τῇ ΔΗ, τὸ δὲ ΘΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΓΔ ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ΓΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Μείζων δὲ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΓΒ τῆς ΒΔ. Τῆς ΓΔ ἄρα εὐθείας ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΒ.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα γραμμὴ . . . καὶ τὸ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ὅτι δὲ ἡ διπλῆ τῆς ΑΓ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ, οὕτως δεικτέον.

Εἰ γὰρ μή· ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ διπλῆ τῆς ΓΑ· τετραπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· πενταπλάσιον ἄρα ἑκάτερον τῶν ἀπὸ τῶν ΒΓ ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. Ὑπόκειται δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΑ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΓ ΓΑ, ὅπερ ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἡ ΒΓ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι οὐδὲ ἐλάττων τῆς ΒΓ διπλασίων ἐστὶ τῆς ΓΑ· πολλῷ γὰρ μεῖζον τὸ ἄτοπον.

Ἡ ἄρα τῆς ΑΓ διπλῆ μείζων ἐστὶ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις γ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἔλασσον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμισείαν τοῦ μείζονος τμήματος πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. 3.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Fig. 3.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω διπλοῦν τὸ σχῆμα. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τοῦτ' ἔστι τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΡΣ· τὸ ἄρα ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΡΣ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ΡΣ τοῦ ΖΗ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ ΓΕ τοῦ ΖΗ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΖ· ὥςτε καὶ τὸ ΗΖ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΛ τετραγώνῳ· ἴση ἄρα ἡ ΗΚ τῇ ΚΛ, τοῦτ' ἔστιν ἡ ΜΝ τῇ ΝΕ· ὥςτε καὶ τὸ ΜΖ τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Ἀλλὰ τὸ ΜΖ τῷ ΓΗ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τῷ ΖΕ ἐστὶν ἴσον. Κοινὸν προσκείσθω τὸ ΓΝ· ὁ ἄρα ΞΟΠ γνώμων ἴσος ἐστὶ τῷ ΓΕ. Ἀλλὰ τὸ ΓΕ τετραπλάσιον ἐδείχθη τοῦ ΗΖ· καὶ ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων τετραπλάσιός ἐστι τοῦ ΖΗ τετραγώνου· ὁ ΞΟΠ ἄρα γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνον πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΖΗ. Ἀλλ' ὁ ΞΟΠ γνώμων καὶ τὸ ΖΗ τετράγωνόν ἐστι τὸ ΔΝ· τὸ ἄρα ΔΝ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ΗΖ τετραγώνου. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΝ

τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, τὸ δὲ ΗΖ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΒ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις δ'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ· τὸ ἀπὸ τῆς ὅλης καὶ τοῦ ἐλάττονος τμήματος, τὰ συναμφότερα τετράγωνα, τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τοῦ μείζονος τμήματος τετραγώνου. 4.

Ἔστω εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΑ. Fig. 4.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔΕΒ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΑΚ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΘΗ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΖ τῷ ΖΕ, κοινὸν προςκείσθω τὸ ΓΚ· ὅλον ἄρα τὸ ΑΚ ὅλῳ τῷ ΓΕ ἐστὶν ἴσον· τὰ ἄρα ΑΚ ΓΕ τοῦ ΑΚ ἐστὶ διπλάσια. Ἀλλὰ τὰ ΑΚ ΓΕ ὁ ΛΜΝ γνώμων ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΑΚ. Ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ΑΚ τῷ ΘΗ ἐδείχθη ἴσον· ὁ ἄρα ΛΜΝ γνώμων, καὶ τὸ ΓΚ τετράγωνον διπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΗ· ὥςτε καὶ ὁ ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ ΘΗ τετράγωνα τριπλασιά ἐστι τοῦ ΘΗ τετραγώνου. Καὶ ἔστιν ὁ μὲν ΛΜΝ γνώμων καὶ τὰ ΓΚ ΘΗ τετράγωνα ὅλον τὸ ΑΕ καὶ τὸ ΓΚ, ἅπερ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα, τὸ δὲ ΗΘ τὸ

ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ε'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, καὶ προςτεθῇ ἴση τῷ μείζονι τμήματι· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα. 5.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΑΒ. Fig. 5.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΕ, καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ΓΕ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὸ ΓΘ, ἴσον ἄρα τὸ ΓΕ τῷ ΓΘ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ΓΕ ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΘ, τῷ δὲ ΘΓ ἴσον τὸ ΔΘ· καὶ τὸ ΔΘ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΕ. Κοινὸν προςκείσθω τὸ ΘΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΔΚ ὅλῳ τῷ ΑΕ ἐστὶν ἴσον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΔΚ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΑ, ἴση γὰρ ἡ ΑΔ τῇ ΔΛ, τὸ δὲ ΑΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΔ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Μείζων δὲ ἡ ΔΒ τῆς ΒΑ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ϛ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 6.

Ἔστω εὐθεῖα ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἑκατέρα τῶν ΑΓ ΓΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. Fig. 6.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ τῆς ΒΑ ἡμισείᾳ ἴση ἡ ΑΔ. Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ τέτμηται ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Γ, καὶ τῷ μείζονι τμήματι τῷ ΑΓ πρόςκειται ἡ ΑΔ, ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ πενταπλάσιόν ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· σύμμετρον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ, ῥητὴ γάρ ἐστιν ἡ ΔΑ ἡμίσεια οὖσα τῆς ΑΒ ῥητῆς οὔσης· ῥητὸν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΓΔ. Καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ λόγον οὐκ ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· αἱ ΓΔ ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀποτομῆς παρὰ τὴν ΑΒ ῥητὴν παραβληθὲν πλάτος ποιεῖ τὴν ΒΓ. Τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομὴν πρώτην· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἡ ΒΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΑΓ ἀποτομή.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ῥητὴ ἄκρον καὶ μέσον . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ζ.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι, ἤτοι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἢ αἱ μὴ κατὰ τὸ ἑξῆς, ἴσαι ὦσιν· ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον. 7.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου τοῦ ΑΒΓΔΕ αἱ τρεῖς γωνίαι πρότερον αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς αἱ πρὸς τοῖς Α Β Γ ἴσαι ἀλλήλαις ἔστωσαν· λέγω ὅτι ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον. Fig. 7.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΑΓ ΒΕ ΖΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΓΒ ΒΑ δυσὶ ταῖς ΒΑ ΑΕ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΕ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΕ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΒΕ τριγώνῳ ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΒΕΑ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΓΑΒ· ὥςτε καὶ πλευρὰ ἡ ΑΖ πλευρᾷ τῇ ΒΖ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ὅλη ἡ ΑΓ ὅλῃ τῇ ΒΕ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΖΓ λοιπῇ τῇ ΖΕ ἐστὶν ἴση. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΕ ἴση· δύο δὴ αἱ ΖΓ ΓΔ δυσὶ ταῖς ΖΕ ΕΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΖΔ· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΖΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΔ ἐστὶν ἴση. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ὑπόκειται ταῖς πρὸς τοῖς Α Β γωνίαις· καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα ταῖς πρὸς τοῖς Α Β γωνίαις ἴση ἐστίν. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ γωνία ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α Β γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστωσαν ἴσαι αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς γωνίαι, ἀλλ' ἔστωσαν ἴσαι αἱ πρὸς τοῖς Α Γ Δ ση-

μείοις· λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΑ ΑΕ δυσὶ ταῖς ΒΓ ΓΔ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΕ ἴση, ἐπεὶ πλευρὰ ἡ ΒΕ πλευρᾷ τῇ ΒΔ ἔστιν ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΔ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΓΔΕ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΓΔΕ ταῖς πρὸς τοῖς Α Γ γωνίαις ὑπόκειται ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΕΔ ἄρα γωνία ταῖς πρὸς τοῖς Α Γ ἴση ἐστί. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΓ ἴση ἐστὶ ταῖς πρὸς τοῖς Α Γ Δ γωνίαις· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις η'.

Ἐὰν πενταγώνου ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς δύο γωνίας ὑποτείνωσιν εὐθεῖαι, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέμνουσιν ἀλλήλας, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. 8.

Πενταγώνου γὰρ ἰσοπλεύρου καὶ ἰσογωνίου τοῦ ΑΒΓΔΕ δύο γωνίας, τὰς κατὰ τὸ ἑξῆς τὰς πρὸς τοῖς Α Β, ὑποτεινέτωσαν εὐθεῖαι αἱ ΑΓ ΒΕ, τέμνουσαι ἀλληλας κατὰ τὸ Θ σημεῖον· λέγω ὅτι ἑκατέρα αὐτῶν ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ σημεῖον, καὶ τὰ μείζονα αὐτῶν τμήματα ἴσα ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ. Fig. 8.

Περιγεγράφθω γὰρ περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ. Καὶ ἐπεὶ δύο εὐθεῖαι αἱ ΕΑ ΑΒ δυσὶ ταῖς ΑΒ ΒΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ γωνίας

ἴσας περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΒΕ βάσει τῇ ΑΓ ἴση ἐστὶ, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον ἐστὶ, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ᾽ ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΕ· διπλῆ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΘΕ τῆς ὑπὸ ΒΑΘ γωνίας, ἐκτὸς γάρ ἐστι τοῦ ΑΒΘ τριγώνου. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΕΑΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ περιφέρεια ἡ ΕΑΓ περιφερείας τῆς ΓΒ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΘΑΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΘΕ· ὥςτε καὶ ἡ ΘΕ εὐθεῖα τῇ ΕΑ, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΑ εὐθεῖα τῇ ΑΕ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΑΕΒ. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΒΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΕΑ ἄρα γωνία τῇ ὑπὸ ΒΑΘ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων τοῦ τε ΑΒΕ καὶ τοῦ ΑΒΘ ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΕ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΑΕ γωνία λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΒΘ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΘ. Ἴση δὲ ἡ ΒΑ τῇ ΕΘ· ὡς ἄρα ἡ ΒΕ πρὸς τὴν ΕΘ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΕ τῆς ΕΘ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΘ τῆς ΘΒ· ἡ ΒΕ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα ἡ ΘΕ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ΑΓ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Θ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμα ἡ ΓΘ ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι

Πρότασις θ'.

Ἐὰν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρὰ καὶ ἡ τοῦ 9.
δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων συντεθῶσιν· ἡ ὅλη εὐθεῖα ἄκρον

καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ ἑξαγώνου πλευρά.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ τῶν εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένων σχημάτων, δεκαγώνου μὲν ἔστω πλευρὰ ἡ ΒΓ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΓΔ, καὶ ἔστωσαν ἐπ᾽ εὐθείας· λέγω ὅτι ἡ ὅλη εὐθεῖα ἡ ΒΔ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΓΔ. Fig. 9.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, καὶ ἔστω τὸ Ε σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΒ ΕΓ ΕΔ, καὶ διήχθω ἡ ΒΕ ἐπὶ τὸ Α. Καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου ἰσοπλεύρου πλευρά ἐστιν ἡ ΒΓ, πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΓ περιφερείας· τετραπλασίων ἄρα ἡ ΑΓ περιφέρεια τῆς ΓΒ. Ὡς δὲ ἡ ΑΓ περιφέρεια πρὸς τὴν ΓΒ, οὕτως ἡ ὑπὸ ΑΕΓ γωνία πρὸς τὴν ὑπὸ ΓΕΒ· τετραπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΒ, ἡ ἄρα ὑπὸ ΑΕΓ γωνία διπλασία ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΓ εὐθεῖα τῇ ΓΔ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ τοῦ ἑξαγώνου πλευρᾷ, τοῦ εἰς τὸν ΑΒΓ κύκλον ἐγγραφομένου· ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΕ γωνίᾳ· διπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΓΒ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. Ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΕΓΒ διπλασία ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· τετραπλασία ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΕΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΓ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τῆς ὑπὸ ΒΕΓ τετραπλασία ἡ ὑπὸ ΑΕΓ· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΕΔΓ τῇ ὑπὸ ΒΕΓ. Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΒΕΔ καὶ τοῦ ΒΕΓ, ἡ ὑπὸ ΕΒΔ γωνία· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΕΔ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΕΓΒ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΔ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΕ, οὕτως ἡ ΕΒ πρὸς τὴν ΒΓ. Ἴση δὲ ἡ ΕΒ τῇ ΔΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων

δὲ ἡ ΒΔ τῆς ΔΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΔΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΒΔ ἄρα εὐθεῖα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΔΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ι.

Ἐὰν εἰς κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ· ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου, τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. 10.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓΔΕ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου πλευρὰν, τῶν εἰς τὸν ΑΒΓΔΕ κύκλον ἐγγραφομένων. Fig. 10

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ διήχθω ἐπὶ τὸ Η σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Κ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ ΚΒ, καὶ πάλιν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐπὶ τὴν ΑΚ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΝ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΕΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια λοιπῇ τῇ ΔΗ ἐστὶν ἴση. Πενταγώνου δὲ ἡ ΓΔ· δεκαγώνου ἄρα ἡ ΓΗ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΖ τῇ ΖΒ, καὶ κάθετος ἡ ΖΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΖΚ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΖΒ· ὥστε καὶ περιφέρεια ἡ ΑΚ τῇ ΚΒ ἐστὶν ἴση· διπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας· δεκαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΚ εὐθεῖα. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΑΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας, ἴση δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῇ ΑΒ

περιφερείᾳ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓΔ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας. Ἔστι δὲ ἡ ΓΔ περιφέρεια καὶ τῆς ΓΗ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΓΗ περιφέρεια τῇ ΒΚ περιφερείᾳ. Ἀλλὰ ἡ ΒΚ τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΚΑ· καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῆς ΚΜ ἐστὶ διπλῆ. Ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῆς ΒΚ περιφερείας ἐστὶ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ΓΒ περιφέρεια τῇ ΒΑ περιφερείᾳ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΗΒ περιφέρεια τῆς ΒΜ ἐστὶ διπλῆ· ὥςτε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΖΒ γωνίας τῆς ὑπὸ ΒΖΜ ἐστὶ διπλῆ. Ἔστι δὲ ἡ ὑπὸ ΗΖΒ καὶ τῆς ὑπὸ ΖΑΒ διπλῆ, ἴση γὰρ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΖ· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΖΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΖΑΒ ἐστὶν ἴση. Κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΒΖ καὶ τοῦ ΒΖΝ, ἡ ὑπὸ ΑΒΖ γωνία· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΝΖ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΖ τρίγωνον τῷ ΒΖΝ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΒΖ, οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΛ τῇ ΛΚ, κοινὴ δὲ καὶ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΛΝ· βάσις ἄρα ἡ ΚΝ βάσει τῇ ΑΝ ἐστὶν ἴση· καὶ γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΛΚΝ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΛΑΝ ἐστὶν ἴση. Ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΛΑΝ τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΛΚΝ ἄρα τῇ ὑπὸ ΚΒΝ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΚΒ καὶ τοῦ ΑΚΝ, ἡ ὑπὸ ΝΑΚ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΚΒ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΚΝΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΒΑ τρίγωνον τῷ ΚΝΑ τριγώνῳ. Ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ εὐθεῖα πρὸς τὴν ΑΚ, οὕτως ἡ ΚΑ πρὸς τὴν ΑΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΝ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΝ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ. Καὶ ἔστιν ἡ

μὲν ΑΒ πενταγώνου πλευρά, ἡ δὲ ΒΖ ἑξαγώνου, ἡ δὲ ΑΚ δεκαγώνου.

Ἡ ἄρα τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται . . . καὶ τὰ ἑξῆς ὡς ἐν τῇ προτάσει . . . ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ια'.

Ἐὰν εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. 11.

Εἰς γὰρ κύκλον τὸν ΑΒΓΔΕ ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓΔΕ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἡ ΑΒ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Fig. 1

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΒ καὶ διήχθωσαν ἐπὶ τὰ Η Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῆς ΑΖ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΖ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΖΚ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΖ ῥητή· ὅλη ἄρα ἡ ΒΚ ῥητή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓΗ περιφέρεια τῇ ΑΔΗ περιφερείᾳ, ὧν ἡ ΑΒΓ τῇ ΑΕΔ ἴση ἐστί· λοιπὴ ἄρα ἡ ΓΗ λοιπῇ τῇ ΗΔ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΑΔ, συνάγονται ὀρθαὶ αἱ πρὸς τῷ Λ γωνίαι, καὶ διπλῆ ἡ ΔΓ τῆς ΓΛ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ αἱ πρὸς τῷ Μ ὀρθαί εἰσι, καὶ διπλῆ ἡ ΑΓ τῆς ΓΜ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΛΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΜΖ, κοινὴ δὲ τῶν δύο τριγώνων, τοῦ τε ΑΛΓ καὶ τοῦ ΑΜΖ, ἡ ὑπὸ ΛΑΓ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΛ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΜΖΑ ἐστὶν ἴση· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓΛ τρίγωνον τῷ ΑΜΖ τριγώνῳ· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΛΓ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΑ, καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΛΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΑ, οὕτως ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΑ. Ὡς δὲ

δὲ ἡ τῆς ΜΖ διπλῆ πρὸς τὴν ΖΔ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ τῆς ΔΓ διπλῆ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΖΔ, καὶ τῶν ἑπομένων τὰ ἡμίσεια· ὡς ἄρα ἡ τῆς ΔΓ διπλῆ πρὸς τὴν ἡμίσειαν τῆς ΓΔ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὸ τέταρτον τῆς ΖΔ. Καὶ ἔστι τῆς μὲν ΔΓ διπλῆ ἡ ΔΓ, τῆς δὲ ΔΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ, τῆς δὲ ΖΔ τέταρτον μέρος ἡ ΖΚ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΓ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΖ πρὸς τὴν ΖΚ. Συνθέντι καὶ ὡς συναμφότερος ἡ ΔΓΜ πρὸς τὴν ΓΜ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΖ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ συναμφοτέρου τῆς ΔΓΜ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἐπεὶ τῆς ὑπὸ δύο πλευρὰς τοῦ πενταγώνου ὑποτεινούσης, οἷον τῆς ΔΓ, ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμα ἴσον ἐστὶ τῇ τοῦ πενταγώνου πλευρᾷ, τουτ᾽ ἔστι τῇ ΔΓ· τὸ δὲ μεῖζον τμῆμα προσλαβὸν τὴν ἡμίσειαν τῆς ὅλης πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς ὅλης, καὶ ἔστιν ὅλης τῆς ΔΓ ἡμίσεια ἡ ΓΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΜ. Ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓΜ ὡς μιᾶς πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΜ, οὕτως ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ, ῥητὴ γὰρ ἡ διάμετρος· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΚ, λόγον γὰρ ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλασία ἐστὶν ἡ ΒΖ τῆς ΖΚ, πενταπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῆς ΚΖ· εἴκοσι πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΜΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΖ· πενταπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον

οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν· ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΜ μήκει. Καὶ ἔστι ῥητὴ ἑκατέρα αὐτῶν· αἱ ΒΚ ΚΜ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ῥητῆς ῥητὴ ἀφαιρεθῇ δυνάμει μόνον σύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ, ἡ λοιπὴ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ, προςαρμόζουσα δὲ αὐτῇ ἡ ΜΚ. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τετάρτη. Ὧι γὰρ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, ἐκείνῳ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ τῆς Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ τῆς Ν. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΖ τῇ ΖΒ, καὶ συνθέντι σύμμετρός ἐστιν ἡ ΚΒ τῇ ΒΖ. Ἀλλὰ ἡ ΒΖ τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστι μήκει· καὶ ἡ ΚΒ ἄρα τῇ ΒΘ σύμμετρός ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΜ, τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΚΜ λόγον ἔχει, ὃν ε̅ (πέντε) πρὸς α̅ (μονάδα)· ἀναστρέψαντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΚ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ν λόγον ἔχει, ὃν ε̅ (πέντε) πρὸς δ̅ (τέσσαρας), οὐχ ὃν τετράγωνος πρὸς τετράγωνον· ἀσύμμετρος ἄρα μήκει ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ Ν· ἡ ΒΚ ἄρα τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ. Ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ΒΚ τῆς προςαρμοζούσης τῆς ΚΜ μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ μήκει, καὶ ὅλη ἡ ΒΚ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ τῇ ΒΘ· ἀποτομὴ ἄρα τετάρτη ἐστὶν ἡ ΜΒ. Τὸ δὲ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἄλογόν ἐστι, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι, καλεῖται δὲ ἐλάττων. Δύναται δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΘΒ ΒΜ ἡ ΑΒ, διὰ τὸ ἐπιζευγνυμένης τῆς ΑΘ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΑΒΜ τριγώνῳ, καὶ εἶναι ὡς τὴν ΘΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως τὴν ΑΒ πρὸς τὴν ΒΜ.

Ἡ ἄρα ΑΒ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιβ΄.

Ἐὰν εἰς κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου. 12.

Ἔστω κύκλος ὁ ΑΒΓ, καὶ εἰς αὐτὸν τρίγωνον ἰσόπλευρον ἐγγεγράφθω τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι ἡ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου πλευρὰ ἡ ΑΒ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΑΒΓ κύκλου. Fig. 12.

Εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Δ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΔ διήχθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΕ. Καὶ ἐπεὶ ἰσόπλευρόν ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, ἡ ΒΕΓ ἄρα περιφέρεια τρίτον μέρος ἐστὶ τῆς τοῦ ΑΒΓ κύκλου περιφερείας· ἡ ἄρα ΒΕ περιφέρεια ἕκτον ἐστὶ μέρος τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας· ἑξαγώνου ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΒΕ εὐθεῖα· ἴση ἄρα ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΕ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΕ τῆς ΕΔ, τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, τουτ᾽ ἔστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΕ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. Ἴση δὲ ἡ ΒΕ τῇ ΔΕ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ.

Ἡ ἄρα τοῦ τριγώνου πλευρὰ δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιγ΄.

Πυραμίδα συστήσασθαι ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος. 13.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ Fig. 13.

ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, ὥςτε διπλασίαν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ· καὶ καταγεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΑ· καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗ, ἴσην ἔχων τὴν ἐκ τοῦ κέντρου τῇ ΔΓ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΗΖ κύκλον τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΕΖΗ· καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Θ σημεῖον, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ ΘΖ ΘΗ· καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Θ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΘΚ, καὶ ἀφηρήσθω ἀπὸ τῆς ΘΚ τῇ ΑΓ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΕ ΚΖ ΚΗ. Καὶ ἐπεὶ ἡ ΘΚ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπίπεδον· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας, καὶ οὔσας ἐν τῷ τοῦ ΕΖΗ κύκλου ἐπιπέδῳ, ὀρθὰς ποιήσει γωνίας. Ἅπτεται δὲ αὐτῆς ἑκάστη τῶν ΘΕ ΘΖ ΘΗ· ἡ ΘΚ ἄρα πρὸς ἑκάστην τῶν ΘΕ ΘΖ ΘΗ ὀρθή ἐστι. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΘΚ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, καὶ ὀρθὰς γωνίας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΔΑ βάσει τῇ ΚΕ ἐστὶν ἴση. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκατέρα τῶν ΚΖ ΚΗ τῇ ΔΑ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΚΕ ΚΖ ΚΗ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἐπειδήπερ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΘ τριπλάσιον, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΓ τῇ ΕΘ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΑ τῇ ΕΖ. Ἀλλὰ ἡ ΔΑ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ ΚΖ ΚΗ ἐδείχθη ἴση· καὶ ἑκάστη ἄρα τῶν ΕΖ ΖΗ ΗΕ ἑκάστῃ τῶν ΚΕ ΚΖ ΚΗ ἐστὶν

ἴση· ἰσόπλευρα ἄρα ἐστὶ τὰ τέσσαρα τρίγωνα τὰ ΕΖΗ ΚΕΖ ΚΖΗ ΚΗΕ· πυραμὶς ἄρα συνέσταται ἐκ τεσσάρων τριγώνων ἰσοπλεύρων, ἧς βάσις μέν ἐστι τὸ ΕΖΗ τρίγωνον, κορυφὴ δὲ τὸ Κ σημεῖον.

Δεῖ δὴ αὐτὴν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἐπ' εὐθείας τῆς ΚΘ εὐθεῖα ἡ ΘΛ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΘΛ. Καὶ ἐπεὶ ἔστιν ὡς ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΒ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΚΘ, ἡ δὲ ΓΔ τῇ ΘΕ, ἡ δὲ ΓΒ τῇ ΘΛ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΕ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς τὴν ΘΛ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΚΘ ΘΛ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ. Καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΚΘΕ ΕΘΛ γωνιῶν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΛ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΕΛ, ὀρθὴ γίγνεται ἡ ὑπὸ ΛΕΚ γωνία, διὰ τὸ ἰσογώνιον γίγνεσθαι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον ἑκατέρῳ τῶν ΕΛΘ ΕΘΚ τριγώνων. Ἐὰν δὴ μενούσης τῆς ΚΛ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ Η σημείων, ἐπιζευγνυμένων τῶν ΖΛ ΛΗ, καὶ ὀρθῶν ὁμοίως γιγνομένων τῶν πρὸς τοῖς Ζ Η γωνιῶν· καὶ ἔσται ἡ πυραμὶς σφαίρᾳ περιειλημμένη τῇ δοθείσῃ, ἡ γὰρ ΚΛ τῆς σφαίρας διάμετρος ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ τῇ ΑΒ, ἐπειδήπερ τῇ μὲν ΑΓ ἴση κεῖται ἡ ΚΘ, τῇ δὲ ΓΒ ἡ ΘΛ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος.

Ἐπεὶ γὰρ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, τριπλῆ ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ἡμιολία ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ. Ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἐπειδήπερ

ἐπιζευγνυμένης τῆς ΒΔ ἐστὶν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ, διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΔΑΒ ΔΑΓ τριγώνων, καὶ εἶναι ὡς τὴν πρώτην πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἡμιόλιον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΒΑ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος, ἡ δὲ ΑΔ ἴση τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος.

Ἡ ἄρα τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πρότασις ιδ'.

Ὀκτάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὴν πυραμίδα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασία ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀκταέδρου. 14.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Γ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῇ ΒΔ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΘΖ ΕΗ, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τοῦ Κ σημείου τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΚΛ, καὶ διήχθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὡς ἡ ΚΜ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΚΛ ΚΜ μιᾷ τῶν ΚΕ ΚΖ ΚΗ ΚΘ ἴση ἑκατέρα τῶν ΚΛ ΚΜ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΛΕ ΛΖ ΛΗ ΛΘ ΜΕ ΜΖ ΜΗ ΜΘ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΚΕ τῇ ΚΘ, καὶ ἐστὶν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΕΚΘ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΕ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΛΚΕ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΕ διπλά- Fig. 1

σιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΕ τῇ ΕΘ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΘΕ ἐστὶν ἴση· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΕΘ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μὲν εἰσιν αἱ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου πλευραὶ, κορυφαὶ δὲ τὰ Λ Μ σημεῖα, ἰσόπλευρόν ἐστιν· ὀκτάεδρον ἄρα συνέσταται ὑπὸ ὀκτὼ τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς.

Ἐπεὶ γὰρ αἱ τρεῖς αἱ ΛΚ ΚΜ ΚΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσὶ, τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΛΜ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε. Καὶ διὰ τὰ αὐτὰ, ἐὰν μενούσης τῆς ΛΜ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, ἥξει καὶ διὰ τῶν Ζ Η Θ σημείων, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ ὀκτάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΚ τῇ ΚΜ, κοινὴ δὲ ἡ ΚΕ, καὶ γωνίας ὀρθὰς περιέχουσι, βάσις ἄρα ἡ ΛΕ βάσει τῇ ΕΜ ἐστὶν ἴση. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΕΜ γωνία, ἐν ἡμικυκλίῳ γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. Πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ· διπλασία ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΛΜ διπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΕ. Καὶ ἔστιν ἴσον τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΕ· ἴση γὰρ κεῖται ἡ ΕΘ τῇ ΔΒ. Ἴσον ἐστὶν ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ τῇ ΛΜ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΛΜ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Περιείληπται ἄρα τὸ ὀκτάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ιε'.

Κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ πρότερα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. 15.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥστε διπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω τετράγωνον τὸ ΕΖΗΘ ἴσην ἔχον τὴν πλευρὰν τῇ ΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε Ζ Η Θ τῷ τοῦ ΕΖΗΘ τετραγώνου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΕΚ ΖΛ ΗΜ ΘΝ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀφ' ἑκάστης τῶν ΕΚ ΖΛ ΗΜ ΘΝ μιᾷ τῶν ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΕ ἴση ἑκάστη τῶν ΕΚ ΖΛ ΗΜ ΘΝ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΛ ΛΜ ΜΝ ΝΚ· κύβος ἄρα συνέσταται ὁ ΖΝ ὑπὸ ἓξ τετραγώνων ἴσων περιεχόμενος. Δεῖ δὴ αὐτὸν καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Fig. 15.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΚΗ ΕΗ. Καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΚΕΗ γωνία, διὰ τὸ καὶ τὴν ΚΕ ὀρθὴν εἶναι πρὸς τὸ ΕΗ ἐπίπεδον δηλαδὴ καὶ πρὸς τὴν ΕΗ εὐθεῖαν· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΚΗ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου. Πάλιν, ἐπεὶ ἡ ΖΗ ὀρθή ἐστιν πρὸς ἑκατέραν τῶν ΛΖ ΖΕ, καὶ πρὸς τὸ ΖΚ ἄρα ἐπίπεδον ὀρθή ἐστιν ἡ ΖΗ· ὥστε καὶ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΖΚ, ἡ ΗΖ ὀρθὴ ἔσται καὶ

πρὸς τὴν ΖΚ· καὶ διὰ τοῦτο πάλιν τὸ ἐπὶ τῆς ΗΚ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Ζ. Ὁμοίως δὴ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν τοῦ κύβου σημείων ἥξει. Ἐὰν δὴ, μενούσης τῆς ΚΗ, περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένος ὁ κύβος. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΖ τῇ ΖΕ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ πρὸς τὸ Ζ γωνία· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΖ. Ἴση δὲ ἡ ΕΖ τῇ ΕΚ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΗ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ· ὥςτε τὰ ἀπὸ τῶν ΗΕ ΕΚ, τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ, τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΚ. Καὶ ἐπεὶ τριπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΕ τριπλάσιον. Καὶ κεῖται ἴση ἡ ΚΕ τῇ ΒΔ· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΗ τῇ ΑΒ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ.

Τῇ δοθείσῃ ἄρα σφαίρᾳ περιείληπται ὁ κύβος· καὶ συναποδέδεικται ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

Πρότασις ις´.

Εἰκοσάεδρον συστήσασθαι καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάττων. 16.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, ὥςτε τετραπλῆν εἶναι τὴν ΑΓ τῆς ΓΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ Fig. 16.

ἡμικύκλιον τὸ ΑΔΒ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἐκκείσθω κύκλος ὁ ΕΖΗΘΚ, οὗ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἴση ἔστω τῇ ΔΒ, καὶ ἐγγεγράφθω εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΕΖΗΘΚ, καὶ τετμήσθωσαν αἱ ΕΖ ΖΗ ΗΘ ΘΚ ΚΕ περιφέρειαι δίχα κατὰ τὰ Λ Μ Ν Ξ Ο σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΛ ΛΖ ΖΜ ΜΗ ΗΝ ΝΘ ΘΞ ΞΚ ΚΟ ΟΕ, καὶ ὁμοίως αἱ ΛΜ ΜΝ ΝΞ ΞΟ ΟΛ· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΛΜΝΞΟ πεντάγωνον, καὶ δεκαγώνου ἡ ΕΟ εὐθεῖα. Καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ε Ζ Η Θ Κ σημείων τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαι αἱ ΕΠ ΖΡ ΗΣ ΘΤ ΚΥ ἴσαι οὖσαι τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΡ ΡΣ ΣΤ ΤΥ ΥΠ ΠΛ ΛΡ ΡΜ ΜΣ ΣΝ ΝΤ ΤΞ ΞΥ ΥΟ ΟΠ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΕΠ ΚΥ τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΠ τῇ ΚΥ. Ἔστι δὲ αὐτῇ καὶ ἴση, αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ἡ ΠΥ ἄρα τῇ ΕΚ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστι. Πενταγώνου δὲ ἰσοπλεύρου ἡ ΕΚ· πενταγώνου ἄρα ἰσοπλεύρου, καὶ ἡ ΠΥ, τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἑκάστη τῶν ΠΡ ΡΣ ΣΤ ΤΥ πενταγώνου ἐστὶ ἰσοπλεύρου τοῦ εἰς τὸν ΕΖΗΘΚ κύκλον ἐγγραφομένου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΡΣΤΥ πεντάγωνον. Καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΕ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΕΟ, καὶ ἔστιν ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΠΕΟ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΟ· ἡ γὰρ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ δύναται τήν τε τοῦ ἑξαγώνου καὶ τὴν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΟΥ πενταγώνου ἐστὶ πλευρά, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΠΥ

πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΟΥ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΠΛΡ ΡΜΣ ΣΝΤ ΤΞΥ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστι. Καὶ ἐπεὶ πενταγώνου ἐδείχθη ἑκατέρα τῶν ΠΛ ΠΟ, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΟ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΛΟ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν ΛΡΜ ΜΣΝ ΝΤΞ ΞΥΟ τριγώνων ἰσόπλευρόν ἐστιν. Εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου τὸ Φ σημεῖον· καὶ ἀπὸ τοῦ Φ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ἀνεστάτω ἡ ΦΩ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ὡς ἡ ΦΨ, καὶ ἀφῃρήσθω ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἑκατέρα τῶν ΦΨ ΧΩ καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΠΩ ΠΧ ΥΩ ΕΦ ΛΦ ΛΨ ΨΜ. Καὶ ἐπεὶ ἑκατέρα τῶν ΦΧ ΠΕ τῷ τοῦ κύκλου ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστι, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΧ τῇ ΠΕ. Εἰσὶ δὲ καὶ ἴσαι· καὶ αἱ ΕΦ ΠΧ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν. Ἑξαγώνου δὲ ἡ ΕΦ· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΠΧ. Καὶ ἐπεὶ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΠΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΠΧΩ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΠΩ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΥΩ πενταγώνου ἐστὶν, ἐπειδήπερ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὰς ΦΚ ΧΥ, ἴσαι καὶ ἀπεναντίον ἔσονται, καὶ ἔστιν ἡ ΦΚ ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα ἑξαγώνου· ἑξαγώνου ἄρα καὶ ἡ ΧΥ. Δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ, καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ ΥΧΩ· πενταγώνου ἄρα ἡ ΥΩ. Ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΠΥ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΠΥΩ τρίγωνον. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΠΡ ΡΣ ΣΤ ΤΥ εὐθεῖαι, κορυφὴ δὲ τὸ Ω σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι. Πάλιν, ἐπεὶ ἑξαγώνου μὲν ἡ ΦΛ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΦΨ, καὶ ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΛΦΨ γωνία· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΛΨ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΦΜ οὖσαν ἑξαγώνου, συνάγεται καὶ ἡ ΜΨ πενταγώνου. Ἔστι

δὲ καὶ ἡ ΛΜ πενταγώνου· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΜΨ τρίγωνον. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἕκαστον τῶν λοιπῶν τριγώνων, ὧν βάσεις μέν εἰσιν αἱ ΜΝ ΝΞ ΞΟ ΟΛ, κορυφὴ δὲ τὸ Ψ σημεῖον, ἰσόπλευρόν ἐστι· συνέσταται ἄρα εἰκοσάεδρον ὑπὸ εἴκοσι τριγώνων ἰσοπλεύρων περιεχόμενον.

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων.

Ἐπεὶ γὰρ ἑξαγώνου μέν ἐστιν ἡ ΦΧ, δεκαγώνου δὲ ἡ ΧΩ· ἡ ΦΩ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΦΧ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΦΧ τῇ ΦΛ, ἡ δὲ ΧΩ τῇ ΦΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΛ, οὕτως ἡ ΛΦ πρὸς τὴν ΦΨ. Καὶ εἰσὶν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΩΦΛ ΛΦΨ γωνίαι· ἐὰν ἄρα ἐπιζεύξωμεν τὴν ΛΩ εὐθεῖαν, ὀρθὴ ἔσται ἡ ὑπὸ ΨΛΩ γωνία διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΨΛΦ ΦΛΩ τριγώνων· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΩΦ πρὸς τὴν ΦΧ, οὕτως ἡ ΦΧ πρὸς τὴν ΧΩ, ἴση δὲ ἡ μὲν ΩΦ τῇ ΨΧ, ἡ δὲ ΦΧ τῇ ΧΠ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΨΧ πρὸς τὴν ΧΠ, οὕτως ἡ ΠΧ πρὸς τὴν ΧΩ. Καὶ διὰ τοῦτο πάλιν ἐὰν ἐπιζεύξωμεν τὴν ΠΨ, ὀρθὴ ἔσται ἡ πρὸς τῷ Π γωνία· τὸ ἄρα ἐπὶ τῆς ΨΩ γραφόμενον ἡμικύκλιον ἥξει καὶ διὰ τοῦ Π. Καὶ ἐὰν μενούσης τῆς ΨΩ περιενεχθὲν τὸ ἡμικύκλιον εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι· ἥξει καὶ διὰ τοῦ Λ καὶ τῶν λοιπῶν σημείων τοῦ εἰκοσαέδρου, καὶ ἔσται σφαίρᾳ περιειλημμένον τὸ εἰκοσάεδρον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ τῇ δοθείσῃ. Τετμήσθω γὰρ ἡ ΦΧ δίχα κατὰ τὸ α. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΩΦ ἄκρον καὶ μέσον λόγον

τέτμηται κατὰ τὸ Χ, καὶ τὸ ἔλαττον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΩΧ· ἡ ἄρα ΩΧ προςλαβοῦσα τὴν ἡμίσειαν τοῦ μείζονος τμήματος τὴν Χα πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τοῦ μείζονος τμήματος· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς Ωα τοῦ ἀπὸ τῆς αΧ. Καὶ ἔστι τῆς μὲν αΩ διπλῆ ἡ ΩΨ, τῆς δὲ αΧ διπλῆ ἡ ΧΦ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ. Καὶ ἐπεὶ τετραπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ, πενταπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἐδείχθη δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΩΨ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΦΧ, καὶ ἔστιν ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΦΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΨΩ. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· καὶ ἡ ΨΩ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ τῆς δοθείσης σφαίρας διαμέτρῳ· τῇ ἄρα δοθείσῃ σφαίρᾳ περιείληπται τὸ εἰκοσάεδρον.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἐπεὶ γὰρ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ῥητὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ ΕΖΗΘΚ κύκλου· ὥςτε καὶ ἡ διάμετρος αὐτοῦ ῥητή ἐστιν. Ἐὰν δὲ εἰς κύκλον ῥητὴν ἔχοντα τὴν διάμετρον πεντάγωνον ἰσόπλευρον ἐγγραφῇ, ἡ τοῦ πενταγώνου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων. Ἡ δὲ τοῦ ΕΖΗΘΚ πενταγώνου πλευρὰ ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου ἐστίν· ἡ ἄρα τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἐλάσσων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων ἐστὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ' οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται, καὶ ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ τῶν δύο τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἐγγραφομένων.

Πρότασις ιζ.

Δωδεκάεδρον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, ᾗ καὶ τὰ προειρημένα σχήματα· καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή. 17.

Κείσθωσαν τοῦ προειρημένου κύβου δύο ἐπίπεδα Fig. 17.
πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις τὰ ΑΒΓΔ ΓΒΕΖ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΑ ΕΖ ΕΒ ΖΓ πλευρῶν δίχα κατὰ τὰ Η Θ Κ Λ Μ Ν Ξ σημεῖα· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΗΚ ΘΛ ΜΘ ΝΞ, καὶ τετμήσθω ἑκάστη τῶν ΝΟ ΟΞ ΘΠ εὐθειῶν ἄκρον καὶ μέσον κατὰ τὰ Ρ Σ Τ σημεῖα, καὶ ἔστω αὐτῶν μείζονα τμήματα τὰ ΡΟ ΟΣ ΤΠ, καὶ ἀνεστάτωσαν ἀπὸ τῶν Ρ Σ Τ σημείων τοῖς τοῦ κύβου ἐπιπέδοις πρὸς ὀρθὰς ἐπὶ τὰ ἐκτὸς μέρη τοῦ κύβου αἱ ΡΥ ΣΦ ΤΧ, καὶ κείσθωσαν ἴσαι ταῖς ΡΟ ΟΣ ΤΠ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΥΒ ΒΧ ΧΓ ΓΦ ΦΥ· λέγω ὅτι τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, καὶ ἔτι ἰσογώνιόν ἐστιν. Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΡΒ ΣΒ ΦΒ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΟΝ ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΟ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ

τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΡ τῇ ΡΥ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΝ ΝΡ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΝ ΝΡ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΡ ἐστὶν ἴσον· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΡ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ· ὥςτε τὰ ἀπὸ τῶν ΒΡ ΡΥ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΡΥ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΡ ΡΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΥ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΥ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΥΡ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΥ τῆς ΥΡ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΦΥ τῆς ΥΡ διπλῆ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ ΡΣ τῆς ΡΟ, τοῦτ᾽ ἔστι τῆς ΡΥ ἐστὶ διπλῆ· ἴση ἄρα ἡ ΒΥ τῇ ΥΦ. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν ΒΧ ΧΓ ΓΦ ἑκατέρᾳ τῶν ΒΥ ΥΦ ἴση ἐστίν· ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Ο ἑκατέρᾳ τῶν ΡΥ ΣΦ παράλληλος ἐπὶ τὰ ἐκτὸς τοῦ κύβου μέρη ἡ ΟΨ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΨΘ ΘΧ· λέγω ὅτι ἡ ΨΘΧ εὐθεῖά ἐστιν. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΘΠ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Τ, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΠΤ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΠ πρὸς τὴν ΠΤ, οὕτως ἡ ΠΤ πρὸς τὴν ΤΘ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΠΘ τῇ ΘΟ, ἡ δὲ ΠΤ ἑκατέρᾳ τῶν ΤΧ ΟΨ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΘΟ πρὸς τὴν ΟΨ, οὕτως ἡ ΧΤ πρὸς τὴν ΤΘ. Καὶ ἔστι παράλληλος ἡ μὲν ΘΟ τῇ ΤΧ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΔ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν, ἡ δὲ ΤΘ τῇ ΟΨ, ἑκατέρα γὰρ αὐτῶν τῷ ΒΖ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ἐὰν δὲ δύο τρίγωνα συντεθῇ κατὰ μίαν γωνίαν, ὡς τὰ ΨΟΘ ΘΥΧ, τὰς δύο πλευρὰς ταῖς δυσὶ πλευραῖς ἀνάλογον ἔχοντα, ὥςτε τὰς ὁμολόγους αὐτῶν πλευρὰς καὶ παραλλήλους εἶναι, αἱ λοιπαὶ εὐθεῖαι ἐπ᾽ εὐθείας ἔσονται· ἐπ᾽ εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΨΘ τῇ ΘΧ. Πᾶσα δὲ εὐθεῖα ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ· ἐν ἑνὶ ἄρα ἐπιπέδῳ ἐστὶ τὸ ΥΒΧΓΦ πεντάγωνον.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἰσογώνιόν ἐστιν.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ρ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΡ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΝΟ ΟΡ πρὸς τὴν ΟΝ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ. Ἴση δὲ ἡ ΡΟ τῇ ΟΣ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΣΝ πρὸς τὴν ΝΟ, οὕτως ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΣ· ἡ ΝΣ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΟΝ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΟΝ τῇ ΝΒ, ἡ δὲ ΟΣ τῇ ΣΦ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΦ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· ὥςτε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΦΣ ΣΝ ΝΒ τετραπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΣΝ ΝΒ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΣ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΒΣ ΣΦ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΦ, (ὀρθὴ γὰρ ἡ ὑπὸ ΦΣΒ γωνία,) τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΒ· διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῆς ΒΝ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΒΝ διπλῆ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΦΒ τῇ ΒΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΒΥ ΥΦ δυσὶ ταῖς ΒΧ ΧΓ ἴσαι εἰσὶ, καὶ βάσις ἡ ΦΒ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΥΦ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ ἐστὶν ἴση. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ ΥΦΓ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΒΧΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΧΓ ΒΥΦ ΥΦΓ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. Ἐὰν δὲ πενταγώνου ἰσοπλεύρου αἱ τρεῖς γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, ἰσογώνιον ἔσται τὸ πεντάγωνον· ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον. Ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον· τὸ ἄρα ΒΥΦΓΧ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ἰσογώνιον, καὶ ἔστιν ἐπὶ μιᾶς τοῦ κύβου πλευρᾶς τῆς ΒΓ. Ἐὰν ἄρα ἐφ᾽ ἑκάστης τῶν τοῦ κύβου δώδεκα πλευρῶν τὰ αὐτὰ κατασκευάσωμεν, συσταθήσεταί τι σχῆμα στερεὸν ὑπὸ δώδεκα πενταγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον, ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον.

Δεῖ

Δεῖ δὴ αὐτὸ καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν τῇ δοθείσῃ, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΨΟ, καὶ ἔστω ἡ ΟΩ· συμβάλλει ἄρα ἡ ΟΩ τῇ τοῦ κύβου διαμέτρῳ, καὶ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας. Τεμνέτωσαν κατὰ τὸ Ω· τὸ Ω ἄρα κέντρον ἐστὶ τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον, καὶ ἡ ΟΩ ἡμίσεια τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου. Ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΥΩ. Καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα γραμμὴ ἡ ΝΣ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Ο, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΝΣ ΣΟ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Ἴση δὲ ἡ μὲν ΝΣ τῇ ΨΩ, ἐπειδήπερ καὶ ἡ μὲν ΝΟ τῇ ΟΩ ἐστὶν ἴση, ἡ δὲ ΨΟ τῇ ΟΣ· ἀλλὰ μὴν καὶ ἡ ΟΣ τῇ ΨΥ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΡΟ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΩΨ ΨΥ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΩΨ ΨΥ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΥΩ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΥΩ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΝΟ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον δυνάμει τριπλασίων τῆς ἡμισείας τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς, (προδέδεικται γὰρ κύβον συστήσασθαι, καὶ σφαίρᾳ περιλαβεῖν, καὶ δεῖξαι ὅτι ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων ἐστὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ κύβου). Εἰ δὲ ὅλη τῆς ὅλης, καὶ ἡ ἡμίσεια τῆς ἡμισείας· καὶ ἔστιν ἡ ΝΟ ἡμίσεια τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ἡ ἄρα ΥΩ ἴση ἐστὶ τῇ ἐκ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον. Καὶ ἔστι τὸ Ω κέντρον τῆς σφαίρας τῆς περιλαμβανούσης τὸν κύβον· τὸ Υ ἄρα σημεῖον πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας. Ὁμοίως δὴ δείξομεν ὅτι καὶ ἑκάστη τῶν λοιπῶν γωνιῶν τοῦ δωδεκαέδρου πρὸς τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ τῆς σφαίρας· περιείληπται ἄρα τὸ δωδεκάεδρον τῇ δοθείσῃ σφαίρᾳ.

Λέγω δὴ ὅτι ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρὰ ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἐπεὶ γὰρ τῆς ΝΟ ἄκρον καὶ μέσον τετμημένης, τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΟ· τῆς δὲ ΟΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΟΣ, ὅλης ἄρα τῆς ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ. (Οἷον ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΝΟ πρὸς τὴν ΟΡ, οὕτως ἡ ΟΡ πρὸς τὴν ΡΝ, καὶ τὰ διπλάσια· τὰ γὰρ μέρη τοῖς ἰσάκις πολλαπλασίοις τὸν αὐτὸν ἔχει λόγον· ὡς ἄρα ἡ ΝΞ πρὸς τὴν ΡΣ, οὕτως ἡ ΡΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΝΡ ΣΞ. Μείζων δὲ ἡ ΝΞ τῆς ΡΣ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΡΣ συναμφοτέρου τῆς ΝΡ ΣΞ· ἡ ΝΞ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται, καὶ τὸ μεῖζον αὐτῆς τμῆμά ἐστιν ἡ ΡΣ). Ἴση δὲ ἡ ΡΣ τῇ ΥΦ· τῆς ἄρα ΝΞ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΥΦ. Καὶ ἐπεὶ ῥητή ἐστιν ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος, καὶ ἔστι δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς· ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ΝΞ πλευρὰ οὖσα τοῦ κύβου. Ἐὰν δὲ ῥητὴ γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἑκάτερον τῶν τμημάτων ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή.

Ἡ ΥΦ ἄρα πλευρὰ οὖσα τοῦ δωδεκαέδρου ἄλογός ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομή· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Πόρισμα.

Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν, ὅτι τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς ἄκρον καὶ μέσον λόγον τεμνομένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου πλευρά.

Πρότασις ιη΄.

Τὰς πλευρὰς τῶν πέντε σχημάτων ἐκ- 18.
θέσθαι καὶ συγκρῖναι πρὸς ἀλλήλας.

Ἐκκείσθω ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω κατὰ μὲν τὸ Γ ὥςτε ἴσην εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΓΒ, κατὰ δὲ τὸ Δ, ὥςτε διπλασίονα εἶναι τὴν ΑΔ τῆς ΔΒ, καὶ γεγράφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ ἡμικύκλιον τὸ ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ Δ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθωσαν αἱ ΓΕ ΔΖ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΖ ΖΒ ΑΕ ΕΒ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· ἀναστρέψαντι ἡμιολία ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ. Ὡς δὲ ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΖ· ἰσογώνιον γάρ ἐστι τὸ ΑΖΒ τρίγωνον τῷ ΑΖΔ τριγώνῳ· ἡμιόλιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΖ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἡμιολία τῆς πλευρᾶς τῆς πυραμίδος, καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΑΖ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ πλευρᾷ τῆς πυραμίδος. Fig. 18.

Πάλιν, ἐπεὶ διπλασίων ἐστὶν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ, τριπλασίων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΖ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει τριπλασίων τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΖ ἄρα τοῦ κύβου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, διπλῆ ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ. Ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΕ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΕ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει διπλασίων τῆς τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς, καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς δοθείσης σφαίρας διάμετρος· ἡ ΒΕ ἄρα τοῦ ὀκταέδρου ἐστὶ πλευρά.

Ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΗ, καὶ κείσθω ἡ ΑΗ ἴση τῇ ΑΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετος ἤχθω ἡ ΘΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΗΑ τῆς ΑΓ, (ἴση γὰρ ἡ ΗΑ τῇ ΑΒ,) ὡς δὲ ἡ ΗΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΘΚ πρὸς τὴν ΚΓ· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῆς ΚΓ· τετραπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΘΚ ΚΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΘΓ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΓ. Ἴση δὲ ἡ ΘΓ τῇ ΓΒ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ. Καὶ ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, ὧν ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ ἐστὶ διπλῆ· λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΔ λοιπῆς τῆς ΔΓ ἐστὶ διπλῆ· τριπλῆ ἄρα ἡ ΒΓ τῆς ΓΔ· ἐνναπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Πενταπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ· μεῖζον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΚ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΚ τῆς ΓΔ. Κείσθω τῇ ΓΚ ἴση ἡ ΓΛ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΛΜ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΜΒ. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΚ, καὶ ἔστι τῆς μὲν ΒΓ διπλῆ ἡ ΑΒ, τῆς δὲ ΓΚ διπλῆ ἡ ΚΛ· πενταπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΚΛ. Ἔστι δὲ καὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει πενταπλασίων τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἔστιν ἡ ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος· ἡ ΚΛ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου ἐστὶ τοῦ κύκλου ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται· ἡ ΚΛ ἄρα ἑξαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ εἰρημένου κύκλου. Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος σύγκειται ἔκ τε τῆς τοῦ ἑξαγώνου καὶ δύο τῶν τοῦ δεκαγώνου τῶν εἰς τὸν εἰρημένον κύκλον ἐγγραφομένων, καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΑΒ ἡ τῆς σφαίρας

διάμετρος, ἡ δὲ ΚΛ ἑξαγώνου πλευρὰ, καὶ ἴση ἡ ΛΚ τῇ ΛΒ· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΛΚ ΛΒ δεκαγώνου ἐστὶ πλευρὰ τοῦ ἐγγραφομένου εἰς τὸν κύκλον, ἀφ᾽ οὗ τὸ εἰκοσάεδρον ἀναγέγραπται. Καὶ ἐπεὶ δεκαγώνου μὲν ἡ ΛΒ, ἑξαγώνου δὲ ἡ ΜΛ, ἴση γάρ ἐστι τῇ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ τῇ ΘΚ, ἴσον γὰρ ἀπέχουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου, καὶ ἔστιν ἑκατέρα τῶν ΘΚ ΚΛ διπλασίων τῆς ΚΓ· πενταγώνου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ. Ἡ δὲ τοῦ πενταγώνου ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· εἰκοσαέδρου ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΒ.

Καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΒ κύβου ἐστὶ πλευρὰ, τετμήσθω ἄκρον καὶ μέσον λόγον κατὰ τὸ Ν, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΝΒ· ἡ ΝΒ ἄρα δωδεκαέδρου ἐστὶ πλευρά.

Καὶ ἐπεὶ ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος ἐδείχθη τῆς μὲν ΑΖ πλευρᾶς τῆς πυραμίδος δυνάμει ἡμιολία, τῆς δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς ΒΕ δυνάμει διπλασίων, τῆς δὲ τοῦ κύβου τῆς ΖΒ δυνάμει τριπλασίων· οἵων ἄρα ἡ τῆς σφαίρας διάμετρος δυνάμει ἕξ, τοιούτων ἡ μὲν τῆς πυραμίδος τεσσάρων, ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τριῶν, ἡ δὲ τοῦ κύβου δύο· ἡ ἄρα τῆς πυραμίδος πλευρὰ τῆς μὲν τοῦ ὀκταέδρου πλευρᾶς δυνάμει ἐστὶν ἐπίτριτος, τῆς δὲ τοῦ κύβου δυνάμει διπλῆ· ἡ δὲ τοῦ ὀκταέδρου τῆς τοῦ κύβου δυνάμει ἡμιολία. Αἱ μὲν οὖν εἰρημέναι τῶν τριῶν σχημάτων πλευραὶ, λέγω δὴ πυραμίδος καὶ ὀκταέδρου καὶ κύβου, πρὸς ἀλλήλας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς· αἱ δὲ λοιπαὶ δύο, λέγω δὲ ἥτε τοῦ εἰκοσαέδρου καὶ ἡ τοῦ δωδεκαέδρου, οὔτε πρὸς ἀλλήλας οὔτε πρὸς τὰς προειρημένας εἰσὶν ἐν λόγοις ῥητοῖς, ἄλογοι γάρ εἰσιν, ἡ μὲν ἐλάττων, ἡ δὲ ἀποτομή.

Ὅτι δὲ μείζων ἐστὶν ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου πλευρὰ ἡ ΜΒ τῆς τοῦ δωδεκαέδρου τῆς ΝΒ, δείξομεν οὕτως.

Ἐπεὶ γὰρ ἰσογώνιόν ἐστι τὸ ΖΔΒ τρίγωνον τῷ ΖΑΒ τριγώνῳ, ἀνάλογόν ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΖ οὕτως ἡ ΖΒ πρὸς τὴν ΒΔ. Καὶ ἐπεὶ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογόν εἰσιν, ἔστιν ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΖ· ἀνάπαλιν ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Τριπλῆ δὲ ἡ ΑΒ τῆς ΒΔ· τριπλάσιον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΖΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΔ. Ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ τετραπλάσιον· διπλῆ γὰρ ἡ ΑΔ τῆς ΔΒ· μεῖζον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΖΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΔ τῆς ΖΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΑΛ τῆς ΖΒ μείζων ἐστί. Καὶ τῆς μὲν ΑΛ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΚΛ, ἐπειδήπερ ἡ μὲν ΛΚ ἑξαγώνου ἐστὶν, ἡ δὲ ΚΑ δεκαγώνου· τῆς δὲ ΖΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμημένης τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΝΒ· μείζων ἄρα ἡ ΚΛ τῆς ΝΒ. Ἴση δὲ ἡ ΚΛ τῇ ΛΜ· μείζων ἄρα ἡ ΛΜ τῆς ΝΒ. Τῆς δὲ ΛΜ μείζων ἐστὶν ἡ ΜΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ΜΒ πλευρὰ οὖσα τοῦ εἰκοσαέδρου μείζων ἐστὶ τῆς ΝΒ πλευρᾶς οὔσης τοῦ δωδεκαέδρου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Σχόλιον.

Λέγω δὴ ὅτι παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα οὐ συσταθήσεται ἕτερον σχῆμα περιεχόμενον ὑπὸ ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων ἴσων ἀλλήλοις.

Ὑπὸ μὲν γὰρ δύο τριγώνων, ἀλλ' οὐδὲ ἄλλων δύο ἐπιπέδων, στερεὰ γωνία οὐ συσταθήσεται. Ὑπὸ

δὲ τριῶν τριγώνων ἡ τῆς πυραμίδος, ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἡ τοῦ ὀκταέδρου, ὑπὸ δὲ πέντε ἡ τοῦ εἰκοσαέδρου· ὑπὸ δὲ ἓξ τριγώνων ἰσοπλεύρων τε καὶ ἰσογωνίων πρὸς ἑνὶ σημείῳ συνισταμένων οὐκ ἔσται στερεὰ γωνία, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου γωνίας διμοίρου ὀρθῆς, ἔσονται αἱ ἓξ τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι, ὅπερ ἀδύνατον, ἅπασα γὰρ στερεὰ γωνία ὑπὸ ἐλασσόνων ἢ τεσσάρων ὀρθῶν περιέχεται. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ οὐδὲ ὑπὸ πλειόνων ἢ ἓξ γωνιῶν ἐπιπέδων στερεὰ γωνία συνίσταται. Ὑπὸ δὲ τετραγώνων τριῶν ἡ τοῦ κύβου γωνία περιέχεται· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, ἔσονται γὰρ πάλιν τέσσαρες ὀρθαί. Ὑπὸ δὲ πενταγώνων ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων, ὑπὸ μὲν τριῶν ἡ τοῦ δωδεκαέδρου· ὑπὸ δὲ τεσσάρων ἀδύνατον, οὔσης γὰρ τῆς τοῦ πενταγώνου ἰσοπλεύρου γωνίας ὀρθῆς καὶ πέμπτου, ἔσονται αἱ τέσσαρες γωνίαι τεσσάρων ὀρθῶν μείζους, ὅπερ ἀδύνατον. Οὐδὲ μὴν ὑπὸ πολυγώνων ἑτέρων σχημάτων περισχεθήσεται στερεὰ γωνία, διὰ τὸ αὐτὸ ἄτοπον.

Οὐκ ἄρα παρὰ τὰ εἰρημένα πέντε σχήματα ἕτερον σχῆμα στερεὸν συσταθήσεται ὑπὸ ἰσοπλεύρων καὶ ἰσογωνίων περιεχόμενον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λ ῆ μ μ α.

Ὅτι δὲ ἡ τοῦ ἰσοπλεύρου τε καὶ ἰσογωνίου πενταγώνου γωνία ὀρθή ἐστι καὶ πέμπτον, οὕτως δεικτέον.

Ἔστω γὰρ πεντάγωνον ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον τὸ ΑΒΓΔΕ, καὶ περιγεγράφθω περὶ αὐτὸ κύκλος ὁ ΑΒΓΔΕ, καὶ εἰλήφθω αὐτοῦ τὸ κέντρον τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΑ ΖΒ ΖΓ ΖΔ ΖΕ· δίχα ἄρα τέμνουσι τὰς πρὸς τοῖς Α Β Γ Δ Ε τοῦ

πενταγώνου γωνίας. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τῷ Ζ πέντε γωνίαι τέσσαρσιν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσὶ, καὶ εἰσὶν ἴσαι· μία ἄρα αὐτῶν, ὡς ἡ ὑπὸ ΑΖΒ, μιᾶς ὀρθῆς ἐστὶ παρὰ πέμπτον· λοιπαὶ ἄρα αἱ ὑπὸ ΖΑΒ ΑΒΖ μιᾶς εἰσὶν ὀρθῆς καὶ πέμπτου. Ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΖΑΒ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τοῦ πενταγώνου γωνία μιᾶς ἐστι ὀρθῆς καὶ πέμπτου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τέλος τοῦ τρισκαιδεκάτου βιβλίου καὶ τῶν Εὐκλείδου στοιχείων.

Appendix V.

Demonstrationes alterae in editionibus Elementorum Euclidis hic illic adscriptae.

(Sectio altera.)

12.

Ad Lib. X. prop. 1

Ἄλλως.

Ἐκκείσθω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ Γ, ἔστω δὲ τὸ Γ ἔλασσον, καὶ ἐπεὶ ἔλασσόν ἐστι τὸ Γ, πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεγέθους μεῖζον. Γεγονέτω ὡς τὸ ΖΜ, καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ἴσα τῷ Γ, καὶ ἔστω τὰ ΜΘ ΘΗ ΗΖ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφῃρήσθω μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ ΑΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΕΔ. Καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἴσαι γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΖΜ διαιρέσεσι. Γεγονέτωσαν ὡς αἱ ΒΕ ΕΔ ΔΑ, καὶ τῷ ΔΑ ἕκαστον τῶν ΚΛ ΛΝ ΝΞ ἔστω ἴσον, καὶ τοῦτο γιγνέσθω ἕως ἂν αἱ διαιρέσεις τοῦ ΚΞ ἴσαι γένωνται ταῖς τοῦ ΖΜ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ ΒΕ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΑΒ, τὸ ΒΕ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΕΑ· πολλῷ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΔΑ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΝ· τὸ ΒΕ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΞ. Πάλιν, ἐπεὶ τὸ ΕΔ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισύ ἐστι τοῦ ΕΑ, μεῖζόν ἐστι τοῦ ΔΑ. Ἀλλὰ τὸ ΑΔ ἔστιν ἴσον τῷ ΝΛ· τὸ ΕΔ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΝΛ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΔ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΛ. Ἴσον δὲ τὸ ΔΑ τῷ ΛΚ. ὅλον ἄρα τὸ ΒΑ μεῖζόν ἐστιν ὅλου τοῦ ΞΚ. Ἀλλὰ τοῦ ΒΑ μεῖζόν ἐστι τὸ ΜΖ· πολλῷ ἄρα τὸ ΜΖ μεῖζόν ἐστι τοῦ ΞΚ. Καὶ ἐπεὶ τὰ ΞΝ ΝΛ ΛΚ ἴσα ἀλλήλοις ἐστὶν, ἔστι δὲ καὶ τὰ ΜΘ ΘΗ ΗΖ ἴσα ἀλλήλοις, καὶ ἔστιν ἴσον τὸ πλῆθος τῶν ἐν τῷ ΜΖ τῷ πλήθει τῶν ἐν τῷ ΞΚ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΚΛ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως τὸ ΞΚ

πρὸς τὸ ΖΜ. Μεῖζον δὲ τὸ ΖΜ τοῦ ΞΚ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ΖΗ τοῦ ΛΚ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΗ ἴσον τῷ Γ, τὸ δὲ ΚΛ τῷ ΑΔ· τὸ Γ ἄρα μεῖζόν ἐστι τοῦ ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13.

Ad Lib. X. prop. 6.

Ἄλλως.

Δύο γὰρ μεγέθη τὰ Α Β πρὸς ἄλληλα λόγον ἐχέτω ὃν αριθμὸς ὁ Γ πρὸς ἀριθμὸν τὸν Δ· λέγω ὅτι σύμμετρά ἐστι τὰ μεγέθη.

Ὅσαι γάρ εἰσιν ἐν τῷ Γ μονάδες εἰς τοσαῦτα ἴσα διῃρήσθω τὸ Α, καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔστω τὸ Ε· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Γ ἀριθμὸν, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Α. Ἔστι δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως τὸ Α πρὸς τὸ Β· διίσου ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν Δ, οὕτως τὸ Ε πρὸς τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν Δ· μετρεῖ ἄρα καὶ τὸ Ε τὸ Β. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ Ε τὸ Α, ἐπεὶ καὶ ἡ μονὰς τὸν Γ· τὸ Ε ἄρα ἑκάτερον τῶν Α Β μετρεῖ· τὰ Α Β ἄρα σύμμετρά ἐστι, καὶ ἔστιν αὐτῶν κοινὸν μέτρον τὸ Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14.

Ad Lib. X. prop. 9.

Ἄλλως.

Ἐπεὶ γὰρ σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει, λόγον ἔχει, ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω, ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, καὶ ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε ποιείτω, ὁ δὲ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω, ὁ δὲ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η ποιείτω. Ἐπεὶ οὖν ὁ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Πάλιν, ἐπεὶ ὁ Δ ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας τὸν Η πεποίηκεν, ὁ δὲ Δ τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, τουτ᾽ ἔστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ᾽ ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η. Ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, οὕτως ἦν ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· διίσου ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Η. Ἔστι δὲ ἑκάτερος τῶν Ε Η τετράγωνος, ὁ μὲν γὰρ Ε ἀπὸ τοῦ Γ

ἐστὶν, ὁ δὲ Η ἀπὸ τοῦ Δ· τὸ ἀπὸ τῆς Α ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον ἔχει, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Ἀλλὰ δὴ ἐχέτω τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β λόγον, ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν τὸν Η· λέγω ὅτι σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει.

Ἔστω γὰρ τοῦ μὲν Ε πλευρὰ ὁ Γ, τοῦ δὲ Η ὁ Δ, καὶ ὁ Γ τὸν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ ποιείτω· οἱ Ε Ζ Η ἄρα ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον ἐν τῷ τοῦ Γ πρὸς τὸν Δ λόγῳ. Καὶ ἐπεὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α Β μέσον ἀνάλογόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, τῶν δὲ Ε Η ὁ Ζ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ. Ὡς δὲ τὸ ὑπὸ τῶν Α Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β οὕτως ὁ Ζ πρὸς τὸν Η, ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν Α Β, οὕτως ἡ Α πρὸς τὴν Β· αἱ Α Β ἄρα σύμμετροί εἰσι, λόγον γὰρ ἔχουσιν ὃν ἀριθμὸς ὁ Ε πρὸς ἀριθμὸν τὸν Ζ, τουτ' ἔστιν ὃν ὁ Γ πρὸς τὸν Δ· ὡς γὰρ ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὁ γὰρ Γ ἑαυτὸν μὲν πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκε, τὸν δὲ Δ πολλαπλασιάσας τὸν Ζ πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

15.

Ad Lib. X. prop. 9. (porism.)

Demonstratio corollarii.

Εἴπερ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν μήκει συμμέτρων εὐθειῶν τετράγωνα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, τὰ δὲ λόγον ἔχοντα ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν σύμμετρά ἐστιν· ὥστε αἱ μήκει σύμμετροι εὐθεῖαι οὐ μόνον εἰσὶ μήκει σύμμετροι ἀλλὰ καὶ δυνάμει.

Πάλιν, ἐπεὶ ὅσα τετράγωνα πρὸς ἄλληλα λόγον ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν μήκει ἐδείχθη σύμμετρα, καὶ δυνάμει ὄντα σύμμετρα, τῷ τὰ τετράγωνα λόγον ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν· ὅσα ἄρα τετράγωνα λόγον οὐκ ἔχει ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμὸν, ἀλλ' ἁπλῶς ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, σύμμετρα μὲν ἔσται αὐτὰ τὰ τετράγωνα δυνάμει, οὐκέτι δὲ καὶ μήκει· ὥστε τὰ μὲν μήκει σύμμετρα πάντως καὶ δυνάμει, τὰ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, εἰ μὴ καὶ λόγον ἔχοιεν ὃν τετράγωνος ἀριθμὸς πρὸς τετράγωνον ἀριθμόν.

Λέγω δὴ ὅτι καὶ αἱ μήκει ἀσύμμετροι οὐ πάντως καὶ δυνάμει. Ἐπεὶ δὴ γὰρ αἱ δυνάμει σύμμετροι δύνανται λόγον μὴ ἔχειν ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, καὶ διὰ τοῦτο δυνάμει οὖσαι σύμμετροι μήκει εἰσὶν ἀσύμμετροι· ὥστε οὐχ αἱ μήκει ἀσύμμετροι

πάντως καὶ δυνάμει, ἀλλὰ μήκει δύνανται οὖσαι ἀσύμμετροι δυνάμει εἶναι καὶ ἀσύμμετροι καὶ σύμμετροι.

Αἱ δὲ δυνάμει ἀσύμμετροι, πάντως καὶ μήκει ἀσύμμετροι· εἰ γὰρ μήκει σύμμετροι, ἔσονται καὶ δυνάμει σύμμετροι. Ὑπόκεινται δὲ καὶ ἀσύμμετροι, ὅπερ ἄτοπον· αἱ ἄρα δυνάμει ἀσύμμετροι πάντως καὶ μήκει.

16.

Ad Lib. X. prop. 19.

Σχόλιον (Λῆμμα) α΄.

Ἐπεὶ δέδεικται ὅτι αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι, αἱ δὲ δυνάμει οὐ πάντως καὶ μήκει, ἀλλὰ δὴ δύνανται μήκει σύμμετροι εἶναι καὶ ἀσύμμετροι· φανερὸν ὅτι ἐὰν τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ μήκει, λέγεται ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ οὐ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπεὶ αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ καὶ σύμμετρος αὐτῇ μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ τῇ ἐκκειμένῃ πάλιν ῥητῇ σύμμετρός τις οὖσα δυνάμει, μήκει αὐτῇ ᾖ ἀσύμμετρος, λέγεται καὶ οὕτως ῥητὴ δυνάμει μόνον σύμμετρος.

(Πρόκλου) σχόλιον. β΄.

Ῥητὰς γὰρ καλεῖ τὰς τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ ἤτοι μήκει καὶ δυνάμει συμμέτρους, ἢ δυνάμει μόνον. Εἰσὶ δὲ καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἳ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ διὰ τοῦτο πάλιν λέγονται ῥηταὶ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας καθ' ὃ ῥηταί, ἀλλὰ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται ῥηταὶ μήκει σύμμετροι, ἐπακουομένου ὅτι καὶ δυνάμει· εἰ δὲ δυνάμει μόνον πρὸς ἀλλήλας εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ αὗται οὕτως ῥηταὶ δυνάμει μόνον σύμμετροι. Ὅτι δὲ αἱ ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν, ἐντεῦθεν δῆλον· ἐπεὶ γὰρ ῥηταί εἰσιν αἱ τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ σύμμετροι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα ῥηταὶ σύμμετροί εἰσιν.

17.

Ad Lib. X. prop. 21.

Λῆμμα.

Ἡ δυναμένη ἄλογον χωρίον, ἄλογός ἐστι.

Δυνάσθω γὰρ ἡ Α ἄλογον χωρίον, τοῦτ' ἔστι τὸ ἀπὸ τῆς Α τετράγωνον ἴσον ἔστω ἀλόγῳ χωρίῳ, λέγω ὅτι ἡ Α ἄλογός ἐστιν.

Εἰ γὰρ ἔσται ῥητὴ ἡ Α, ῥητὸν ἔσται καὶ τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, οὕτως γάρ ἐστιν ἐν τοῖς ὅροις. Οὐκ ἔστι δέ· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Α· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Λῆμμα (Scholium ed. Bas. et Ox.)

Μέση ἐστὶν ἄλογος ἡ δυναμένη χωρίον περιεχόμενον ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων.

Ὑπὸ ῥητῶν γὰρ δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν Α Β περιεχέσθω χωρίον. Δεικτέον ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ τοιοῦτον χωρίον.

Εἰλήφθω γὰρ τῶν Α Β μέση ἀνάλογον ἡ Γ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν Α Β ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς Γ, ὥστε ἡ Γ δύναται τὸ ὑπὸ τῶν Α Β. Ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ· ὡς γὰρ ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς δευτέρας. Τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ πορίσματι τοῦ $\overline{\iota\vartheta}$ τοῦ $\overline{\varsigma}$ στοιχείου. Ἀσύμμετρος δὲ ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Γ. Ῥητὸν δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α· ἄλογον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν Α Β· ἄλογος ἄρα ἐστὶν ἡ Γ. Μέση δὲ ἐκλήθη, ὅτι ἄλογος οὖσα μέση (Ed. Bas. et Ox. *μέσον*) *δύο ῥητῶν τῶν Α Β ἀνάλογόν ἐστιν.*

18.

Ad Lib. X. prop. 22.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν δευτέραν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς πρώτης πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΖΕ ΕΗ· λέγω ὅτι ἔστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΖΕ τετράγωνον τὸ ΔΖ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΗΔ. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ, οὕτως τὸ ΖΔ πρὸς τὸ ΔΗ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΖΔ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ, τὸ

δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕ ΕΗ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΕ πρὸς τὴν ΕΗ οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΖΕ ΕΗ. Ὁμοίως δὲ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΕ ΕΖ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΖ, τουτ᾽ ἔστιν ὡς τὸ ΗΔ πρὸς τὸ ΖΔ, οὕτως ἡ ΗΕ πρὸς τὴν ΕΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

19.

Ad Lib. X. prop. 24.

Demonstratio corollarii.

. . . λέγεσθαι μέσην καὶ σύμμετρον αὐτῇ μὴ μόνον μήκει ἀλλὰ καὶ δυνάμει, ἐπειδήπερ καθόλου αἱ μήκει σύμμετροι πάντως καὶ δυνάμει. Ἐὰν δὲ τῇ μέσῃ σύμμετρός τις ᾖ δυνάμει, εἰ μὲν καὶ μήκει, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι καὶ σύμμετροι μήκει καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον, λέγονται μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Scholium.

Εἰσὶ δὲ πάλιν καὶ ἄλλαι εὐθεῖαι, αἱ μήκει μὲν ἀσύμμετροί εἰσι τῇ μέσῃ, δυνάμει δὲ μόνον σύμμετροι, καὶ λέγονται πάλιν μέσαι, διὰ τὸ σύμμετροι εἶναι δυνάμει τῇ μέσῃ καὶ σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας, καθὸ μέσαι ἄλλαι σύμμετροι πρὸς ἀλλήλας ἤτοι μήκει δηλαδὴ καὶ δυνάμει, ἢ δυνάμει μόνον. Καὶ εἰ μὲν μήκει, λέγονται καὶ αὗται μέσαι μήκει σύμμετροι, ἑπομένου τοῦ ὅτι καὶ δυνάμει. Εἰ δὲ δυνάμει μόνον εἰσὶ σύμμετροι, λέγονται καὶ οὕτως μέσαι δυνάμει μόνον σύμμετροι.

Ὅτι δὲ αἱ μέσαι σύμμετροί εἰσιν, οὕτως δεικτέον. Ἐπεὶ αἱ μέσαι μέσῃ τινὶ σύμμετροί εἰσι, τὰ δὲ τῷ αὐτῷ σύμμετρα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶ σύμμετρα· αἱ ἄρα μέσαι σύμμετροί εἰσιν.

20.

Ad Lib. X. prop. 28.

(In editione Bas. exstat hoc theorema (*κή*) 28. ad quod in margine adscripta haec leguntur: Hanc (propositionem) exemplar alterum non habebat, nec videtur esse autoris.)

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων ἐν λόγῳ ὁποιῳοῦν, καὶ ἄλλου τινὸς, δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν οὕτως τοῦτον πρὸς ἄλλον τινα.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ οἱ ΑΒ ΓΔ λόγον ἔχοντες πρὸς ἀλλήλους ὁποιονοῦν· ἄλλος δέ τις ὁ ΓΕ. Δεῖ ποιῆσαι τὸ προκείμενον.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ὑπὸ τῶν ΔΓ ΓΕ παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΔΕ· καὶ τῷ ΔΕ ἴσον παρὰ τὴν ΑΒ παραβεβλήσθω παραλληλόγραμμον ὀρθογώνιον τὸ ΒΖ.

Ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΕ παραλληλόγραμμον τῷ ΒΖ παραλληλογράμμῳ· ἔστι δὲ καὶ ἰσογώνιον αὐτῷ. Τῶν δὲ ἴσων καὶ ἰσογωνίων παραλληλογράμμων ἀντιπεπόνθασιν αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας· ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ ΑΒ πρὸς τὸν ΓΔ, οὕτως ὁ ΓΕ πρὸς τὸν ΑΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

21.

Ad Lib. X. prop. 29.

Λῆμμα (ed. Bas.)

Δύο ἀριθμῶν δοθέντων καὶ εὐθείας δέον ποιῆσαι ὡς τὸν ἀριθμὸν πρὸς τὸν ἀριθμὸν, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς εὐθείας τετράγωνον πρὸς (τὸ) ἀπ᾽ ἄλλης τινός.

Ἔστωσαν οἱ δοθέντες δύο ἀριθμοὶ οἱ Α Β· εὐθεῖα δὲ ἡ Γ καὶ δέον ἔστω ποιῆσαι τὸ προκείμενον. Πεποιήσθω γὰρ ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, (οὕτως) ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς ἄλλην τινὰ τὴν Δ καὶ εἰλήφθω τῶν Γ Δ μέση ἀνάλογον ἡ Ε. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, (οὕτως) ἡ Γ εὐθεῖα πρὸς τὴν Δ, ἀλλ᾽ ὡς ἡ Γ πρὸς τὴν Δ, (οὕτως) τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε. Ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Β, (οὕτως) τὸ ἀπὸ τῆς Γ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Ε τετράγωνον.

22.

Ad Lib. X. prop. 31.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν δύο πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δὴ δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ἐν λόγῳ τινί· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ. Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον. Φανερὸν δὴ ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ οὕτως τὸ ΑΔ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΕ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΒΔ, τὸ δὲ ΒΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὡς ἄρα

ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

23.

Ad Lib. X. prop. 32.

Λῆμμα.

Ἐὰν ὦσι τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, ἔσται ὡς ἡ πρώτη πρὸς τὴν τρίτην, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς πρώτης καὶ μέσης πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς μέσης καὶ ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν τρεῖς εὐθεῖαι ἐν λόγῳ τινὶ, αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΓΔ οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ ΓΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου τῇ ΑΔ εὐθεῖα παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΗ, διὰ δὲ τῶν Β Γ Δ σημείων τῇ ΑΕ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΒ ΘΓ ΗΔ. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΒΘ παραλληλόγραμμον, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως τὸ ΒΘ πρὸς τὸ ΤΗ· δι᾽ ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΤΔ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΤΗ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ, τὸ δὲ ΤΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΓ, ΓΔ ἴση γὰρ ἡ ΒΓ τῇ ΓΘ.

Ἐὰν ἄρα τρεῖς ὦσι, καὶ τὰ ἑξῆς.

24.

Ad Lib. X. prop. 33.

Λῆμμα β'.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ τμηθῇ εἰς ἄνισα, ἔσται ὡς ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν, οὕτως τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς μείζονος πρὸς τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης καὶ τῆς ἐλάττονος.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ τετμήσθω εἰς ἄνισα κατὰ τὸ Ε· λέγω ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ, ΒΕ.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΓΔΒ, καὶ διὰ τοῦ Ε σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ ΔΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. Φανερὸν οὖν ὅτι ὡς ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ΑΖ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ, ἴση γὰρ ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, τὸ δὲ ΖΒ τὸ ὑπὸ

τῶν

τῶν ΑΒ ΒΕ, ἴση γὰρ ἡ ΔΒ τῇ ΑΒ. ὡς ἄρα ἡ ΑΕ πρὸς τὴν ΕΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΕ· ὅπερ ἔδει δεῖαξι.

Λῆμμα γ'. (in ed. Bas. propositioni 34. adjectum.)

Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι, τμηθῇ δὲ ἡ ἐλαχίστη αὐτῶν εἰς ἴσα· τὸ ὑπὸ τῶν δύο εὐθειῶν διπλάσιον ἔσται τοῦ τῆς μείζονος καὶ τῆς ἡμισείας τῆς ἐλαχίστης.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ ΒΓ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Δ· λέγω ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ, καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΒΕ καὶ καταγεγράφθω τὸ σχῆμα. Ἐπεὶ οὖν ἔστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΔΗ, συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΔΓ, οὕτως τὸ ΒΗ πρὸς τὸ ΔΗ· καὶ ἔστιν ἡ ΒΓ τῆς ΔΓ διπλασίων· διπλάσιων ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΗ τοῦ ΔΗ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἴση γὰρ ἡ ΑΒ τῇ ΒΕ, τὸ δὲ ΔΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ, ἴση γὰρ τῇ μὲν ΒΔ ἡ ΔΓ, τῇ δὲ ΑΒ ἡ ΔΖ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

25.

Ad Lib. X. prop. 38.

Σχόλιον. (cod. Vat.)

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο ὀνομάτων διὰ τὸ ἐκ δύο ῥητῶν αὐτὴν σύγκεισθαι, κύριον ὄνομα καλῶν τὸ ῥητὸν καθ' ὃ ῥητόν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

26.

Ad Lib. X. prop. 39.

Σχόλιον.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν ἐκ δύο μέσων δευτέραν, διὰ τὸ τὸ μέσον περιέχειν τὸ ὑπ' αὐτῶν, καὶ μὴ ῥητὸν, δευτερεύειν δὲ τὸ μέσον τοῦ ῥητοῦ. Ὅτι δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου περιεχόμενον ἄλογόν ἐστι, δῆλον. Εἰ γάρ ἐστι ῥητὸν καὶ παραβέβληται παρὰ ῥητὴν, εἴη ἂν καὶ

ἡ ἑτέρα αὐτοῦ πλευρὰ ῥητή. Ἀλλὰ καὶ ἄλογος, ὅπερ ἄτοπον· τὸ ἄρα ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀλόγου ἄλογόν ἐστιν.

27.

Ad Lib. X. prop. 40.

Σχόλιον.

Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα, διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητὰ μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσου, καὶ δέον εἶναι ἀπὸ τῆς τῶν ῥητῶν οἰκειότητος τὴν ὀνομασίαν τάττεσθαι. Ὅτι δὲ καὶ μείζονά ἐστι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· οὕτως δεικτέον.

Φανερὸν μὲν οὖν ὅτι ἄνισοί εἰσιν αἱ ΑΒ ΒΓ. Εἰ γὰρ ἦσαν ἴσαι, ἴσα ἂν ἦν καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ καὶ ἦν ἂν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητὸν, ὅπερ οὐχ ὑπόκειται· ἄνισοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΑΒ ΒΓ. Ὑποκείσθω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΒΓ ἴση ἡ ΒΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἴση δὲ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσα ἐστὶ τῷ τε δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μείζονά ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

28.

Ad Lib. X. prop. 41.

Σχόλιον.

Ῥητὸν δὲ καὶ μέσον δυναμένην αὐτὴν ἐκάλεσε διὰ τὸ δύνασθαι δύο χωρία, τὸ μὲν ῥητὸν, τὸ δὲ μέσον· καὶ διὰ τὴν τοῦ ῥητοῦ προύπαρξιν, πρῶτον τὸ ῥητὸν ἐκάλεσεν.

29.

Ad Lib. X. prop. 42.

Σχόλιον. (Σχόλιον ά ed. Ox.)

Καλεῖ δὲ αὐτὴν δύο μέσα δυναμένην, διὰ τὸ δύνασθαι αὐτὴν δύο μέσα χωρία, τό τε συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ.

(Σχόλιον β'. ed. Ox.)

Ὅτι δὲ αἱ εἰρημέναι ἄλογοι μοναχῶς διαιροῦνται εἰς τὰς εὐθείας ἐξ ὧν σύγκεινται, ποιουσῶν τὰ προκείμενα εἴδη, δείξομεν ἤδη προεκθέμενοι λημμάτιον τοιοῦτον.

Λῆμμα.

Ἐκκείσθω εὐθεῖα ἡ ΑΒ καὶ τετμήσθω ἡ ὅλη εἰς ἄνισα καθ' ἑκάτερα τῶν Γ Δ· ὑποκείσθω δὲ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μείζονά ἐστι τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

Τετμήσθω γὰρ ἡ ΑΒ δίχα κατὰ τὸ Ε· καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΔΒ, κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ΔΓ. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΔ λοιπῆς τῆς ΓΒ μείζων ἐστίν· ἴση δὲ ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ· ἐλάττων ἄρα ἡ ΔΕ τῆς ΕΓ· τὰ Γ Δ ἄρα σημεῖα οὐκ ἴσον ἀπέχουσι τῆς διχοτομίας· καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ, ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΕΒ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΕ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΓ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· ὥστε καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἔλαττόν ἐστι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ μεῖζόν ἐστι τοῦ συγκειμένου ἐκ τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ.

30.

Ad Lib. X. prop. 48.

post definitiones alteras.

Σχόλιον.

Ἕξ οὖν οὐσῶν τῶν οὕτως καταλαμβανομένων εὐθειῶν, τάττει πρώτας τῇ τάξει τρεῖς, ἐφ' ὧν ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ· δευτέρας δὲ τῇ τάξει τὰς λοιπὰς τρεῖς, ἐφ' ὧν δύναται τῷ ἀπὸ ἀσυμμέτρου, διὰ τὸ προτερεῖν τὸ σύμμετρον τοῦ ἀσυμμέτρου· καὶ ἔτι πρώτην μὲν, ἐφ' ἧς τὸ μεῖζον ὄνομα σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· δευτέραν δὲ, ἐφ' ἧς τὸ ἔλαττον· διὰ τὸ πάλιν προτερεῖν τὸ μεῖζον τοῦ ἐλάττονος τῷ ἐμπεριέχειν τὸ ἔλασσον· τρίτην δὲ, ἐφ' ὧν μηδέτερον τῶν ὀνομάτων σύμμετρόν ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ· καὶ ἐπὶ τῶν ἑξῆς τριῶν ὁμοίως, τὴν πρώτην τῆς εἰρημένης δευτέρας τάξεως τετάρτην καλῶν, καὶ τὴν δευτέραν πέμπτην, καὶ τὴν τρίτην ἕκτην

31.

Ad Lib. X. prop. 71.

Σχόλιον. (ed. Bas.)

Ἑπτά εἰσιν ἑξάδες ἄχρι τῶν ἐνταῦθα εἰρημένων, ὧν ἐν μὲν τῇ πρώτῃ ἐδείκνυε τὴν γένεσιν αὐτῶν, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὴν διαίρεσιν, ὅτι καθ᾽ ἓν μόνον σημεῖον διαιροῦνται, ἐν δὲ τῇ τρίτῃ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων εὕρεσιν, πρώτης, δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, πέμπτης, ἕκτης, ἀφ᾽ ἧς ἐν τῇ τετάρτῃ ἑξάδι τὴν διαφορὰν ἐπεδείκνυε τῶν ἀλόγων, πῇ διαφέρουσι· προςχρώμενος γὰρ τῇ ἐκ δύο ὀνομάτων ἀποδείκνυσι τὴν διαφορὰν τῶν ἓξ ἀλόγων. Πέμπτην καὶ ἕκτην ἐξέθετο, δεικνύων ἐν μὲν τῇ πέμπτῃ τὰς παραβολὰς τὰς ἀπὸ τῶν ἀλόγων ποίας ἀλόγους ποιοῦσι τὰ πλάτη τῶν παραβαλλομένων χωρίων· ἐν δὲ τῇ ἕκτῃ, πῶς αἱ σύμμετροι ταῖς ἀλόγοις ὁμοειδεῖς αὐταῖς εἰσί. Πάλιν ἐν τῇ ἑβδόμῃ σαφῶς διαφορὰν αὐτῶν ἡμῖν δείκνυσιν.

Ἀναφαίνεται δὲ καὶ ἐπὶ τῶν ἀλόγων τούτων ἡ ἀριθμητικὴ ἀναλογία· καὶ ἡ μέση λαμβανομένη ἀνάλογον τῶν τμημάτων οἱαςδήποτε ἀλόγου κατὰ τὴν ἀριθμητικὴν ἀναλογίαν. καὶ αὐτὴ ὁμοειδής ἐστιν, ὧν ἐστι μέση ἀνάλογον· καὶ πρῶτον ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ μεσότης ἐν τούτοις ἐστί.

Κείσθω γὰρ ἐκ δύο ὀνομάτων, εἰ τύχοι, ἡ ΑΒ καὶ διῃρήσθω εἰς τὰ ὀνόματα κατὰ τὸ Γ, φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ ἐστὶ μείζων. Ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Ε, φανερὸν ὅτι ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ ἐστὶν ἴση. Κείσθω ὁποτέρᾳ αὐτῶν ἴση ἡ ΖΗ· φανερὸν δὴ ὅτι ᾧ διαφέρει ἡ ΑΓ τῆς ΖΗ, τούτῳ διαφέρει καὶ ἡ ΕΒ τῆς ΓΒ. Ἡ μὲν γὰρ ΑΓ τῆς ΖΗ τῇ ΓΕ, τῷ αὐτῷ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῆς ΓΒ· ὅπερ ἐστὶν ἀριθμητικῆς ἀναλογίας. Δῆλον δὲ ὅτι ἡ ΖΗ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ· τῇ γὰρ ἡμισείᾳ αὐτῆς ἐστιν ἴση· ὥςτε ἐκ δύο ὀνομάτων ἐστίν. Ὁμοίως δειχθήσεται καὶ ἐπὶ τῶν ἄλλων.

32.

Ad Lib. X. prop. 73.

Πόρισμα.

Ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων καὶ αἱ μετ᾽ αὐτὴν ἄλογοι οὔτε τῇ μέσῃ οὔτε ἀλλήλαις εἰσὶν αἱ αὐταί· τὸ μὲν γὰρ ἀπὸ μέσης παρὰ ῥητὴν

παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ῥητὴν καὶ ἀσύμμετρον τῇ παρ' ἣν παράκειται μήκει. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο ὀνομάτων παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων πρώτης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων δευτέραν. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ἐκ δύο μέσων δευτέρας παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τρίτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς μείζονος παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων τετάρτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων πέμπτην. Τὸ δὲ ἀπὸ τῆς δύο μέσα δυναμένης παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ἐκ δύο ὀνομάτων ἕκτην. Τὰ δὲ εἰρημένα πλάτη διαφέρει τοῦ τε πρώτου καὶ ἀλλήλων, τοῦ μὲν πρώτου ὅτι ῥητή ἐστιν, ἀλλήλων δὲ ὅτι τῇ τάξει οὐκ εἰσὶν αἱ αὐταί, ὥστε καὶ αὐταὶ αἱ ἄλογοι διαφέρουσιν ἀλλήλων.

In ceteris editionibus hic insertum est illud scholium, quod supra ex editione Bas. ad prop. 71. attulimus

33.

Ad Lib. X. prop. 91.

Σχόλιον.

Ἔστι δὲ καὶ συντομώτερον δεῖξαι τὴν εὕρεσιν τῶν εἰρημένων ἓξ ἀποτομῶν. Καὶ δὴ ἔστω εὑρεῖν τὴν πρώτην. Ἐκκείσθω ἡ ἐκ δύο ὀνομάτων πρώτη ἡ ΑΓ, ἧς μεῖζον ὄνομα ἡ ΑΒ, καὶ τῇ ΒΓ ἴση κείσθω ἡ ΒΔ· αἱ ΑΒ ΒΓ ἄρα, τοῦτ' ἔστιν αἱ ΑΒ ΒΔ, ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· καὶ ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ, τοῦτ' ἔστι τῆς ΒΔ, μεῖζον δύναται τῷ ἀπὸ συμμέτρου ἑαυτῇ. Καὶ ἡ ΑΒ σύμμετρός ἐστι τῇ ἐκκειμένῃ ῥητῇ μήκει· ἀποτομὴ ἄρα πρώτη ἐστὶν ἡ ΑΔ. Ὁμοίως δὴ καὶ τὰς λοιπὰς ἀποτομὰς εὑρήσομεν, ἐκθέμενοι τὰς ἰσαρίθμους ἐκ δύο ὀνομάτων.

34.

Ad Lib. X. prop. 106.

Ἄλλως.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α, καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλλάσσων ἐστίν.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ ΓΔ ῥητή, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ τετάρτη ἡ ΓΖ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον ἐστὶ τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον ἐστὶ τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ. Ὡς δὲ τὸ ΓΕ πρὸς τὸ ΖΗ, οὕτως ἐστὶν ἡ ΓΖ πρὸς τὴν ΖΘ· σύμμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Ἀποτομὴ δέ ἐστι τετάρτη ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΖΘ τετάρτη· τὸ ΖΗ ἄρα περιέχεται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς τετάρτης· ἡ τὸ χωρίον δυναμένη ἐλάσσων ἐστί. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἐλάττων ἄρα ἐστὶν ἡ Β. ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

35.

Ad Lib. X. prop. 107.

Ἄλλως.

Ἔστω μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, σύμμετρος δὲ αὐτῇ ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἐκκείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ, καὶ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον παρὰ τὴν ΓΔ παραβεβλήσθω τὸ ΓΕ πλάτος ποιοῦν τὴν ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη ἡ ΓΖ. Τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον παρὰ τὴν ΖΕ παραβεβλήσθω τὸ ΖΗ πλάτος ποιοῦν τὴν ΖΘ. Ἐπεὶ οὖν σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β, σύμμετρόν ἐστι καὶ τὸ ἀπὸ τῆς Α τῷ ἀπὸ τῆς Β. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς Α ἴσον τὸ ΓΕ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς Β ἴσον τὸ ΖΗ· σύμμετρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΕ τῷ ΖΗ· σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΓΖ τῇ ΖΘ μήκει. Ἀποτομὴ δὲ πέμπτη ἐστὶν ἡ ΓΖ· ἀποτομὴ ἄρα ἐστὶ πέμπτη καὶ ἡ ΖΘ, ῥητὴ δὲ ἡ ΖΕ. Ἐὰν δὲ χωρίον περιέχηται ὑπὸ ῥητῆς καὶ ἀποτομῆς πέμπτης, ἡ τὸ χωρίον δυναμένη μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστι. Δύναται δὲ τὸ ΖΗ ἡ Β· ἡ Β ἄρα μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

36.

Ad Lib. X. prop. 116.

Ἄλλως.

Ἔστω μέση ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἀπὸ τῆς ΑΓ ἄπειροι ἄλογοι γίνονται, καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ πρότερόν ἐστιν ἡ αὐτή.

Ἤχθω τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΒ, καὶ ἔστω ῥητὴ ἡ ΑΒ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΒΓ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΒΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΓΔ· ἄλογος ἄρα ἡ ΓΔ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ μέσην. Πάλιν, συμπεπληρώσθω τὸ ΕΔ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστι. Δυνάσθω αὐτὸ ἡ ΔΖ· ἄλογός ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΖ, καὶ οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή· τὸ γὰρ ἀπ' οὐδεμιᾶς τῶν πρότερον παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ τὴν ΓΔ.

Ἀπὸ τῆς μέσης ἄρα, καὶ τὰ ἑξῆς.

37.

Ad finem libri decimi.

In editione Basileensi additur.

Πρότασις ρις'.

Ἡ τῇ ἐλάσσονι σύμμετρος ἐλάσσων ἐστίν.

Ἔστω ἐλάσσων ἡ Α καὶ τῇ Α σύμμετρος ἔστω ἡ Β· λέγω ὅτι ἡ Β ἐλάσσων ἐστίν. etc. **conferatur. 34. pag. 294.**

38.

Ad finem libri decimi.

In editione Basileensi hoc theorema additur:

Πρότασις ριζ'.

Ἡ τῇ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιούσῃ σύμμετρος μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσά ἐστιν.

Ἔστω ἡ μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα ἡ Α, etc. conf. 35. pag. 294.

39.

Ad finem libri decimi.

In omnibus editionibus haec ultima legitur totius libri propositio:

Πρότασις ριη΄. (Bas.) ριθ΄. (Ox.)

Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι, ὅτι ἐπὶ τῶν τετραγώνων σχημάτων ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ διάμετρος τῇ πλευρᾷ μήκει.

Ἔστω τετράγωνον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ· λέγω ὅτι ἡ ΑΓ ἀσύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει.

Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· λέγω ὅτι συμβήσεται τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν· φανερὸν μὲν οὖν ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Καὶ ἐπεὶ σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ, ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν ΑΒ λόγον ἔχει ὃν ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμόν. Ἐχέτω ὃν ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν οἱ ΕΖ, Η ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ. Εἰ γὰρ ἔσται μονὰς ὁ ΕΖ, ἔχει δὲ λόγον πρὸς τὸν Η ὃν ἔχει ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΑΒ, καὶ μείζων ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΕΖ μονὰς τοῦ Η ἀριθμοῦ, ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ ΕΖ· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΒ· διπλασίων ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιός ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ αὐτὸς ὁ ΕΖ ἄρτιός ἐστιν. Εἰ γὰρ ἦν περισσὸς, καὶ ὁ ἀπ᾽ αὐτοῦ τετράγωνος περισσὸς ἂν ἦν, ἐπειδήπερ ἐὰν περισσοὶ ἀριθμοὶ ὁποσοιοῦν συντεθῶσι, τὸ δὲ πλῆθος αὐτῶν περισσὸν ᾖ, ὅλος περισσός ἐστιν· ὁ ΕΖ ἄρα ἄρτιός ἐστι. Τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Θ. Καὶ ἐπεὶ οἱ ΕΖ, Η ἀριθμοὶ ἐλάχιστοί εἰσι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς, πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Καὶ ἔστιν ὁ ΕΖ ἄρτιος· περισσὸς ἄρα ἐστὶν ὁ Η. Εἰ γὰρ ἦν ἄρτιος, τοὺς ΕΖ, Η δυὰς ἂν ἐμέτρει, (πᾶς γὰρ ἄρτιος ἔχει μέρος ἥμισυ,) πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἄρτιός ἐστιν ὁ Η· περισσὸς ἄρα. Καὶ ἐπεὶ διπλάσιων ἐστὶν ὁ ΕΖ τοῦ ΕΘ, τετραπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· διπλάσιος δὲ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η· διπλάσιος ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ Η τοῦ ἀπὸ τοῦ ΕΘ· ἄρτιος ἄρα ἐστὶν ὁ ἀπὸ τοῦ Η· ἄρτιος ἄρα διὰ τὰ εἰρημένα ὁ Η. Ἀλλὰ καὶ περισσὸς, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἄλλως.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως, ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ τοῦ τετραγώνου διάμετρος τῇ πλευρᾷ.

Ἔστω ἀντὶ μὲν τῆς διαμέτρου ἡ Α, ἀντὶ δὲ τῆς πλευρᾶς ἡ Β· λέγω ὅτι ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω σύμμετρος· καὶ γογονέτω πάλιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ ἀριθμὸς πρὸς τὸν Η, καὶ ἔστωσαν ἐλάχιστοι τῶν τὸν αὐτὸν λόγον ἐχόντων αὐτοῖς οἱ ΕΖ, Η· οἱ ΕΖ, Η ἄρα πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Λέγω πρῶτον ὅτι ὁ Η οὐκ ἔστι μονάς. Εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω μονάς. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως ὁ ΕΖ πρὸς τὸν Η· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η. Διπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Α τοῦ ἀπὸ τῆς Β· διπλάσιος ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τοῦ ἀπὸ τοῦ Η. Καὶ ἔστι μονὰς ὁ Η. δυὰς ἄρα ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ τετράγωνος, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα μονάς ἐστιν ὁ Η· ἀριθμὸς ἄρα. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Α πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Β, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ ΕΖ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ Η, καὶ ἀνάπαλιν ὡς τὸ ἀπὸ τῆς Β πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Α, οὕτως ὁ ἀπὸ τοῦ Η πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ. Μετρεῖ δὲ τὸ ἀπὸ τῆς Β τὸ ἀπὸ τῆς Α· μετρεῖ ἄρα καὶ ὁ ἀπὸ τοῦ Η τετράγωνος τὸν ἀπὸ τοῦ ΕΖ· ὥστε καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ ὁ Η τὸν ΕΖ μετρεῖ. Μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν ὁ Η· ὁ Η ἄρα τοὺς ΕΖ, Η μετρεῖ, πρώτους ὄντας ἀλλήλοις, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα σύμμετρός ἐστιν ἡ Α τῇ Β μήκει· ἀσύμμετρος ἄρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

40.

Ad finem libri decimi.

Hoc ultimum scholium in omnibus editionibus adjunctum est.

Σχόλιον.

Εὑρημένων δὴ τῶν μήκει ἀσυμμέτρων εὐθειῶν, ὡς τῶν Α, Β, εὑρίσκεται καὶ ἄλλα πλεῖστα μεγέθη ἐκ δύο διαστάσεων, λέγω δὴ ἐπίπεδα ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ἐὰν γὰρ τῶν Α, Β εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον λάβωμεν τὴν Γ, ἔσται ὡς ἡ Α πρὸς τὴν Β, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς Α εἶδος πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς Γ, τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγραφό-

μενον, εἴτε τετράγωνα εἴη τὰ ἀναγεγραμμένα, εἴτε ἕτερα εὐθύγραμμα ὅμοια, εἴτε καὶ κύκλοι περὶ διαμέτρους τὰς Α, Γ, ἐπείπερ οἱ κύκλοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ὡς τὰ ἀπὸ τῶν διαμέτρων τετράγωνα· εὕρηνται ἄρα καὶ ἐπίπεδα χωρία ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Δεδειγμένων δὲ καὶ τῶν ἐκ δύο διαστάσεων διαφόρων ἀσυμμέτρων χωρίων, δείξομεν τοῖς ἀπὸ τῆς τῶν στερεῶν θεωρίας, ὡς ἔστι καὶ στερεὰ σύμμετρά τε καὶ ἀσύμμετρα ἀλλήλοις. Ἐὰν γὰρ ἐπὶ τῶν ἀπὸ τῶν Α, Β τετραγώνων, ἢ τῶν ἴσων αὐτοῖς εὐθυγράμμων, ἀναστήσωμεν ἰσοϋψῆ στερεά, παραλληλεπίπεδα, ἢ πυραμίδας, ἢ πρίσματα, ἔσται τὰ ἀνασταθέντα πρὸς ἄλληλα ὡς αἱ βάσεις. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν αἱ βάσεις, σύμμετρα ἔσται καὶ τὰ στερεά· εἰ δὲ ἀσυμμέτροι, ἀσύμμετρα. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Ἀλλὰ μὴν καὶ δύο κύκλων ὄντων τῶν Α, Β, ἐὰν ἀπ' αὐτῶν ἰσοϋψεῖς κώνους, ἢ κυλίνδρους ἀναγράψωμεν, ἔσονται πρὸς ἀλλήλους ὡς αἱ βάσεις, τοῦτ' ἔστιν ὡς οἱ Α, Β κύκλοι. Καὶ εἰ μὲν σύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, σύμμετροι ἔσονται καὶ οἵτε κῶνοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ κυλινδροι· εἰ δὲ ἀσύμμετροί εἰσιν οἱ κύκλοι, ἀσύμμετροι ἔσονται καὶ οἱ κῶνοι καὶ οἱ κύλινδροι. Καὶ φανερὸν ἡμῖν γέγωνεν ὅτι οὐ μόνον ἐπί τε γραμμῶν καὶ ἐπιφανειῶν ἐστὶ συμμετρία καὶ ἀσυμμετρία, ἀλλὰ καὶ ἐπὶ τῶν στερεῶν σχημάτων.

41.

Ad libr. XI. prop. 23.

Ἄλλως.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς γωνίαι ἐπίπεδοι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, περιεχέτωσαν δὲ αὐτὰς ἴσαι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι, τοῦτ' ἔστι πάλιν ὅτι αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι. Εἰ μὲν οὖν πάλιν αἱ πρὸς τοῖς Β Ε Θ σημείοις γωνίαι ἴσαι εἰσὶν, ἴσαι ἔσονται καὶ αἱ ΑΓ ΔΖ ΗΚ, καὶ ἔσονται αἱ δύο

τῆς λοιπῆς μείζονες. Εἰ δὲ οὔ, ἔστωσαν ἄνισοι αἱ πρὸς τοῖς Β Ε Θ σημείοις γωνίαι, καὶ μείζων ἡ πρὸς τῷ Β ἑκατέρας τῶν πρὸς τοῖς Ε Θ· μείζων ἄρα ἔσται καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἑκατέρας τῶν ΔΖ ΗΚ. Καὶ φανερὸν ὅτι ἡ ΑΓ μεθ᾽ ἑκατέρας τῶν ΔΖ ΗΚ τῆς λοιπῆς μείζων ἐστί. Λέγω ὅτι καὶ αἱ ΔΖ ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι. Συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΒ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β τῇ ὑπὸ ΗΘΚ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΒΛ, καὶ κείσθω μιᾷ τῶν ΑΒ ΒΓ ΔΕ ΕΖ ΗΘ ΘΚ ἴση ἡ ΒΛ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΛ, ΛΓ. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΑΒ, ΒΛ δυσὶ ταῖς ΗΘ ΘΚ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι· βάσις ἄρα ἡ ΑΛ βάσει τῇ ΗΚ ἴση ἐστί. Καὶ ἐπεὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε Θ σημείοις γωνίαι τῆς ὑπὸ ΑΒΓ μείζονές εἰσιν, ὧν ἡ ὑπὸ ΗΘΚ τῇ ὑπὸ ΑΒΛ ἐστὶν ἴση· λοιπὴ ἄρα ἡ πρὸς τῷ Ε γωνία τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί. Καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΛΒ ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΕΖ γωνίας τῆς ὑπὸ ΛΒΓ μείζων ἐστί· βάσις ἄρα ἡ ΔΖ βάσεως τῆς ΛΓ μείζων ἐστίν. Ἴση δὲ ἐδείχθη ἡ ΗΚ τῇ ΑΛ· αἱ ἄρα ΔΖ ΗΚ τῶν ΑΛ ΛΓ μείζονές εἰσιν· Ἀλλὰ αἱ ΑΛ ΛΓ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι· πολλῷ ἄρα αἱ ΔΖ ΗΚ τῆς ΑΓ μείζονές εἰσι. Τῶν ΑΓ ΔΖ ΗΚ ἄρα εὐθειῶν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῶν ἴσων ταῖς ΑΓ ΔΖ ΗΚ τρίγωνον συστήσασθαι. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

42.

Ad. Libr. XI. prop. 23.

Λῆμμα.

Ὃν δὲ τρόπον ᾧ μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΛΞ ἐκείνῳ ἴσον λαβεῖν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΞΡ, δείξομεν οὕτως.

Ἐκκείσθωσαν αἱ ΑΒ ΛΞ εὐθεῖαι, καὶ ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ γεγράφθω ἐπ᾽ αὐτῆς ἡμικύκλιον τὸ ΑΒΓ, καὶ εἰς τὸ ΑΒΓ ἡμικύκλιον ἐνηρμόσθω τῇ ΛΞ μὴ μείζονι οὔσῃ τῆς ΑΒ διαμέτρου ἴση εὐθεῖα ἡ ΑΓ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἐν ἡμικυκλίῳ τῷ ΑΒΓ γωνία ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΞ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΞ μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ. Ἐὰν οὖν τῇ ΒΓ ἴσην τὴν ΞΡ ἀπολάβωμεν, ἔσται τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΑ μεῖζον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΡ. Ὅπερ προέκειτο ποιῆσαι.

43.

Ad. Libr. XII. 4.

(Pro iis quae sequuntur inde a vocabulo *Καὶ* [pag. 207. lin. 12] haecce leguntur in cod. Vat. et aliis quibusdam).

Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρίσμα, οὗ βάσις μὲν τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα οὗ τε βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγραμμον, ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΛΞΓ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὰ πρίσματα οὗτε βασις μὲν τὸ ΠΕΦΡ, ἀπεναντιον δὲ ἡ ΣΤ εὐθεῖα, καὶ οὗ βάσις μὲν τὸ ΡΦΖ τρίγωνον, ἀπεναντίον δὲ τὸ ΣΤΥ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα. Καὶ ὁμοίως ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΗ ΣΤΥΘ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΟΜΝΗ πυραμίδι δύο πρίσματα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΣΤΥΘ πυραμίδι δύο πρίσματα. Ἀλλ' ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις πρὸς τὴν ΣΤΥ βάσιν, οὕτως ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, ἴσον γὰρ ἑκάτερον τῶν ΟΜΝ ΣΤΥ τριγώνων ἑκατέρῳ τῶν ΛΞΓ ΡΦΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις προς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμίδας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα

πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖΘ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

44.

Ad Lib. XII. prop. 6.

Pro ea, quam recepimus, demonstratione Ἐπεζεύχθωσαν etc. (p. 211. lin. 19) usque ad πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πύραμίδα (l. 28.) hanc offerunt editiones Oxonia et Basileensis.

Διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΕ τρίγωνα· ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ ΖΘΚ ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΒΓΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα, καὶ συνθέντι ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΒΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΓΔΜ πυραμίδα. Ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, οὕτως ἡ ΑΓΔΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΔΕΜ πυραμίδα.

45.

Ad Lib. XII. prop. 17.

Ἄλλως.

Δεικτέον δὴ καὶ ἑτέρως προχειρότερον, ὅτι μείζων ἐστὶν ἡ ΑΨ τῆς ΑΗ. Ἤχθω ἀπὸ τοῦ Η τῇ ΑΗ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΗΩ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΩ. Τέμνοντες δὴ τὴν ΕΒ περιφέρειαν δίχα, καὶ τὴν ἡμίσειαν αὐτῆς δίχα, καὶ τοῦτο ἀεὶ ποιοῦντες, καταλείψομέν τινα περιφέρειαν, ἥ ἐστιν ἐλάσσων τῆς ὑποτεινομένης τοῦ ΒΓΔΕ κύκλου περιφέρειας, ὑπὸ τῆς ἴσης τῇ ΗΩ. Λελείφθω, καὶ ἔστω ἡ ΚΒ περιφέρεια· ἐλάσσων ἄρα καὶ ἡ ΚΒ εὐθεῖα τῆς ΗΩ. Καὶ ἐπεὶ ἐν κύκλῳ ἐστὶ τὸ ΒΚΣΟ τετράπλευρον, καὶ εἰσιν ἴσαι αἱ ΟΒ ΒΚ

ΚΣ, καὶ ἐλάσσων ἡ ΟΣ· ἀμβλεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΨΟ γωνία, μείζων ἄρα ἡ ΒΟ τῆς ΒΨ. Ἀλλὰ τῆς ΒΟ μείζων ἐστὶν ἡ ΠΩ· πολλῷ ἄρα ἡ ΠΩ μείζων ἐστὶ τῆς ΒΨ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΠΩ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΨ. Καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΩ τῇ ΑΒ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΩ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ τῆς ΑΩ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΑΠ ΠΩ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσα τὰ ἀπὸ τῶν ΒΨ ΨΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΠ ΠΩ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΨ, ΨΑ, ὧν τὸ ἀπὸ τῆς ΒΨ ἔλασσόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΠΩ· λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΨΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΠ· μείζων ἄρα ἡ ΑΨ τῆς ΑΠ.

46.

Ad Lib. XIII. prop. 5.

Ἄλλως.

Ἐὰν εὐθεῖα γραμμὴ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τμηθῇ, ἔσται ὡς συναμφότερος ἡ ὅλη καὶ τὸ μεῖζον τμῆμα πρὸς τὴν ὅλην, οὕτως ἡ ὅλη πρὸς τὸ μεῖζον τμῆμα.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ· καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ.

Κείσθω γὰρ τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ μεῖζον τμῆμά ἐστι τὸ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· ἀνάπαλιν ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ· συνθέντι ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἴση δὲ ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς συναμφότερος ἡ ΒΑ ΑΓ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Καὶ ἐπεὶ δέδεικται ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἡ ΔΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον

τέτμηται κατὰ τὸ Δ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ἐξ ἀρχῆς εὐθεῖα ἡ ΔΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

4.

Ad Lib. XIII. prop. 1 — 5.

Quod sequitur scholium de analysi et synthesi, conjunctum quinto theorematι additum est in Cod. Vat. At in edd. Ox. et Bas. ad singula theoremata singulae ejus partes adjectae sunt.

Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις.

Τί ἐστιν ἀναλυσις καὶ τί ἐστι σύνθεσις;

Ἀνάλυσις μὲν οὖν ἐστὶ λῆψις τοῦ ζητουμένου ὡς ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον.

Σύνθεσις δὲ λῆψις τοῦ ὁμολογουμένου διὰ τῶν ἀκολούθων ἐπὶ τὴν τοῦ ζητουμένου κατάληξιν ἢ κατάληψιν.

Τοῦ πρώτου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις ἀνεὺ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ἡμισείᾳ τῆς ΑΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΓΑ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τῷ μὲν δὶς ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΔ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, διπλῆ γὰρ ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετρα-

πλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἐστι· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἔστι δὲ, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ὑπὸ τῆς ΒΑ, τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ, ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· ὥστε τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Τὰ δὲ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ ἐστί· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ δευτέρου θεορήματος ἡ ἀνάλυσις ἄνευ καταγραφῆς.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΓΔ τμήματος ἑαυτῆς τοῦ ΔΑ πενταπλάσιον δυνάσθω, τῆς δὲ ΔΑ διπλῆ κείσθω ἡ ΑΒ· λέγω ὅτι ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ, ἥτις ἐστὶ τὸ λοιπὸν μέρος τῆς ἐξ ἀρχῆς εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ἐστὶ δὲ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ ἴσον, διπλῆ γάρ ἐστιν ἡ ΒΑ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Τετραπλάσιον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· τετραπλάσιον ἄρα καὶ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ὥςτε καὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ, πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ. Ἔστι δέ.

Συν-

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΔ τὰ ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ πενταπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΔ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΔΑ ΑΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τοῦ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Μείζων δὲ ἡ ΒΑ τῆς ΑΓ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΑΓ τῆς ΓΒ· ἡ ΑΒ ἄρα ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τρίτου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῆς ΑΓ ἡμίσεια ἡ ΓΔ· λέγω ὅτι πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ πενταπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· διελόντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Τῷ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΑΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΔ. Ἔστι δὲ, διπλῆ γὰρ ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ διπλῆ ἐστιν ἡ ΑΓ τῆς ΓΔ, τετραπλάσιόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ

τῶν ΑΒ ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ· συνθέντι ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ὅπερ ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΒ, πενταπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Τοῦ τετάρτου θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γὰρ γραμμὴ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα τὸ ΑΓ· λέγω ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Ἐπεὶ γὰρ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ, ἀλλὰ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· διελόντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ὥστε τὸ ἅπαξ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Ἔστι δέ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστι μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ· τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· συνθέντι ἄρα τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τριπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ· ἀλλὰ τὸ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἐστὶ τετράγωνα· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΓ.

Τοῦ πεμπτοῦ θεωρήματος ἡ ἀνάλυσις.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἔστω μεῖζον τμῆμα ἡ ΑΓ, καὶ τῇ ΑΓ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ· λέγω ὅτι ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΒΑ.

Ἐπεὶ γὰρ ἡ ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα

ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ· ἀναστρέψαντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ· διελόντι ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΔ τῇ ΑΓ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἔστι δέ, ἡ γὰρ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ.

Σύνθεσις.

Ἐπεὶ οὖν ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Γ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΒ· συνθέντι ἄρα ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΒΓ· ἀναστρέψαντί τε ὡς ἡ ΒΔ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἴση δὲ ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΑ, οὕτως ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ· ἡ ἄρα ΔΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τέτμηται κατὰ τὸ Α, καὶ τὸ μεῖζον τμῆμά ἐστιν ἡ ΑΒ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

48.

Ad. Libr. XIII. prop. 13.

Λῆμμα.

Δεικτέον ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ.

Ἐκκείσθω γὰρ ἡ τοῦ ἡμικυκλίου καταγραφὴ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ ἀναγεγράφθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον τὸ ΕΓ, καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΖΒ παραλληλόγραμμον. Ἐπεὶ οὖν διὰ τὸ ἰσογώνιον εἶναι τὸ ΔΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΑΓ τριγώνῳ, ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς τὴν ΑΔ, οὕτως ἡ ΔΑ πρὸς τὴν ΑΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΕΒ πρὸς τὸ ΒΖ, καὶ ἔστι τὸ μὲν ΕΒ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ, ἴση γάρ ἐστιν ἡ ΕΑ τῇ ΑΓ, τὸ δὲ ΒΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ. Καὶ ἔστι τὸ μὲν ὑπὸ τῶν ΒΑ ΑΓ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΔ, τὸ δὲ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΓ, ἡ γὰρ ΔΓ κάθετος τῶν τῆς βάσεως τμημάτων τῶν ΑΓ ΓΒ μέση ἀνάλογόν ἐστι, διὰ τὸ ὀρθὴν εἶναι τὴν ὑπὸ ΑΔΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Appendix VI.

Lectionum Varietas.

A, Tomi primi.

V. sive **Vat.** significat Codicem Vaticanum a Peyrardo collatum.
B. sive **Bas.** editionem Basileensem, O. sive **Ox.** Oxoniensem, P. sive Par. Parisiensem Peyrardi.
praeterea **ab.** = abest, **abs.** = absunt.

Paginarum numerus in margine, linearum in contextu indicatur.

Ὅροι Definitiones.

ά. 1. *οὐθέν* haec vocis forma (Plutarch. Lyc. 6.) in om- p. 1.
nibus exstat exemplaribus Elementorum. — *ή* 8. lin. 2. *ἐπ'*
εὐθείας sic rescripsi pro vulgato *ἐπ' εὐθείαις* et Proclo auctore,
et secundum postulatum respiciens. Sunt, qui in sequentibus
aut *τῶν γραμμῶν* abjici aut articulum *ἡ* post *κειμένων* scribi
jubeant. — *θ'*. 9. Verborum ordinem ex Proclo recepi.
Editiones Basileensis, Oxoniensis et Cod. Vindebonensis habent:
αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαί. Parisiensis cum Cod. Vaticano
αἱ περὶ τὴν εἰρημένην γωνίαν γραμμαί. — *ί.* 10. lin. 2. Sic
scripsi cum ed. P. et Cod. V. et Proclo. Invertunt verborum ordinem
ceterae edd. *ὀρθὴ ἐστιν ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν.* — Lin. 3. In
cod. Vindeb. ab. *ἐστι* et pro *εὐθεῖα* legitur *γραμμή.* — *ιδ'*. 14.
Male se habet in ceteris edd. commatis signum *ἐστι, τό.* Proclus
articulum *τὸ* omisit. — *ιέ.* 15. lin. 4. Peyrardus ex cod. V. sep- p. 2.
temque aliis scripsit *αἱ προςπίπτουσαι πρὸς τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν,*
quod recte reprehenderunt Delambre et Prony in epistola
editioni P. praefixa. Ejecit haec Verba Camererus probante viro
eruditissimo, Neydianae operae non indocto aestimatore. Verba
πρὸς τὴν etc. desunt in omnibus prioribus edd. et apud Procl., qui

etiam non habet ea verba, quae supra leguntur ἡ καλεῖται περιφέρεια (definitio in definitione?) quare de his quoque dubitari potest, num ab Euclide sint adjecta, praesertim cum περιφέρεια in sequentibus (ex. gr. VII. 11, 12.) significet promiscue et totam circumferentiam et partem ejus, nonnunquam etiam κύκλος pro περιφέρεια legatur. (cf. demonstrationem I, 1.) — ιθ'. 19. Hanc definitionem ex Proclo recipiendam esse putavi pro illa, quam omnes libri tueri videntur: Τμῆμα κύκλου etc. quae iisdem verbis circumscripta initio libri sexti iterum legitur, cui tamen, ut ne nihil intersit, Codex V. septemque alii, quos Peyrardus est secutus, haec addiderunt: ἢ μείζονος ἢ ἐλάσσονος ἡμικυκλίου. — At Proclus nostram certe in suis manuscriptis reperit definitionem. Exhibitis enim verbis ipsis, explicandi causa haec addidit: Καὶ μὲν δὴ ὅτι τὸ αὐτὸ τοῦ ἡμικυκλίου κέντρον ἐστὶν ὅπερ καὶ τοῦ κύκλου, φανερόν, ἡ γὰρ διάμετρος ἐφ' ἑαυτῆς ἔχουσα τὸ κέντρον συμπληροῖ τὸ ἡμικύκλιον καὶ ἀπὸ τούτου πᾶσαι αἱ πρὸς τὴν περιφέρειαν ἴσαι προσπίπτουσιν ἀπὸ τοῦ κέντρου. Ἓν ἄρα τὸ κέντρον ἐστὶ τοῦ ἡμικυκλίου καὶ τοῦ κύκλου. Καὶ ἐπισημαντέον ὅτι μόνον τοῦτο τῶν σχημάτων ἐπὶ τὴν περίμετρον τὸ κέντρον ἔχει, λέγω δὲ τῶν ἐπιπέδων σχημάτων ὥστε συνάγοις ἂν ὅτι τὸ κέντρον τρεῖς ἔχει τόπους (male. B. τρόπους), ἢ γὰρ ἐντὸς τοῦ σχήματος ὥσπερ ἐπὶ τοῦ κύκλου ἢ ἐπὶ τῆς περιμέτρου ὡς ἐπὶ τοῦ ἡμικυκλίου ἢ ἐκτὸς ὡς ἐπὶ τῶν κωνικῶν γραμμῶν (et in minori segmento, adnotante Savilio). Praemisit Euclides initio definitiones non omnes sed eas tantum, quibus ad ea, quae in prioribus duobus libris demonstrantur, uti voluit. Nulla plane mentio facta est in his libris de segmento circuli, sed semicirculus centrumque ejus nota ut sint, problematis ultimi in secundo libro et solutio et argumentatio postulare mihi videntur. Quare Theonis haec esse videtur Euclidearum definitionum permutatio, cujus Elementorum recensio Proclo non satis cognita fuisse videtur. Conf. Append. IV. pag. 304. 305. — κ'. 20. Εὐθύγρ. σχημ. invertunt. Cod. V., ed. B. Vocem γραμμῶν omittit ed. B. — κδ'. 24. lin. 2. B. et O. omittunt articulum τὰς, male, cum tria tantum sint latera trianguli. Rectius omittitur in definitione 25, id quod facere non dubitavi vel contra librorum auctoritatem. — κς'. 26. ἀνίσας. B. O. — κζ'. 27. Ἔτι τὲ (sic) B., in quo vitium typographi patet, quod male emendasse videtur Gregory

scribendo Ἔτι δὲ, repugnantibus codicibus et Proclo. — Lin. 2. μίαν ex Proclo recepi. — κθ'. 29. Articulus τὰς omittitur in edd. O. et B. (cf. def. 24.) — λε'. 35. Παράλλ. εὐθ. εἰσ. sic scripsi secundum Proclum rectius. Ceterae editiones invertunt: Παρ. εἰσ. εὐθ. — Lin. 2. ἐπ' ἄπειρον. B. O. p. 3.

Postulata. Αἰτήματα (πέντε addit. Cod. Vindeb.)

α'. 1. Αἰτήσθω. Cod. Vind. pro Ἠιτήσθω. — β'. 2. lin. 2. Vulgo ἐκβάλλειν. Nos Proclum secuti sumus. Aoristi infinitivorum vim in postulatis et problematis ignorant, qui lectionem vulgatam praeferunt. — γ'. 3. Vulgo γράφεσθαι. Nos eadem de causa Proclum secuti sumus. — δ'. 4. Hoc postulatum in edd. B. et O. locum decimum inter communes notiones retinet, hisque verbis expressum est. Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Eaedem editiones subsequens postulatum, inter locos communes receperunt (undecimo loco) Καὶ πᾶσαι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί. Nihilo minus Gregorius in margine adscripsit: „In quibusdam codicibus Axiomata X et XI. inter postulata numerantur.“ Cum vero hoc in omnibus, quos Peyrardus inspexit, codicibus factum esse videamus, cumque ipse Proclus, quamquam invitus, codicem suum secutus, ut paulo post videbimus, eundem ei tribuerit locum, non dubium est, quin Parisiensem editionem secuti, quod etiam Camererum fecisse videmus, debitum illi axiomati vindicaverimus locum. — ε'. 5. εὐθεῖά τις. ed. P. ex Cod. V., qui tamen initio propositionis 28. hunc articulum non habet. — Lin. 4. ἀλλήλαις post συμπίπτειν cum Proclo omisi, praepositione συμ — rem satis lucide indicante. Hoc enunciatum, quin postulatis adjungendum sit nemo dubitabit, qui duplicem postulandi vim cognoverit, scilicet, ut aliquid sine institutione efficiatur, et ut aliquid per se intelligatur. Hanc apud antiquos fuisse αἰτημάτων naturam ex ipso Archimede docemur, qui scribit: Αἰτούμεθα τὰ ἴσα βάρη ἀπὸ τῶν ἴσων μηκῶν ἰσοῤῥοπεῖν. — Euclidem vero ab Archimede in hac re non dissensisse omnes fere indicant codices nostrum ordinem exhibentes; sin et ita dubitas, ipsius Procli dubitatio, quid Euclides scripserit, optime prodet. Ille enim: Τοῦτο καὶ παντελῶς διαγράφειν χρὴ τῶν αἰτημάτων, θεώρημα γάρ ἐστι etc. — Hoc rectius de quarto postulato dici

potuit. Facile enim demonstrari potuit angulum, angulo ipsi deinceps aequalem, cuilibet alii angulo ipsi deinceps aequali, esse aequalem. Euclides autem, cum videret, parallelarum theoriam absolvi non posse, nisi praemitteretur hypothesis, demonstratione quidem non probanda sed facile tamen ab omnibus concessa, quintumque quod habemus postulatum ad hoc maxime idoneum esse, intelligeret, facere non potuit, quin illud quartum injungeret. Quo omisso verba *δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες* intelligi non poterant. Quintum igitur qui postulare vult, quartum antea postulet necesse est. — Praeterea Proclum hoc enunciatum postulatis adjungit alio loco (ad I, 27.) — ς'. 6. *Καὶ δύο εὐθεῖαι χωρίον οὐ περιέχουσιν.* Sic scribunt, qui *ταῖς κοιναῖς ἐννοίαις* haec verba addunt: Inter quos est Grynaeus, Gregory, Proclus et multi Librorum manuscriptorum auctores. (Cod. Vindeb.)

Notiones communes (*Κοιναὶ ἔννοιαι*).

γ'. 3. Proclus et Scholiast. (ad XII. γ.) *τὰ λοιπὰ ἴσα ἐστιν.*
ϑ'. 9. V. *εἶναι* pro *ἐστιν.* p. 4.

Propositiones (*Προτάσεις*).

Lin. 10. *εὐθεῖα* ab. B. O. — Lin. 12. *πεπερασμένης* ab. B. O. — Lin. 20. *Ἐπειδὴ* sic Proclus. *Καὶ ἐπεὶ* Peyr. ex Cod. V.: *Ἐπεὶ* B. *Ἐπεὶ οὖν* O. — Lin. 29. *συνέσταται.* Sic rescripsi omnibus locis pro vulgato *συνίσταται.* Perfecti forma semper utitur Euclides in fine problematum et hujus verbi formam reperimus in Cod. V. prop. 22. et prop. 42. hujus libri et prop. 26. libri noni. Proclus in circumscriptione hujus conclusionis habet *συνέστη.* — Lin. 31. Alterum *συμπέρασμα* (*τὸ καθόλου*) ex Proclo depromsi.
— Lin. 6. *δοθείσῃ* ab. B. O. — Lin. 13. *ὁ* ab. O. — *Δ μὲν, δια-* p. 5.
στήματι δὲ. B. O. Cod. Vind. — Lin. 16. *Καὶ πάλιν* Cod. V.
Vind. ed. B. — Lin. 32. *Κείσθω γάρ.* P. ex Cod. V. — Lin. 10. p. 6.
ταῖς ab. Cod. V. — Lin. 32. *σημεῖον.* ab. B. O. — Lin. 9. *ἐστὶν* p. 7.
ab. B. O. — Lin. 7. *ΑΓ πλευρᾷ τῇ ΑΒ* O. — Lin. 8. *ΑΓ τῇ* p. 9.
ΑΒ O. — Lin. 16. *Καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγ. τῷ ΔΓΒ τῷ ἐλάσσονι τὸ μεῖζον.* B. O. — Lin. 30. *αἱ* ab. Cod. V. — Lin. 33. Verba *ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθ.* quae desunt in Cod. V., post *ΑΒ* scripta in ceteris editionibus hunc locum ut obtineant similium locorum ratio postu-
lat. — Lin. 3. Peyrardus, ut omnes hujus theorematis casus ab- p. 10.

solveret addidit *καὶ αἱ ΒΓ ΒΔ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὰ Ε Ζ* et figuris in hunc finem conscriptis congruenter litterarum signa in sequentibus permutavit. At Euclides non anxie omnes respexit casus, ut ex prop. 35. intelligimus. Praeterea ex Procli commentario perspicuum est, Euclidem varios theorematis casus neglexisse; quos ipse Proclus se addere indicat. — lin. 23. *τὰς* abest Cod. V. — Lin. 3. *ἐφαρμόσουσι* futurum restitui. Vulgo p. 11.
ἐφαρμόζουσι (sed conf. lin. 8.). — lin. 9. *αἱ* ab. Cod. V. — lin. 20. *δίχα.* Procl. (p. 23.) *δίχα εἰς ἴσα.* — lin. 19. *γων. εὐθ.* invertunt ceteri editores. Nos cum Proclo. — lin. 23. *Εἰλήφθω γάρ.* P. ex Cod. V. — Lin. 6. *δίχα εἰς ἴσα.* Procl. 23. — lin. 8. p. 12.
εὐθεῖαν πέπερ. ab. B. O. — lin. 25. *ἐπ αὐτῇ* B. Legendum fortasse *πρὸς αὐτῇ.* — Lin. 8. *ὀρθή ἐστιν ἑκ. τ. ἴσ. γ.* B. O. — lin. 12. p. 13.
γραμμὴ ἧκτ. εὐθ. B. O. — lin. 25. 26. *εὐθεῖα* et *εὐθεῖαι* Peyr. recepit ex Cod. V. — Lin. 2. *ὀρθή ἐστιν ἑκατ.* etc. B. O. — lin. p. 14.
10. Retinenda videtur lectio editionum B. et O., quam Proclus (pag. 78.) tuetur, *Ὡς ἂν* (V. et inde edit. Paris. *Ἐὰν.*) Nam *εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα* semper angulos efficit, ideoque dici non potest: si talis linea angulos efficit etc., sed dicendum est potius, *Qualescunque* angulos efficit, duobus illi rectis semper aequales sunt. — lin. 15. *ἢ δύο* B. O. — lin. 19. *εὐθεῖα* ab. B. O. — lin. 25. *γωνίαι αἱ* abs. haec verba in Cod. V. et P. — Lin. 6. p. 15.
et 11. *ἑξῆς.* Hanc vocem ex Proclo recepi, qui eam ab Euclide additam esse demonstrat, *ἐπειδὴ καὶ πρὸς τῷ αὐτῷ τῆς εὐθείας σημείῳ τὰς ἀγομένας εἶναι δυνατὸν ἦν, καὶ μὴ εἶναι ἐφεξῆς· μυρίας γὰρ εὐθείας πρὸς ἑνὶ σημείῳ λαβεῖν ἐνδέχεται.* Mihi quidem Euclides definitione quid sint *γωνίαι ἐφεξῆς* nulla praemissa tale quid hoc loco addere debuisse videtur. Conjungas *ἑξῆς κείμεναι,* u. e. lineam lineae adnexam esse intelligatur. — lin. 25. *οὐ δὲ* B. —
Lin. 19. Nullum extabat Porisma in altero codice Grynaei, at in p. 16.
altero addita fuisse haec ipse testatur. *Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι καὶ ἐὰν ὁσαιδηποτοῦν εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς πρὸς τῇ τομῇ γωνίας τέτρασιν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσουσι.* Hoc receptum videmus in ed. O., praetermissum in ed. P., quod Peyrardus haec verba in Cod. V. inter lineas exarata invenerat. Nos duo exhibuimus Corollaria, quorum alterum Euclidis fuisse Proclus testatur, alterum ex illo proficisci demonstrat. — Lin. 30. *ἐκβληθείσης*

B. et O. in thesi sed non ita in conclusione. — Lin. 5. ἐπ' εὐ- p. 17
θείας omissum est in O. B. — Lin. 33. καὶ ἐπ' ἐναντίον. B. —
Lin. 4. Ὁμοίως δὴ Cod. V. ed. P. — Lin. 13. γὰρ ab. B. O. — p. 18
lin. 19. ἐπ' ἐναντίον. B. — lin. 27. μενοῦν P. — Lin. 2. et 4. ἂν p. 19.
ᾖ B. ἂν ᾖ O. — lin. 21. ἀλλ' ἡ ὑπὸ . . . . μείζων ἐστὶ haec omi-
sit ed. P. cum Cod. V. — lin. 27. ἴση δὲ ἡ ΔΒ ταῖς ΒΑ ΑΓ.
Pro his ed. P. ex Cod. V. scripsit: ἴση δὲ ΔΑ τῇ ΑΓ. B. habet
utrumque. Nos Oxoniensem secuti sumus. — Lin. 20. ἐλάττονες p. 20.
B. — lin. 28. Διὰ ταῦτα τοίνυν P. ex Cod. V. — Διὰ τὰ αὐτὰ
ἄρα B. O. — lin. 34. δύο αἱ εὐθεῖαι B. O. — Lin. 3. ἐλάττονες p. 21.
B. — lin. 7. εὐθείαις ab. Cod. V. — lin. 8. δὲ scripsi pro δὴ Procli auctoritatem secutus; verbum δὴ in argumentando *porro* significat. Hoc loco autem conditio aliqua (διορισμὸς) additur, ad quam particula δὲ optime pertinet. — lin. 8. B. Cod. V. P. addunt: διὰ τὸ καὶ παντὸς τριγώνου τὰς δύο πλευρὰς τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι παντῇ μεταλαμβανομένας. Proclus haec verba non habet; sed in fine theorematis explicationum adscripta ab ipso haecce legimus: ἐπεὶ καὶ τῶν τριῶν εὐθειῶν ὑπέθετο τὰς δύο μείζους τῆς λοιπῆς παντῇ μεταλαμβανομένας καὶ οὔτε ἴσας οὔτε ἐλάττους τὰς δύο τῆς λοιπῆς. — lin. 17. κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, καὶ διαστήματι τῷ ΖΔ Cod. V. — lin. 18. κέντρῳ τῷ Η, καὶ διαστήματι τῷ ΗΘ idem. — lin. 19. καὶ τεμνέτωσαν . . τὸ κ. haec verba ex Proclo addenda existimavi; qui diligentissimus Elementorum commentator singula fere verba Euclidis secutus ita scripsit: *Καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Η διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ Λ· καὶ τεμνέτωσαν ἀλλήλους οἱ κύκλοι. Τοῦτο γὰρ ἔλαχεν* (ἔλαβεν?) *ὁ στοιχειωτής. Πόθεν οὖν τοῦτο; φησί τις· μή ποτε γὰρ ἢ ἐφάπτονται μόνον ἀλλήλων ἢ οὐδὲ ἐφάπτονται. Τῶν γὰρ τριῶν ἕν τι πάσχειν αὐτοὺς ἀναγκαῖον, ἢ τέμνειν ἀλλήλους, ἢ ἐφάπτεσθαι, ἢ διεστάναι ἀπ' ἀλλήλων. Λέγω δὴ οὖν ὅτι καὶ τέμνουσιν ἐξ ἀνάγκης ἀλλήλους. Ἐφαπτέσθωσαν γὰρ πρότερον. Ἐπεὶ τοίνυν τὸ Ζ κέντρον ἐστὶ τοῦ Κ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΝ καὶ ἐπεὶ τὸ Η κέντρον ἐστὶ τοῦ Λ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΗ τῇ ΗΝ. Δύο δὴ αἱ ΔΖ ΗΘ ἴσαι μιᾷ τῇ ΖΗ. Ἔκειντο δὲ μείζους αὐτῆς ὥσπερ καὶ ἡ Α μετὰ τῆς Γ τῆς Β μείζων, ἴσαι γὰρ ἐκείναις. Πάλιν, εἰ δύνατον, διεστάτωσαν ἀλλήλων οἱ κύκλοι ὡς οἱ Κ Λ. Ἐπεὶ οὖν τὸ Ζ τοῦ Κ κέντρον, ἴση ἡ ΔΖ τῇ ΖΝ· καὶ ἐπεὶ τὸ Η τοῦ Λ κέντρον, ἡ ΘΗ ἴση*

τῇ *ΗΜ*. Μείζων ἄρα ὅλη ἡ *ΖΗ* τῶν *ΔΖ ΘΗ*, ὑπερέχει γὰρ ἡ *ΖΗ*
τῇ *ΝΜ* τῶν *ΔΖ ΗΘ*. Ἔκειτο δὲ τὰς *ΔΖ ΘΗ* μείζους εἶναι τῆς
ΖΗ, ὥςπερ καὶ τὰς *Α Γ* τῆς *Β*, ἴση γὰρ ἡ μὲν *ΔΖ* τῇ *Α*, ἡ δὲ *ΜΗ*
τῇ *Β*, ἡ δὲ *ΘΗ* τῇ *Γ*. Ἀνάγκη ἄρα τοὺς *Κ Λ* κύκλους τέμνειν
ἀλλήλους· ὥστε ὁ στοιχειωτὴς ὀρθῶς τέμνοντας ἔλαβεν ἀλλήλους
τοὺς κύκλους. — lin. 22. συνέσταται sic recte P. ex Cod. V. re-
cepit. B. et. O. συνέστηκε. Conf. ad Pag. 4. lin. 29. — lin. 24.
οὖν recepit P. ex Cod. V. B. et O. habent. γὰρ. — Lin. 4. Scri- p. 22.
bendum est: συνέσταται. — lin. 7. εὐθυγρ. γων. scripsi pro γων.
εὐθυγρ. Proclum secutus. — lin. 22. αἱ δύο αἱ B. O. — lin. 28.
Scribendum est: συνέσταται. — Lin. 8. τῆς omittunt. B. O. To- p. 23.
tum locum sic expressit Cod. V. ἡ δὲ πρὸς τῷ *Α* γωνία τῆς π. τ.
Δ γωνίας μείζων ἔστω. — lin. 10. ἐστιν ab. Cod. V. — ἡ ὑπὸ
τῆς *ΒΑΓ* B. — lin. 20. γωνία τῇ P. Cod. V. — lin. 25. καὶ ab.
O. — Lin. 3. ταῖς ab. Cod. V. — lin. 5. βάσιν δὲ B. O. — ἔχῃ p. 24.
ab. Cod. V. — lin. 15. γωνία ab. P. V. — lin. 16. ἂν ἡ B. O. —
lin. 17. γωνία ἡ ὑπὸ *ΒΑΓ*. P. V. — lin. 17. ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ
ΒΑΓ τῆς ὑπὸ *ΕΔΖ*. — lin. 22. γωνία ab. P. V. — lin. 29. ταῖς
ab. V. — lin. 31. ἔχῃ δὲ ex Proclo receptum. — Lin. 3. ἴσην ex p. 25.
Proclo receptum est, qui etiam ἕξει addidit. — lin. 4. Ἔστωσαν B.
O. Saepius, si verbum antecedit Nominativum gen. neutr., Pluralis
adhibetur in Elementis, cujus rei, nisi scribarum negligentiam accusas,
causam vix reperies. — lin. 15. ἔσται pro ἔστιν. B. O. — lin. 22.
P. V. ἐστὶν. — lin. 23. ἴσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ B. O. — lin. 33.
τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ P. V. — Lin. 4. pro τῇ λ. γωνίᾳ B. et O. tan- p. 26.
tummodo λοιπῇ habent. — lin. 5. ἔσται rescripsi pro vulgato ἔσ-
τιν. — lin. 6. ἡ ab. O. — lin. 7. Ἔστω, εἰ δυνατὸν, μείζων ἡ *ΒΓ*.
B. O. — ἡ *ΒΓ* τῆς *ΕΖ*. P. V. — lin. 13. ἔσται rescripsi pro ἔσ-
τιν. — lin. 14. ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. — lin. 17. ὑπὸ *ΒΓΑ*
γωνίᾳ B. O. — lin. 18. ἐστὶν ἴση. B O. — deest in P. cum ce-
teris inde a verbo καὶ ἡ ὑπὸ *ΒΘΑ*; scilicet quae in Cod. V. in
margine tantummodo erant descripta. — lin. 25. ἴσον, καὶ λοιπή.
P. V. — lin. 26. ἴση ἐστὶν. B. O. — Lin. 9. *ΓΔ* εὐθείᾳ B. O. — p. 27.
lin. 15. ἴση ἐστὶ τῇ . . . . τῇ ὑπὸ *ΕΖΗ*. Sic P. recepit ex Cod.
V., idem in margine ed. B. ex codice altero; sed B. et O. habent
μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίας τῆς ὑπὸ *ΕΖΗ*, ἀλλὰ
καὶ ἴση. — lin. 29. ποιῇ post ἴσας abjeci cum Proclo et Cod. V. —

lin. 32. *καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη* haec recepi ex B. quae repetuntur
etiam in propos. 29. — Lin. 17. *καὶ ἐπὶ τ. α. μ.* desunt in Cod. p. 28.
V. — lin. 28. *τε* ab. Cod. V. — lin. 21. *καὶ ἐπὶ τ. α. μ.* ab.
Cod. V. — Lin. 2. *καὶ ἐπεὶ . . . ἡ ὑπὸ ΑΗΘ* haec verba excide- p. 29.
runt in Cod. V.; quamobrem omissa sunt in P. — lin. 5. *καὶ*
ab. V. P. — lin. 6. *καὶ αἱ ἄρα* B. O. — lin. 32. *τὰς παραλλή-*
λους B. O. P. — *δύο εὐθείας* Cod. V. — Lin. 5. *Αἱ ἄρα . . . .* p. 30.
ἔδει δεῖξαι desunt in Cod. V. — lin. 7. *σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ'*
αὐτῆς. Cod. V. Haec Proclum certe non legisse ex ipsius verbis
intelligimus, sic argumentantis: *Οὐ γὰρ ἐπειδὴ εἴρηται διὰ τοῦ δο-*
θέντος σημείου, καὶ ἐπ' αὐτῆς αὐτὸ τῆς εὐθείας δώσομεν etc. —
lin. 20. *ἐμπίπτουσα.* V. P. — Lin. 2. *ταῖς δυσὶ.* B. O. P. — lin. p. 31.
15. *ἐκτὸς* ab. V. — lin. 28. *αὗται* Procl. et Schol. — lin. 32. *τε*
ab. B. O. — Lin. 2. *γὰρ* ab. V. — lin. 8. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 11. p. 32.
ἴσαι ἔσονται V. O. P. — lin. 14. *ἐμπεσοῦσα* sic scripsi ex conjectura
pro vulgato *ἐμπίπτουσα.* Cf. prop. 31. — lin. 15. *τὰς ὑπὸ ΑΓΒ*
ΓΒΔ ab. V. — lin. 20. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* in fine addendum est. —
lin. 26. *χωρίον* ab. B. O. — Lin. 3. *δὴ* ab. B. — lin. 6. *τῇ μιᾷ* p. 33.
πλ. B. O. — lin. 11. *καὶ ἔτι ἴση ἐστὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.* V. P. — *γω-*
νία ab. B. O. P., pro *γωνίᾳ* P. habet *γωνία.* — lin. 14. *ἐστὶν ἴση.*
V. P. — lin. 18. *δὲ,* quod ab. in Cod. V., mutandum videtur in
δή. — lin. 22. *ἴση, καὶ βάσις ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ ἴση, καὶ τὸ* etc. V. —
lin. 23. *ἄρα* post *ΑΒΓ* ejecimus. — lin. 29. *ὄντα* ab. V. — lin.
34. *παραλληλόγραμμον* ab. in O. B. P. V. — *τῷ ΕΒΓΖ παραλλη-*
λογράμμῳ V. — Lin. 3. *τῇ ΒΓ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ.* — lin. 4. 8. 13. p. 34.
ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 11. *ἴσον ἔσται.* — lin. 20. Articulum *τῶν*
ante *ἴσων* abjeci cum Procl. et V. — lin. 28. *καὶ* ab. V. P. — lin.
31. *τε* ab. V. — Lin. 6. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — lin. 12. *ὄντα* ab. V. — p. 35.
lin. 19. *Ε Ζ σημεῖα* B. O. — lin. 20. *καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ*
etc. V. O. — lin. 24. *ἐστι τῆς* etc. B. O. — Lin. 3. *ἐπὶ τῶν ἴσων* p. 36.
edd. omn. Nos Proclum secuti articulum abjecimus. — lin. 11.
κατὰ τὰ Η. Θ. Cod. V. — lin. 19. *δίχα αὐτὸ τέμνει.* B. O. —
lin. 24. *ἐπὶ τῆς αὐτῆς* falso. B. O. — lin. 29. *ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη*
in altero codice abfuisse adnotat B. — de quibus tamen Proclus
haec scripsit: *εἰκότως ὁ στοιχειωτὴς προςέθηκεν τὸ καὶ ἐπὶ τὰ*
αὐτὰ μέρη. etc. — *καὶ ἐν ταῖς* V. P. — lin. 31. *τριγ. ἴσ.* B. O. —
lin. 32. *μέρη τῆς ΒΓ.* V. — lin. 33. *λέγω καὶ ὅτι* V. — Lin. 6. p. 37.

Ἴσον δή. V. quod recipiendum puto. — lin. 8. ταῖς *BΓ ΔE* ab. V. — lin. 9. τρίγωνον ab. B. O. — lin. 11. ἐστίν ab. B. O. — lin. 16. ὄντα καὶ ἐν ταῖς etc. B. — lin. 19. Articulum τῶν ante ἴσων cum V. et Procl. rejeci. — lin. 20. καὶ ἐν ταῖς. B. V. P. Nostra tuentur O. et Procl. — καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη in altero Codice abfuisse, notatur B. — lin. 20. τρίγ. ἴσ. B. O. — lin. 21. καὶ ἐπὶ τ. α. μ. desunt. B. V. — lin. 22. καὶ ab. O. — lin. 27. ἴσον δή ἐστι V. cf. 39. — lin. 30. τριγώνῳ et — lin. 31. τρίγωνον abs. Cod. V. — lin. 32. ἐστίν ab. B. O. — Lin. 4. παράλλ. ἐστ. B. O. p. 38.
— lin. 5. τῶν ante ἴσων abjeci. — lin. 6. καὶ ἐν ταῖς αὐτ. παρ. (abjectis verbis ἐπὶ τ. α. μ.) B. — lin. 9. βάσιν τὴν αὐτὴν ἔχῃ. Schol. — lin. 11. ἔσται Schol. B. O. — lin. 15. ἔστω παραλλήλοις B. O. — lin. 19. τρίγωνον ab. B. O. — lin. 32. ἐν γωνίᾳ.... εὐθυγρ. γωνίᾳ, sic scripsi, suadente Gregorio in margine ed. O. pro vulgato ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ (εὐθ. γων. B. O.). Conf. theor. 44. — Lin. 3. γωνία εὐθύγραμμος V. — ἡ ab. O. p. 39.
incuria typothetae. — lin. 5. ἐν γωνίᾳ, ἥ. ε. ι. a nobis inseruntur; pro hisce nihil habet Cod. V., unicum verbum ἴσῃ B. O. (Vide supra.) — lin. 16. τρίγωνον ab. B. O. — lin. 23. B. O. συνεστάθη. Cf. ad. 1. — lin. 24. ἥτις ἐστὶν V. P. — Lin. 4. ἐπεὶ τὸ *EKΘA* p. 40.
παρ. ἐστ. B. O. — lin. 5. αὐτοῦ ἐστιν ἡ V. P. — lin. 6. ἴσον ἄρα ἐστὶ V. O. — lin. 7. τριγώνῳ ab. B. O. — lin. 12. λοιπῷ ἄρα τῷ *KΔ* παραπληρώματι ἴσον ἐστὶ τὸ *AK* παραπλήρωμα. B. O. Nos V. et P. secuti emendavimus *HK* in *ΔK* et invertimus ἐστ. ἴσ. — lin. 20. γωνίᾳ ἥ ἐστιν ἴσῃ haec ex Proclo recipienda existimavi. — lin. 30. ὥσπερ ἐπ' B. O. — lin. 34. ἐμπέπτωκεν ἡ *ΘZ*. B. O. — αἱ ὑπὸ *AΘZ* ἄρα. V. P. — Lin. 2. εἰσ. ἴσ. V. P. — lin. 11. τὴν p. 41.
ab. B. O. — lin. 13. τὰ ab. B. O. — lin. 14. Ἀλλὰ καὶ τὸ B. O. — lin. 15. καὶ ἐπεὶ ἴσῃ etc. sic omn. edd. Nos conjunctionem ἐπεὶ abjiciendam duximus. — lin. 17. ἄρα ab. B. O. legitur post *ABM* in V. et P. — lin. 22. ἔδει δεῖξαι B. — lin. 26. εὐθυγρ. γων. B. O. — lin. 27. μὲν ab. B. O. — lin. 30. ἐν ἴσῃ γωνίᾳ. B. O. — lin. 33. ἴσ. ἐστ. V. P. — Lin. 5. ἡ ἄρα ὑπὸ *ΘKZ* O. De- p. 42.
siderantur haec verba in B. — lin. 6. ἐστ. ἴσ. — lin. 15. εὐθείας V. — lin. 20. ἐστὶ καὶ ἡ *ZH*. V. — lin. 24. αἱ *KM ZA* ἄρα ita scribendum. — lin. 29. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 31. συνέσταται cf. ad 1. — lin. 32. ἴσῃ δοθείσῃ B. — Lin. 13. Ἀλλὰ ἡ *AB*. V. P. p. 43

— lin. 16. *Λέγω δὴ* restituendum est cum B. O. — Lin. 3. *γω-* p. 44
νίαν ab. B. O. — lin. 11. *εὐθείᾳ* ab. B. O. — lin. 19. *καὶ ἐπεὶ*
ἴση . . . αἱ ΔΒ ΒΔ, pro his, quae ex V. in ed. P. recepta sunt,
B. et O.: *καὶ ἐπεὶ δύο αἱ ΔΒ ΒΔ.* — lin. 22. et 23. *ἐστὶν* ab. V.
P. — lin. 24. *καὶ τοῦ μὲν*. V. — lin. 30. *εἰσὶ παραλλήλοις* V. P.
— Lin. 5. *τετράγωνον ΒΕ.* O. — lin. 9. *γωνίαν* ab. B. — lin. 21. p. 45.
τῇ ΑΓ πρὸς ὀρθὰς εὐθεῖα ἡ ΑΔ. — Lin. 3. *ΒΓ ἐστιν ἴση.* — p. 46.
lin. 4. *ἐστὶν ἴση* B. O., *ἴση* sine copula V. P. — Lin. 8. *ἐν παρ-* p. 47.
αλληλογράμμων. B. O. — lin. 15. *τοῖς τε ὑπὸ τῆς* V. P. — lin.
21. *τῷ ὑπὸ τε* B. O. — lin. 24. *μὲν* ab. B. O. — Lin. 5. *τῶν* ab. p. 48.
B. O. — lin. 7. 8. 9. Cod. V. habet *τῷ ὑπὸ* ante *τὸ ὑπὸ*, cui se-
mel tantum (lin. 8.) consentit ed. B. — lin. 16. *τῶν* ab. B. O. —
lin. 19. *τὸ ὑπὸ τῆς ὅλης . . . περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον.* V. —
lin. 25. *τῶν* ab. V. — lin. 27. *γὰρ* ab. B. — lin. 31. *Ἴσον δὴ τὸ*
B. O. — Lin. 8. *ὡς ἔτυχε τμηθῇ.* B. O. — lin. 15. *σημεῖον* ab. p. 49.
V. P. — lin. 18. *τῆς* ab. O. — lin. 20. *καὶ ἤχθω ἡ ΕΔ* B. O. —
lin. 26. *ΑΔ ὑπὸ τῶν* O. — Lin. 13. *ἡ ΤΗΖ* addi vult Gregor. p. 50.
in O.: *τέμνουσα τὴν ΒΔ κατὰ τὸ Π σημεῖον.* — lin. 22. *ἀλλὰ ἡ*
μὲν ΓΒ. V. P. — lin. 26. *καὶ εἰς αὐτὰς ἐνέπεσεν ἡ ΓΒ.* in Cod.
V. ad marginem tantummodo correctoris manu adscripta sunt. —
lin. 28. *ἴσ. εἰσ.* B. O. — lin. 33. *τοῦτ᾽ ἔστιν τῆς ΑΓ.* V. — Lin. p. 51.
2. *ἐστί.* Omn. edd. habent *εἰσί.* — lin. 4. *τῶν* ab. V. — lin. 10.
τέσσαρα ab. B. O. — lin. 11. *ἐστιν ἀπὸ τῆς.* V. — lin. 18. *φανε-*
ρόν ἐστιν. edd. omn. — Lin. 4. *ἡ* ab. V. P. — *πάλιν* hoc loco p. 52.
deest, sed post *ἤχθω* legitur B. O. — lin. 9. *ἴσ. ἐστ.* B. O. —
lin. 11. *τὸ ΑΘ τῷ ΔΖ καὶ ΔΑ ἴσον* B. O. — lin. 12. *Ἀλλὰ τὸ*
μὲν ΑΘ. B. O. P. Nos V. secuti sumus. — *ΑΘ τῷ ὑπὸ . . . ἴσον*
ἐστίν. B. — lin. 13. *ἴση ἡ γάρ.* V. — Post *ΔΒ.* B. et O. addunt:
τὸ δὲ ΖΔ ΔΑ ἐστὶν ὁ ΝΞΟ γνώμων. — lin. 32. Post *προςκειμένης*
omisi verba *ὡς ἀπὸ μιᾶς ἀναγραφέντι*, quae in omnib. edd. repe-
riuntur, in Cod. V. recentiori manu inter lineas adscripta sunt. Non
adsunt ea etiam in repetitione hujus theorematis in edd. B. et O.
— Lin. 11. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 12. *Ἀλλὰ καὶ τὸ ΓΘ τῷ ΘΖ.* p. 53.
B. O. *Ἀλλὰ τὸ ΓΘ ἄρα τῷ ΘΖ.* V. P. — lin. 13. *ἐστ. ἴσ.* V. P.
— lin. 17. *ἄρα* ab. B. — lin. 18. *ὀρθογ.* ab. V. — Lin. 9. *καὶ* p. 54.
ἐπεὶ ἴσον. B. O. — lin. 11. *ἐστ. ἴσ.* B. O. — lin. 24. *τῷ τε δὶς*
B. O. — lin. 32. *ἀπὸ τοῦ* desiderantur O. — Lin. 7. *καὶ* a me p. 55.

adjectum est. — lin. 10. ἴση τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ. V. P. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — lin. 16. μὲν ab. V. — lin. 17. ἐστὶ καὶ τὸ ΓΚ. V. ἐστὶ καὶ τὸ μὲν ΓΚ. P. — lin. 19. ἴσον ἐστ. Sic V.; invertunt edd. omn. ἐστ. ἴσ. — lin. 20. Ad haec verba in margine editionis B. scripta haccce reperio „Variat hic exemplar alterum, sed frustra." ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 24. ἐστὶν ab. V. — lin. 27. μὲν ab. V. — lin. 32. ἐστ. τετρ. B. O. — lin. 35. τοῦ ΑΚ ἐστι. B. O. — Lin. 2. p. 56.
3. 6. 8. pro ΒΓ edd. omn. ΒΔ. — lin. 2. καὶ ab. V. P. — lin. 6. 10. γνώμωνι B. — lin. 9. τῆς ab. V. — lin. 12. Post ΑΔ in Cod. V. leguntur haecce: τὸ ἄρα τετράκις ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ (τῆς) ΑΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ (τῆς) ΑΔ τετραγώνῳ. Ἴση δὲ ἡ ΒΔ τῇ ΒΓ· τὸ ἄρα etc. Quae in ed. P. recepta sunt adjectis articulis, quos uncis inclusi. — lin. 14. ἀπὸ ΑΓ. V. — lin. 33. παραλλ. ἤχθ. abs. V. — Lin. 5. καὶ εἰσ. ἴσ. desunt B. O. — lin. 12. p. 57.
ἐστὶν ab. V. — lin. 13. πλευρᾷ ab. V. — lin. 15. πάλιν ἐστι B. O. — lin. 20. ἀπὸ ΑΓ τῷ ἀπὸ ΓΕ. V. — lin. 22. 25. ἀπὸ ΑΓ. V. — lin. 26. ἐστ. ἴσ. V. — lin. 29. ΕΖ τετράγωνον V. P. — lin. 30. τῆς ΕΖ διπλάσιον. V. P. — lin. 31. Pro verbis Ἴση δὲ ἡ ΗΖ τῇ ΓΔ. V. et P. habent Ἀλλὰ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. — Lin. 3. ἐστιν ab. B. O. — lin. 20. προςκειμένης ὡς ἀπὸ p. 58.
μιᾶς ἀναγραφέντος (V. ἀναγραφέντι) B. O. P. — lin. 30. ΓΕ πάλιν παράλλ. V. P. — Lin. 6. ἐστιν ab. V. — lin. 8. ὀρθῆς ἐστιν p. 59.
B. O. — lin. 12. ἡμίσειά ἐστι . . . . . ὑπὸ ΔΗΒ desunt V. P. — lin. 20. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΕΓ τετράγωνον. V. — lin. 27. ΗΖ τετράγωνον B. O. — lin. 28. ΖΕ τετραγώνῳ B. O. — lin. 30. τετράγ. ab. V. — lin. 31. ἡ ab. P. — Lin. 6. ΑΔ ΔΗ τετράγωνα p. 60.
B. O. — lin. 7. ΑΓ ΓΔ τετραγώνων. B. O. — lin. 28. ἴσον ποιεῖν V. P. ἴσον ἐστὶ B. — Lin. 2. τετραγώνῳ ab. V. — lin. 7. ὀρθογ. p. 61.
ab. V. — lin. 12. καὶ ἐστὶ τὸ μὲν ΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΘ, τὸ δὲ ΘΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΘ· τὸ ἄρα ὑπὸ etc. V. P. — lin. 15. τῆς ab. V. — lin. 19. ἴσον ποιεῖν. V. — lin. 25. γωνίαν ab. B. — lin. 28. ἐκβληθεῖσαν ab. V. — lin. 29. προσλαμβ. hanc verbi formam huic loco aptissimam in nonnullis codicibus exstitisse hoc loco legitur in margine ed. B. Edd. omnes: ἀπολαμβανομένης. — lin. 32. γωνίαν ab. V. — Lin. 10. περιεχ. ὀρθ. abs. V. — lin. 12. τὸ Δ p. 62.
male B. O. — lin. 13. ἐστι ab. V. P. — lin. 14. τετραγ. ab. B. O. — lin. 34. τῆς ab. V. — Lin. 12. 13. ἐστι ab. V. — lin. 15. p. 63.

τῶν ab. V. B. — lin. 16. τὸ ab. O. — lin. 26. γὰρ ab. B. O. — lin. 29. συνίσταται edd. omn. — lin. 33. μὲν ab. V. — Lin. 12. p. 64.
τῆς ab. V. — ΗΕ ἴσα B. O. — lin. 16. ΕΖ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΕ ΕΔ V. — ἡ ab. P. — lin. 19. καὶ τὸ Α V. P. — lin. 22. συνίσταται, edd. omn. — Lin. 4. εἰσ. ἴσ. B. O. — lin. 8. τὸν κύκλον ἐπὶ μηδέτερα μέρη. V. P. — lin. 11. ἀπὸ ab. B. O. — lin. 22. ἥ ἐστι. p. 65.
V. — Lin. 3. κέντρῳ αὐτοῦ τοῦ κύκλου σταθῇ ἡ γωνία. B. O. — p. 66.
lin. 12 Διήχθω τις B. O. — lin. 16. κύκλον ab. V. — lin. 19. δύο δὲ O. — lin. 20. ἐστ. ἴσ. B. O. — ἐκ κέντρου γὰρ τοῦ Η. B. O. P. Nos Cod. V. secuti ultima abjecimus. — lin. 21. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 25. ἴσων ab. Cod. V. — lin. 27. ἡ μείζων τῇ ἐλάττονι B. O. — lin. 32. Verba ὅπερ ἔδ. ποιῆσ. in V. et B. post subsequens corollar. scripta sunt. — Lin. 4. τις εὐθεῖα εὐθεῖαν B. p. 67.
O. — lin. 8. τὰ αὐτὰ σημεῖα. B. O. P. Nos cum Cod. V. — lin. 12. τυχόντ. δύο B. O. — lin. 18. ἡ ΔΖ ἐπὶ τὸ Η. B. O. — lin. 30. ἐντὸς ἄρα πεσεῖται V. P. — lin. 32. τὰ αὐτὰ σημ. O. — Lin. 5. 7. τεμεῖ O. — lin. 15. δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ. V. — lin. 16. p. 68.
ἴση, καὶ γωνία ἡ B. O. — lin. 19. 20. ὀρθή ἐστιν ἑκατέρα τ. ἴσ. γ. ἑκατέρα ἄρα τῶν ὑπὸ ΑΖΕ ΒΖΕ ὀρθ. ἐστ. B. O. — lin. 21. οὖσα ab. O. — lin. 22. αὐτὴν ab. V. — lin. 23. καὶ ab. V. — lin. 27. ἡ ἐκ τοῦ κέντρου ἡ ΕΑ. B. O. — lin. 29. ἄρα ab. Cod. V. — Lin. 10. σημεῖον ab. V. B. O. — lin. 17. κέντρου ἠγμένην p. 69.
τὴν B. O. — lin. 18. 21. τεμεῖ O. — lin. 18. ἔστιν ἄρα B. O. — lin. 23. ἡ ab. O. — lin. 24. ἐστιν ab. B. O. — Lin. 2. Εἰ γὰρ p. 70
μή, ἔστω B. — lin. 7. καὶ ἡ ΕΓ B. O. — lin. 8. ἴσ. εστ. B. O. — lin. 9. ἐστιν ab. V. B. O. — lin. 14. ἐφάπτονται. O. — ἀλλήλων ἐντὸς B. O. P. Nos cum V. — lin. 16. ἀπτέσθωσαν. O. — lin. 17. οὐκ ἐστὶν B. O. — lin. 24. καὶ ab. V. — lin. 25. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 26. ἐστιν ab. O. — lin. 33. ἀπὸ δὲ τοῦ σημείου προσπίπτωσιν εὐθεῖαι τινὲς πρὸς τὸν κύκλον. — Lin. 2. ἔσται B. O. — lin. 6. p. 71.
εὐθεῖαι deest V. P. — lin. 7. ἐφ' ἑκατέρᾳ male P. — lin. 19. αἱ ἄρα ΕΒ ΕΖ. B. O. — lin. 22. δὲ ab. V. — ἡ ab. P. — lin. 26. ἐστιν ab. B. O. — lin. 33. ἴσαι ab. B. — lin. 34. εὐθεῖαι ab. V. P. — lin. 35. ἐφ' ἑκατέρᾳ P. — Lin. 10. ἐστὶν ἴση, ἀλλὰ μὲν καὶ p. 72.
ἡ ΖΘ τῇ ΖΗ. V. P. — lin. 11. τῇ ΖΗ ἴση ἐστιν B. O. — ἴσ. ἐστ. B. O. — lin. 12. τῆς ἀπώτερον V. — ἴση post ἀπώτερον, quod omnes habebant editiones, abjiciendum putavi. — lin. 13. Οὐκ ἄρα

etc. usque ad finem ex alterius demonstrationis fine huc recepi, quam in Apend. I., 2. reperies. — lin. 21. Ordinem rerum in hoc theoremate enunciatarum paululum mutavimus ut πρότασις congrueret ἀποδείξει; et ipsum theorema antecedenti similior redderetur. Primum enim demonstratur, quae sit maxima linearum, postea, quae minima; denique ceterarum inter se comparatio sequitur. Ut vero lectores quae sunt de conjectura mea a codicum editionumque lectionibus melius sejungant, singula hoc loco exhibebo. Cod. V. habet: Ἐὰν κύκλου . . . . ὡς ἔτυχε· τῶν μὲν πρὸς τὴν κοίλην περιφέρειαν προσπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μὲν . . . διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιόν τῆς . . . . προςπιπτουσῶν εὐθειῶν ἐλαχίστη μέν ἐστι ἡ μεταξὺ τοῦ τε σημειοῦ καὶ τῆς διαμέτρου· τῶν δὲ ἄλλων ἀεὶ ἡ ἔγγιον . . . . Ἔστω κύκλος . . . . . διήχθωσαν εὐθεῖαί τινες αἱ ΔΑ. . . . . λέγω ὅτι τῶν μὲν πρὸς τὴν ΑΕΖΓ κοίλην περιφέρειαν προςπιπτουσῶν εὐθειῶν μεγίστη μέν . . . καὶ τῆς διαμέτρου ἡ ΑΗ. μείζων δὲ ἡ μὲν ΔΕ τῆς ΔΖ, ἡ δὲ . . . τῆς ΑΘ. Cum hoc congruit ed. B. nisi quod in thesi ipsa post verba μεγίστη μέν ἐστιν ἡ διὰ τοῦ κέντρου omittat ea quae sequuntur: ἐλαχίστη δέ ἡ μεταξύ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς διαμέτρου προςπίπτουσα, quae bis leguntur diversis locis in illo codice. — Nihilominus in expositione plane eundem servat rerum ordinem ac codex V. — Ed. O. secuta est editionem B. sed ita ut etiam in expositione delerentur ea, quae sequuntur post ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἡ ΔΑ verba: ἐλαχίστη δὲ ἡ ΔΗ ἡ μεταξύ τοῦ σημείου καὶ τῆς διαμέτρου τῆς ΑΗ. Cum Oxoniensi congruit P. exceptis iis, quae singulatim exponemus — lin. 19. διαθῶσιν B. — lin. 26. τοῦ ab. P. — lin. 30. ἴσ. εὐθ. V. — lin. 35. πρὸς τὸν κύκλον ab. V. P. — Lin. 14. ΜΔ. p. 73.
ΜΗ. ΜΘ. B. — lin. 17. Αἱ δέ V. P. — lin. 19. κοινὴ δὲ ἡ ΜΔ. O. — lin. 29. post ἐστίν omisimus ἐλαχίστη ἄρα ἐστί, quae leguntur in ceteris edd. — lin. 30. συνεστάθησαν, αἱ ΜΚ ΚΔ ἄρα τῶν ΜΔ ΔΛ. V. P. — lin. 32. εἰσιν. ἴση δὲ V. P. — Lin. 4. p. 74
εὐθεῖαι ab. V. P. — lin. 5. συμπεσοῦνται B. O. — lin. 12. ἴση ἐστὶ B. O. — lin. 13. δὴ ab. V. — τῇ ΔΒ. B. — lin. 17. ΔΝ ἐστ. ἴσ. O. — lin. 18. ἀπώτερον ἐστ ἴσ. — lin. 19. ἀδύνατον ἐδείχθη edd. omn. — εὐθεῖαι ab. V. P. — ἴσαι. ab. B. O. — Post ὅπερ ἀδύνατον ἐδείχθη in ceteris edd. altera argumentatio est adjecta, cujus hoc loco omissae et in Appendicem rejectae, finem tantum re-

cipiendum existimavimus. *Οὐκ ἄρα* etc. — lin. 27. 31. *εὐϑ. ἴσ.* O. — Lin. 2. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — lin. 4. *βάσις δὲ* B. — *ἐστι* ab. V. P. — p. 75.
lin. 7. *τὴν ΑΒ δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς ὀρϑὰς τέμνει* B. O. — lin. 10. *ἐστι* ab. B. — lin. 11. *ΑΒΓ* ab. V. — *Διὰ τὰ αὐτὰ . . . . τοῦ ΑΒΓ. κύκλου* ab. O. — lin. 14. Adjecta est alia demonstratio, quam in Appendice recepimus. — lin. 19. *οὐ τέμνει κύκλον.* B. O. — lin. 23. *τεμνέσϑωσαν* B. P. — lin. 25. *ἐπὶ τὰ ΑΕ δίηχϑωσαν* B. O. — lin. 28. *δίχα τέμνουσα καὶ πρὸς* B. O. — lin. 34. *ἀλλήλαις* ab. V. — Lin. 4. *Δύο ἄρα . . . . ἀδύνατον* ab. V. p. 76.
— lin. 6. sequitur *Ἄλλως* quod vide in appendice — lin. 12. *εὐϑεῖα καὶ ἐκβ.* V. B. P. — lin. 15. *ἁπτέσϑωσαν* O. — lin. 17. *τὸ κέντρον.* V. P. — lin. 18. *τοῦ Η ἐπὶ τὸ Ζ.* O. — lin. 19. *σημ.* ab. V. P. — lin. 23. *ΖΘ, (ἴση γὰρ ἡ ΖΑ τῇ ΖΘ· ἀπὸ κέντρου γὰρ ἄμφω)* B. et idem uncis sublatis O. — lin. 26. *ἐστιν* ab. B. O. — lin. 29. *κατὰ τ. Α. α. ἐπὶ τῆς συναφῆς* V. P. — *ἐπ᾽ αὐτὴν ἄρα* B. O. — Sequitur *Ἄλλως* quod vide in append. — Lin. 3. *ἅπτωνται* B. O. p. 77.
(Attamen in recapitulatione B. habet *ἐφάπτ.*) — lin. 4. *ἐπιζευγμένη* P. — lin. 5. *εὐϑ.* ab. B. O. — lin. 8. *κύκλου* ab. V. — lin. 11. *αἱ ΖΓΔΗ.* male edd. omn. cum in antecedenti theor. habeant *ἡ.* — lin. 20. *οὐκ* ab. B. — lin. 21. *ἐπ᾽ αὐτῆς* B. — lin. 25. *κατὰ* ab. B. — lin. 26. *ἡ καϑ᾽ ἓν* O. — lin. 27. *ἐφάπτ.* ab. V. P. — lin. 29. *ἁπτέσϑω* B. O. — lin. 31. *τὸ κέντρον.* — Lin. 2. *εὐϑ.* ab. V. — p. 78.
lin. 9. *ἐστὶν* ab. V. P. — lin. 17. *ἄρα* ab. B. O. — *αὐτὰ* ab. V. — lin. 29. *αἱ ΑΒΓΔ* ab. B. O. — Lin. 6. *ἴση ΑΒ.* O. — lin. 14 p. 79.
λοιπῷ ab. V. — lin. 15. *ἄρα καὶ ἡ.* V. — lin. 26. *καὶ* ab. V. P. — lin. 30. *ἴσ. ἐστ.* B. O. — lin. 31. *ΑΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΗ ἴσῃ.* V. — Lin. 4. *ἐστιν* ab. V. — lin. 8. *μὲν τῆς ΑΔ διαμέτρου* p. 80.
V. cum tribus aliis edd. B. O. (omissa litt. *E.*) — lin. 12. *E* ab. O. — *ἄρα* ab. V. et in 6. codd. aliis. — lin. 26. *ἐστιν* ab. V. — lin. 28. *ἄρα* ab. B. O. — *μὲν* ab. O. — Lin. 8. *γων. ὀξ.* V. P. — lin. p. 81.
16. *ἴσ. ἐστ.* habent V. P. post *ΑΓΔ.* — lin. 18. *ΑΓΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΑΓ.* B. O. — lin. 20. *ἄρα* ab. P. — lin. 23. *ἐκτὸς ἄρα πιπτέτω ὡς* etc. sic male jungunt edd. ceterae — 24. *λέγω δὴ* V. P. — lin. 28. deesse videtur *τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ Θ.* — *σημείου καϑ. ἐπὶ τὴν ΖΑ ἡ ΔΗ.* B. — Lin. 4. *γων. ὀξ.* V. P. — lin. 13. p. 82.
παρεμπ. εὐϑ. B. O. — lin 20. *οὐδέ μέν.* P. — lin. 22. Verba *ὅπερ ἐδ. δεῖξ.* post corollarii finem. V. B. — lin. 24. *ἐκ δὴ τούτου*

V. P. — Lin. 2. τὸ μὴν. P. — lin. 5. γὰρ κέντρον B. O. — lin. p. 83.
6. post *ΑΕ* deesse videtur τέμνουσα τὸν κύκλον κατὰ τὸ *Δ*. — lin. 14. τὴν ab. V. — lin. 17. τῇ ὑπὸ *ΕΔΖ* ἡ ὑπό B. O. — lin. 22. *ΒΓΑ* male P. — lin. 23. ἄρα δοθέντος P. — lin. 25. ἔδει δεῖξαι B. — lin. 28. ἀφὴν P. — lin. 31. ἁπτέσθω B. O. —
Lin. 9. καὶ ab. B. O. ἡ ab. P. — lin. 18. τῆς ab. B. — ἀφῆς p. 84.
B. P. — γωνίας ab. V. P. — lin. 21. ἁπτέσθω. B. — lin. 22. πρὸς ὀρθ. τῇ *ΔΕ*. B. O. — lin. 27. οὖν ab. Cod. V. — Lin. 14. p. 85.
ΕΒ., ἴση καὶ γωνία ἡ . . . . ὑπὸ *ΕΒΑ*. V. P. — lin. 21. γων. ἐτ. B. O. — lin. 24. τῆς ὑπὸ *ΗΔΓ*. O. P. — lin. 25. τῆς ὑπὸ *ΗΔΒ*. O. P. — lin. 32. αὐτῷ ab. O. — Lin. 19. Ἐπεὶ οὖν p. 86.
παντὸς etc. V. P. — lin. 20. ἄρ. τριγ. ab. O. — lin. 26. post *ΑΒΓ* inseruit B.: ταῖς δυσὶ ὁμοῦ τῇ πρὸς τὸ *Α* καὶ *Γ*, καὶ χωρὶς τῇ μίᾳ τῇ πρὸς τὸ *Δ*. — lin. 29. ἄρα ab. B. O. — Lin. 4. p. 87.
συσταθήσονται B. O. — lin. 18. ἀλλήλοις εἴσιν B. — lin. 26. Ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς *ΑΒ* εὐθείας ἐπὶ τὴν *ΓΔ*. B. O. — lin. 30. Quae uncis inclusa sunt aut ipsa aut iis similia excidisse videntur. V. et P. hunc locum ita expresserunt: μὴ ἐφαρμόσει, ἤτοι ἐντὸς αὐτοῦ π. ἤ. ἐκτ. ἢ παραλλ. ὡς τὸ *ΓΘΗΔ* καὶ κύκλος κύκλον τέμνει κατὰ πλείονα σ. ἢ δύο τὰ *ΓΗΑ*. — B. O. habent pro his: ἐφαρμόσει, ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὸ *ΓΘΗΔ*· κύκλος δέ etc. . . . Sunt qui locum ita explere tentaverint: ἐφαρμόσει ἀλλὰ παραλλάξει ὡς τὰ τμήματα *ΓΖΔ* *ΓΘΔ*. ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἄρα εὐθείας τῆς *ΓΔ* δύο τμήματα κύκλων ὅμοια καὶ ἄνισα συσταθήσεται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη. Οὐ συνίσταται δέ. Οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης etc. cf. Jen.
Litt. Z. XXII. 1826. p. 278. — Lin. 2. τὸν *ΓΖΔ* κύκλον B. O. — p. 88
lin. 13. τοῦ *ΑΒΓ* τμήματος hoc recepi ex Cod. V. et B. — lin. 14. abjeci cum B. τὸ *ΑΒΓ*. post ἐστι. — lin. 17. ἄρ. γων. B. O. — lin. 21. διήχθω ἐπὶ τὸ *Ε* ἡ *ΔΒ*. B. O. — lin. 24. εὐθεῖα εὐθείᾳ V. P. — lin. 27. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 28. Καὶ βάσις ἄρα.
O. — lin. 34. προςαναγεγραμμένος κύκλος. V. P. — Lin. 4. p. 89.
αὐτοῦ ἐκτὸς O. αὐτοῦ, ἐκτὸς B. — lin. 5. δέ ab. P. — κἂν ἡ ὑπὸ *ΑΒΔ*. γ. ἴση τῇ B. O. — lin. 11. συστησόμεθα — τῷ *Α* σημείῳ B. O. — lin. 12. γωνίαν ἴσην B. — lin. 14. ὡς τὸ *Ε*. deest B. O. — lin. 24. γάρ ab. B. O. — lin. 25. αὐτοῖς πρὸς μὲν τοῖς κεντρ. ἴσαι γων. ἔστωσαν. πρὸς δέ. V. P. — lin. 32. εἰσι ab. V. —
lin. 33. ἐστι ab. V. — lin. 34. ἐστ ἴσ. V. P. — Lin. 5. ἐστὶν ab. p. 90.

V. — εἰσὶν B. O. — lin. 6. τμήματι ab. V. — lin. 7. ἴσος· λοιπὸν ἄρα *BKΓ* τμῆμα λοιπῷ *EΔZ* ἴσον: ἡ ἄρα *BKΓ* περιφέρεια ἴστ. etc. P. ἴσος. λοιπὸν ἄρα . . . . περιφέρεια τῇ *EΔZ* περιφερείᾳ ἰσ. ἴσ. O. Nos. ed. B. secuti sumus. Fotus hic locus desideratur in V. — lin. 16. καὶ ἐπὶ ἴσων. B. O. — lin. 20. γωνία ab. O. B. — lin. 21. *EΔZ* ἐστὶν ἴση V. P. — lin. 22. Εἰ μὲν οὖν ἡ ὑπὸ *BΗΓ* ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ *EΘZ*· φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ὑπὸ *BAΓ* τῇ ὑπὸ *EΔZ* ἴση ἐστίν. Εἰ δὲ οὔ· μία αὐτῶν μείζων ἐστὶν B. O. nonnullique co-
dices. — lin. 33. τῆς δὴ P. — Lin. 10. αἱ *AB* Δ*E* τὰς μὲν p. 91.
ABΓ ΔZE. P. — lin. 11. τὰς δὲ *AHB* (Haec literarum varietas per totum theorema offenditur.) — lin. 14. ἔλαττον, ab. V. — περιφέρεια ἴση B. O. — lin. 22. περιφέρεια *BHΓ* τῇ etc. — lin. 23. περιφερείᾳ ab. V. — lin. 24. καὶ ab. B. O. — lin. 29. ὑπο
ab. V. — Lin. 3. εὐθεῖα aliena manu adscriptum V. — lin. 4. p. 92.
κύκλων, καὶ ἔστω V. P. — lin. 10. ἴσ. γων. B. O. — lin. 15. 17. τέμνειν B. O. — lin. 24. καὶ βάσις ἡ B. O. — lin. 31. κατὰ
τ. Δ. σημ. absunt B. O. — Lin. 5. τμήματι ab. B. O. — lin. 9. p 93.
ἐστὶν ab. V. P. — lin. 13. ἡ ὑπὸ *BAΓ* absunt O. B. — lin. 16. ἡ ὑπὸ *AΔΓ* ab. O. B. — lin, 20. *ABE* τῇ ὑπὸ *BAE*. P. — lin. 21. *ΓE* τῇ *EA*. P. — καὶ ab. V. — lin. 23. Fortasse legendum ἡ
ἐκτὸς — lin. 31. γωνία ab. V. P. — Lin. 3. *AΔΓ* μείζων ἐστὶν p. 94.
ὀρθῆς καὶ ἐστὶν ἐν τῷ ἐλάττονι. B. O. — lin. 6. δὴ ab. V. P. — lin. 7. τε ab. B. O. — lin. 12. γωνία ab. V. — lin. 16. τῆς *AΓΔ* P. — lin. 17. περιεχομένη ab. B. O. — lin. 19. sequitur Ἄλλως quod vide in append. — lin. 21. μία γωνία τριγώνου V. — lin. 22. ταῖς recepi ex Cod. V. — ἡ γωνία recepi ex V., qui hoc coroll. in margine quidem sed eadem manu scriptum continet. — lin. 23. ἐκείνης ἐκτὸς τῆς V. P. Legendum fortasse τὴν ἐκτὸς καὶ ἐκείνης ἐφεξῆς. — lin. 27. ἁφῆς B. P. — ἐπὶ τόν. B. O. — lin. 33. ἐπὶ
τὸν B. O. — Lin. 5. 6. γωνία ab. B. O. — lin. 6. συνεσταμένη p, 95.
B. O. — lin. 7. συνίστ. γων. abs. B. O. — lin. 12. ἡ ab. P. — σημεῖον ab. P. — ἀπὸ δὲ τῆς ἁφῆς V. P. — 14. ἄρα ab. B. O. — 15. Ἡ *BA* ἄρα . . . κύκλου abs. B. O. — εἰσὶν P. — Εἰσὶ . . .
ἴσαι abs. B. O. — Lin. 9. Γ γωνία B. O. — lin. 10. Ἡ δὲ πρὸς p. 96.
V. P. — γωνία ex V. recepi — lin. 11. καὶ ὡς. V. — τῆς ab. P. — lin. 12. 14. καὶ ab V. — lin. 21. γωνία ab. B. O. — 28. ἐπεὶ οὖν V. P. — τοῦ *ABE* κύκλου — lin. 29. ἐπὶ τὸ B. O. —

lin. 31. τῷ ab. V. — τοῦ κυκλου ab. B. O. — lin. 34. τῇ ἐν τῷ ἐναλλὰξ τμήματι γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΑΒ. Ἀλλ' ἡ ὑπὸ ΔΑΒ τῇ πρὸς τῷ Γ ἐστὶν ἴση. καὶ ἡ πρὸς τὸ Γ ἄρα γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ. ΑΕΒ. — Lin. 6. ἴστ. πάλ. V. P. — lin. 7. ὀρθῇ ab. O. γων ab. p. 9
B. — lin. 8. γωνία edd. omn. — lin. 15. O. habet ἴση post τμήματι, item B. — lin. 16. αὐτῇ edd. omn. — 17. καὶ ab. B. O. — ἐστ. ἴσ. B. O' — lin. 27. Καὶ ἡ ... τῷ Γ ab. B. O. — lin. 29. ἡ B. O. — lin. 32. Ἐρχέσθω V. P. — ὁ ab. B. O. — lin. 34. Ἔστιν ἡ ΑΔ V. — lin. 35. ὑπαφῆς B. — Lin. 7. ἄρα δοθείσης V. P. — lin. 17. τῇ p. 9
δοθ. γων. εὐθ. des. B. O. — Δ γωνία B. O. — lin. 18. κύκλου ab. V. — lin. 22. γωνία ab. P. — γωνίᾳ ab. B. O. — Lin. 6. τῶν p. 9
ab. V. — lin. 14. Μὴ ἔστωσαν δὴ V. P. — lin. 15. κύκλου ab. B. O. — lin. 21. τεμεῖ B. O. — lin. 26. Προςκείσθω κοινὸν V. P. — Lin. 2. Ὥςτε καὶ τὶ V. — lin. 18. περιεχ. ὀρθ ab. V. — lin. 26. p. 1
ἄρα ab. B. O. — lin. 31. τῶν ΑΔΓ. V. — lin. 34. Ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΖΔ τοῖς. B. O. — lin. 35. ὀρθ. γὰρ . . . ΖΒΔ abs. V. — Lin 12. τεμεῖ B. P. — lin. 14. σημεῖον ab. B. O. — lin. 18. ἴσα p. 1
ἐστὶ B. O. — lin. 14. τοῖς δέ B. O. — ἐστί ab. in edd. omn. — lin. 20. γωνία ab. B. O. — Lin. 3. τῆς ab. B. O. — lin. 12. τῶν p. 1
ΑΔΓ V. — lin. 14. κύκλου ab. P. — lin. 15. τὸ Ζ κέντρον B. O. — καὶ ἔστω τὸ Ζ abs. B. O. — lin. 20. Ἦν δὲ καὶ τὸ V. B. — lin. 21. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 29. καὶ τοῦ κύκλου. V. P. — τοῦ κύκλου ἡ ΔΒ . . . κύκλου abs. B. O. — lin. 30. Uncos adjeci glossema suspicans. δὴ τὰ αὐτὰ B. O. — τὰ αὐτὰ ab. P. — Lin. 12 p. 1
Σχῆμα δὲ B. O. P. sed δὲ ab. in V. — lin. 16. πλευρὰ τῆς τοῦ κυκλ. περιφ. τοῦ περιγραφ. ἐφαπτ. B. O. — lin. 19. εἰς σχῆμα ὁμοίως. V. P. — Lin. 7. Fortasse legendum μὴ μείζων οὖσα — p. 1
lin. 13. Εἰ δὲ μείζων ἐστὶν . . . τῆς Δ, κείσθω τῇ V. P. — lin. 14. μὲν ab. V. — lin. 18. τῇ Δ ἡ ΓΕ V. P. — ἡ Δ τῇ ΓΕ B. — lin. 19. ἡ Δ ἄρα τῇ ΓΑ. O. B. — lin. 21. μὴ μειζ. οὖσ. τῆς τ. κ. διαμ. abs. V. P. — lin. 30. πρὸς μὲν τῇ — lin. 32. ἡ ὑπὸ . . . γωνίᾳ ἴση abs. B. — ΘΑΓ· πρὸς δὲ O. — 33. γωνία ab. V. P. — Lin. 3. p. 1
καὶ ἀπὸ τῆς κατὰ τὸ Α ἐπαφῆς διῆκται εὐθεῖα. V. P. — εἰς τὸν κύκλον ab. B. O. — lin. 4. εὐθεῖα ab. B. O. — lin. 8. Διὰ τὰ αὐτὰ . . . ἐστὶν ἴση. ab. B. — lin. 10. ἰσογώνιον ἄρα . . . ΑΒΓ κύκλον abs. V. — lin. 21. ἐφ' ἑκατ τ. μ. ἡ ΕΖ ἐπὶ τὰ B. O. — κατὰ τὰ Η Θ. V. P. — lin. 30. σημεῖα ab. B. O. — lin. 30.

ἀπὸ δὲ τοῦ . . . . σημεῖα abs. V. P. — καὶ ἐπιζευγνύμεναι V. P. — ἐπιζευγμέναι pro vulgato ἐπιζευγνύμεναι ex conjectura scripsi. — Lin. 2. Quae uncis inclusa sunt, scholiastae adnotationi simillima p. 106.
sunt. — lin. 2. τετράπλ. ab. V. — pro ὧν αἱ etc. V. habet καὶ εἰσιν ὀρθαὶ αἱ ὑπὸ ΜΑΚ ΚΒΜ γωνίαι. — lin. 11. λοιπῇ ab. V. — lin. 23. αἱ ΒΓ ΓΔ ab. O. — lin. 26. δίχα γὰρ . . . ΑΒΓ abs. P. V. — ΑΒΓ, τῇ ΑΒΓ καὶ ΓΒΔ — lin. 28. ταῖς ab. B. O. — lin. 30. τὴν ab. O. — lin 34. Αἱ τρεῖς. ἅ . . . ἀλλήλαις εἰσὶν. B. O. — Lin. 2. κέντρῳ μὲν τῷ Δ, διαστήματι ἑνὶ τῶν Ε Ζ Η. p. 107.
B. — lin. 9. ἐδείχθη B. O. — ὁ ab. V. — τῷ ex conj. adjeci. — lin. 10. τῶν Ε. Ζ. Η. B. — lin. 12. ἐπὶ τὸ B. O. Ἐγγεγρ. ὡς ΖΕΗ abs. B. O. NB. — Euclides in hoc theoremate maximam trianguli lineam basin habuisse videtur angulumque eum tantum respexisse qui huic lineae oppositus sit. — lin. 21. εὐθ ab. B. O. — lin. 25. Quae uncis inclusa adjecimus, ea necessaria videntur ad explendam loci sententiam. In O. adnotatiunculam reperimus: „Legimus τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.“ — lin. 26. Συμπ. πρότ. ἐντ. κατὰ B. O. — lin. 29. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 31. ἐστιν ab. B. O. — Lin. 2. Καὶ περιγρ. B. O. — 10. quae uncis inclusa addidimus, p. 108.
ad subtilitatem demonstrationis pertinere videntur. — lin. 16. ἐστιν ab. O. — πάλιν ab. V. — lin. 19. καὶ γεγρ. . . . . ΑΒΓ abs. V. — lin. 21. Verba ὅπ. ἔδ. δ. post finem Corollarii. V. — lin. 29. τοῦ adjeci, in ceteris Cod. V. secutus. O. habet ὅτε δὲ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἐν ἡμικυκλίῳ τυγχάνουσα ὀρθὴ ἔσται· ὅταν δὲ ἐκτὸς* τῆς ΒΓ εὐθείας τὸ κέντρον πίπτῃ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ etc. idem B. Ad signum* notatur in O.: „Legimus τοῦ ΑΒΓ τριγώνου.“ Praeterea adnotatio exstat: Hic locus in omnibus, quos vidimus, codicibus graecis, tam Mss. quam impresso (sc. ed. B.) male se habet. Nos in versione pauculis immutatis restituimus; quod et antea fecerunt Campanus et Clavius — Vertitur autem: „Quare si datum triangulum sit oxygonium, ΔΖ ΕΖ intra triangulum convenient: sin in eo sit angulus rectus ΒΑΓ, in ipsa ΒΓ, et si sit major recto, extra ΑΒΓ.“ — lin. 30. τοῦ ab. B. O. — lin. 31. ἡ διδομένη γωνία B. O. — lin. 32. πεσοῦνται V. — Lin. 5 τὸν ab. O. — lin. 7. δύο ab. B. p. 109.
O. — lin. 17. γωνία ab. O. — lin. 21. omisimus δοθέντα ante ΑΒΓΔ cum V. — lin. 22. ἄρα δοθ. V. P. — lin. 27. ὃ (prius) ab. B. P. — ὃ (alterum) ab. B. O. — δεῖ δὲ. O. — δεῖ . . .

κύκλον abs. B. — Lin. 4. καὶ ab. O. — lin. 8. ἐστ. παράλλ. V. P. — p. 110.
Ὥστε . . . παράλληλος ab. B. O. — lin. 11. ἄρα ab. P. — lin. 14. καὶ ab. B. O. — ἐστ. ἴσ. post ΘΚ abjeci — καὶ ἑκατέρα . . . ἐστιν ἴση ab. V. — lin. 18. δὴ ab. B. O. — lin. 22. τετράπλ ab. V. — Lin. 5. εἰσὶ ab. V. — lin. 8. ἴσ. εἰς d. V. — lin. 12. εἰσ. d. V. — p. 111.
lin. 13. τῶν B. E. Z. Θ. Bas. (K excidit propter sequens Κύκλον) — lin. 19. ἐδείχθη ab. B. O. — lin. 20. μὲν ab. O. — lin. 24. Εἰς ἄρα τὸ δοθὲν V. P. — lin. 31. Ἐπεζευθεῖσαι P. O. male. — Lin. 2. ΒΓ ἐστὶ ἴσ. O. — lin. 3. γωνία ἄρα ἴσ. ἐστ. ἡ ὑπὸ ΔΑΓ p. 112.
γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ. V. P. ἡ ἄρα γων. ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ etc. B. O. — lin. 15. ΕΓ ΕΔ abs. B. — lin. 28. καὶ κέντρῳ τῷ Α καὶ διαστήματι τῷ ΑΒ. — Lin. 8. τῶν ab. V. — lin. 10. κύκλον ab. P. — Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν V. P. — Lin. 8. τῶν ab. V. — p. 113.
lin. 10. κύκλου. ab. P. — Καὶ ἐπεὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΒΔ V. P. — lin. 17. καὶ ἡ ὑπὸ ΒΔΑ ἄρα ἴση B. O. — lin. 23. Ἀλλὰ ἡ ΒΔ. — lin. 25. γωνίᾳ ab. B. O. — lin. 27. εἰς διπλ. V. P. — καὶ ab. V. — lin. 28. ἄρα διπλῆ ἐστι τῆς B. O. — lin. 32. συνίσταται P. — Lin. 5. Ἔστω . . . ἐγγράψαι ab. V. — lin. 9. τῶν ab. V. — lin. 13. p. 114.
Scribendum videtur ἑκατέρᾳ . . . ἑκατέραν. — lin. 16. δίχα ὑπὸ ἑκατέρας τῶν V. P. — lin. 30. 32. 35. ἐστ ἴσ. V. P. — lin. 35. γωνία ἄρα B. O. — Lin. 7. τε καὶ ἰσογ. abs. B. — lin. 25. ἐστιν ab. p. 115.
B. O. — lin. 30. ἐστιν ab. B. O. et ἴσον post ZK scriptum est B. O. — lin. 31. τὰ ἄρα. B. O. — lin. 34. λοιπῷ ab. V. — ἐστ. ἴσ. P. — ἡ ΒΚ τῇ ΓΚ. B. O. — Lin. 4. ἐστιν ab. V. — lin. 5. p. 116.
γωνίᾳ ab. V. — lin. 6. Abjeci ἐστ. ἴσ. post ΖΚΓ cum V. — ἐστιν post ἄρα adjiciendum existimavi. — lin. 8. ὑπὸ ab. P. — lin. 12. διπλῆ ab. V. — lin. 14. ἔστι δὲ . . . ἴση ab. B. O. — lin. 15. ἐστὶ ab. V. — lin. 16. ἑκατ. ab. V. — lin. 24. Καὶ ἐστὶν ἡ ΒΚ τῇ ΚΓ ἴση. V. P. — lin. 26. ἡ ab. in edd. omn. — Lin. 6. Περὶ τὸν . . . p. 117.
περιγέγραπται abs. B. P. — lin. 12. ὅ ἐστιν ab. V. P. — lin. 16. ὑφ' ἑκατέρας. B. O. — lin. 21. ἐστὶ post ἴση abjeci cum V. — lin. 22. τῇ βάσει P. — lin. 23. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 24. ἴσαι εἰσὶν. B. O. — lin. 26. διπλῆ post ΓΔΖ lineae subsequentis habent B. O. — lin. 28. ὑπὸ ab. edd. omn. — Lin. 4. ὀρθῇ ab. V. — lin. 6. p. 118.
ταῖς ab. V. — lin. 8. τὴν ab. P. — 15. 23. Η. Θ. Κ. Λ. Μ. B. — lin. 24. κύκλος ab. B. O. — lin. 34. ὅπερ ἐστὶν B. O. — Lin. 6. αἱ ab. B. O. — lin. 8. τὸ πρὸς τούτου P. τῷ πρὸς ᵻ B. — p. 119.

lin. 19. διαστήματι δὲ O. — lin. 21. περιγραφόμενος P. sed non V. nec B. nec O. — Sequuntur hoc verbum in B et O. haecce verba: περὶ τὸ ΑΒΓΔΕ πεντάγωνον ὅ ἐστιν ἰσόπλευρον καὶ ἰσογώνιον — lin. 23. τὸ δοθὲν ἄρα. — Lin. 5. ἐστι post ἰσογώνιον. B. — p. 120.
lin. 7. ΗΔ τῇ ΗΕ. P. — lin. 10. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 23. ἴσαι εἰσὶ ταῖς ὑπὸ ΕΗΔ ΔΗΓ ΓΗΒ O. P. Nos secuti sumus ed. P. Si illa ceterarum edd. retinenda essent, particulam ὥςτε abjiciendam putarem. — lin. 26. Verba αἱ ἓξ ἄρα . . . . ἀλλήλαις εἰσὶν exciderunt. B. — lin. 28. αἱ ἴσαι εὐθ. V. P. — lin. 29. Notas αἱ ΑΒ ΒΓ ΓΔ ΔΕ adjiciendas putavi — ἓξ ab. B. — lin. 34. περιφέρεια item περιφερείᾳ abs. V. P. — Lin. 3. περιφερείας ab. B. O. p. 121.
— lin. 4. δὲ B. O. — lin. 7. ἐστι ab. B. O. — lin. 13. δὴ ab. P. — lin. 15. totam hanc lineam ed. O. sola sic habet: Ὁμοίως δὲ τοῖς ἐπὶ τοῦ πενταγώνου ἐὰν διὰ τῶν κατὰ κύκλον (κύκλου?) διαιρεσέων. — lin. 16. ἀγάγομεν B. — lin. 21. τε καὶ περιγρ. abs. B. O., qui pro his habent ὅπερ ἔδει ποιῆσαι. — lin. 29. Ἐνηρμόσθω scripsi ex conject. — V. P. habent ἐγγεγράφθω et B. O. habent γεγράφθω.
— Lin. 3. κύκλου ἐστὶ. B. — lin. 6. ἐστι B. O. — lin. 7. εὐθείας p. 122.
ab. V. — lin. 11. ὅπερ. εδ. π. haec verba in fine coroll. habet. V. — lin. 16. Legas ἔτι τε. — lin. 18. πεντεκαιδεκάγωνον, ὅ ἐστιν ἰσόπλευρόν τε καὶ ἰσογώνιον. O. P. Nos secuti sumus V. Totum Corollarium ab. ed. B. — Memoratu digna quamvis huic loco minus accommodata Procli adnotatio est (p. 72 ed. B.) Τὸ τελευταῖον ἐν τῷ τετάρτῳ καθ' ὃ τοῦ πεντεκαιδεκαγώνου πλευρὰν ἐγγράφει τῷ κύκλῳ· τίνος ἕνεκά φησί τις αὐτὸν προβάλλειν ἢ τῆς πρὸς ἀστρονομίαν τούτου τοῦ προβλήματος ἀναφορᾶς; Ἐγγράψαντες γὰρ εἰς τὸν διὰ τῶν πόλων κύκλον τὸ πεντεκαιδεκάγωνον ἔχουσι τὴν ἀπόστασιν τῶν πόλων τοῦ τε ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ ζωδιακοῦ· πεντεκαιδεκαγωνικὴν γὰρ ἀλλήλων πλευρὰν ἀφεστήκασιν. — Attamen constat ab Eratosthene et Hipparcho angulum aequatoris et Zodiaci inventum esse: 23° 51′ 19,5″, qui nostris temporibus est 23° 28′ 19″. Illam igitur, quam Proclus hoc loco exhibet hujus anguli mensuram multis saeculis ante Euclidem veram fuisse patet. — Initio libri V. Scholium p. 123.
exstat in ed. B. quod e cod. Monac. emendatum huc recipiendum existimavi. — Σχολίον εἰς τὸ ε ἀδήλου — Σκοπὸς τῆς ε βίβλου περὶ ἀναλογιῶν διαλαβεῖν. Κοινὸν γὰρ τοῦτο τὸ βιβλίον γεωμετρίας τε καὶ ἀριθμητικῆς καὶ μουσικῆς καὶ πάσης ἁπλῶς μαθηματικῆς

ἐπιστήμης. Τὰ γὰρ ἐν αὐτῷ ἀποδεικνύμενα οὐ μόνον γεωμετρικοῖς ἁρμόζει θεωρήμασιν, ἀλλὰ καὶ πᾶσι τοῖς ὑπὸ μαθηματικὴν τεταγμένοις ὡς προείρηται ἐπιστημαῖς. ὁ μὲν οὖν σκοπὸς οὗτος, τὸ δὲ βιβλίον Εὐδόξου τινὸς εὕρεσιν εἶναι λέγουσι τοῦ Πλάτωνος διδασκάλου. Ἐπεὶ οὖν σκοπὸς περὶ ἀναλογιῶν, ἡ δὲ ἀναλογία λόγων τινῶν σχέσις· ἀναγκαῖον γνῶναι πρότερον, τίνες οἱ τοσοῦτοι λόγοι. δεῖ γὰρ τὰ ἁπλᾶ πρότερον γνῶναι τῶν συνθέτων. Ἐὰν τοίνυν τινὰ συγκρίνηται πρὸς ἄλληλα, φερέ εἰπεῖν δύο μεγέθη, αὐτὰ μὲν ὅροι καλοῦνται, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ ἑτέρου ἐπὶ τὸ ἕτερον μετάστασις διάστημα, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου πρὸς τὸ ἕτερον σύγκρισις σχέσις, ἣν ἐκάλεσαν οἱ παλαιοὶ λόγον, τὴν δὲ τούτου τοῦ λόγου πρὸς ἄλλον λόγον καθ᾽ ὁμοιότητα σύγκρισιν ἤτοι σχέσιν ἀναλογίαν προσηγόρευσαν, ἵνα μὴ ὡς τόδε τὸ μέγεθος συγκρίνηται ἀλλ᾽ ὡς ὅδε ὁ λόγος πρὸς τόνδε τὸν λόγον. Αὐτὴ δὲ ἡ σύγκρισις λόγου λέγεται λόγος, οἷον ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι ὧν ἡ ἑτέρα πρὸς τὴν λοιπὴν διπλασίονα λόγον ἔχει, τὸ ἀπὸ τῆς τὸν διπλασίονα λόγον ἐχούσης τετράγωνον τετραπλασίονα λόγον ἕξει πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς λοιπῆς τετράγωνον ἤπερ ἡ εὐθεῖα πρὸς τὴν εὐθεῖαν. Τὰ γὰρ μήκει διπλάσια δυνάμει τετραπλάσια. Ὁ τοίνυν λόγος τῶν τετραγώνων τετραπλάσιος ὢν διπλασίου ὄντος τοῦ λόγου τῶν εὐθειῶν διπλάσιός ἐστι. Καλεῖται δὲ οὗτος ὁ λόγου λόγος. Ἀλλ᾽ εἴη ἂν οὗτος ὑπὸ τὸ ποσόν. Διττὸς γὰρ ὁ λόγος ὁ μὲν ἐν ἀξίᾳ ὁ δὲ ἐν ποσῷ. Καὶ τοῦ μὲν ἐν ἀξίᾳ οὐδέν ἐστιν εἶδος πρὸς τὴν παροῦσαν χρεῖαν· τοῦ δὲ κατὰ τὸ ποσὸν εἴδη ἐστὶ πέντε· ὁ μὲν γάρ ἐστι πολλαπλάσιος ὡς τοῦ τρία ὁ ἕξ, ὁ δὲ ἐπιμόριος ὡς τοῦ τρία ὁ τέσσαρα, ὁ δὲ ἐπιμερὴς ὡς ὁ πέντε τοῦ τρία. Καὶ οὗτοι μὲν ἁπλοῖ, τούτων δὲ ἔτι ἁπλούστερος ὁ πολλαπλάσιος. Ἕτεροι δὲ ἐκ τούτων συνθέσεως γίνονται δύο ὅ τε πολλαπλασιεπιμόριος, ὡς τοῦ τρία ὁ ἕπτα καὶ ὁ πολλαπλασιεπιμερὴς ὡς τοῦ τρία ὁ ὄκτω. Ὑπόλογοι δέ εἰσιν οἱ ἐλάσσονες τῶν μειζόνων, ὑποπολλαπλάσιοι, ὑπεπιμόριοι, καὶ ἑξῆς ὁμοίως. Ἰστέον δὲ ὡς τὸ βιβλίον διχῇ διῄρηται καὶ περιέχει τὰ μὲν πρῶτα τὴν τῶν ἁπλουστέρων διδασκαλίαν τουτ᾽ ἔστι τὴν τῶν πολλαπλασίων· τὰ δὲ δεύτερα καθολικώτερα περὶ πάντων λόγων. Δεῖ γὰρ ἐπὶ παντός, ὡς εἴρηται, πράγματος τὴν τῶν ἁπλῶν ἡγεῖσθαι διδασκαλίαν. Τὸν δὲ τῆς τοῦ βιβλίου διαιρέσεως τρόπον καὶ ἡ τῶν ὅρων γεγένηται διαίρεσις, οἱ μὲν γὰρ πρότεροι περὶ ἐπιμερῶν, καὶ πολλαπλάσιων, οἱ δὲ ἑξῆς καθολικώτεροι περὶ πάντων τῶν λόγων.

Ordo definitionum paullo immutatus est in edd. Nostris si uteris
numeris in B. O. hunc reperies ordinem: 1. 2. 3. 4. 5. 7. 6. 8. 9. 10, in V.
P. huncce 1. 2. 3. 8. 4. 5. 7. 6. 9. 10. — Lin. 9. πρὸς ἀλλ' ab. V. — lin. 16.
ἑκατ. ab. O. — lin. 17. Verba ὑπερέχῃ — ἐλλείπῃ loca inter se im-
mutarunt B. O. — lin. 22. τό τε P. (typogr. menda) — lin. 25. μεγ. λόγ.
B. O. — lin. 27. δέ ἐστι B. O. — λόγων ὁμοιότης. B. O. — Lin. 2. p. 124.
ὅροις ἐλαχίστη V. P. — lin. 6. ἢ ab. B. — lin. 7. τὸ ab. V. —
lin. 8. ἑξῆς ὁμοίως ὡς ἂν V. P. — lin. 10. εἶναι ab. V. P. — In
his deff. ἀνάλογ. id significat, quod in libro ipso ἑξῆς ἀνάλογον. —
lin. 20. δὲ ab. V. — lin. 27. ἴσ. αὐτ. O. — lin. 31. Ea quae un-
cis inclusi sic incipiunt in edd. cet. Ἢ ἄλλως· λῆψις etc. — lin. 32
— 35. ab. haec definitio. V. — Lin. 3. ἴσ. αὐτ. O. — lin. 4. γί- p. 125.
νεται male edd. omn. — lin. 6. μεγέθεσιν ab. V. — lin. 8. ἡγού-
μενον πρὸς ἄλλο τι. — lin. 10. μεγέθων ab. O. — lin. 11. 16. ἕκα-
στον ἑκάστου ἰσάκις πολλαπλάσιον edd. cet. — lin. 20. ὅσα ἄρα με-
γέθη ἐστὶν ἐν τῷ *AB* ἴσα . . . B. O. — lin. 27. ἐστ. ἴσ. B. O. —
26. ἴσον ἄρα τὸ *AΠ* τῷ *E* καὶ τὰ *ΔΗ ΓΘ* etc. V. — lin. 27. καὶ
τὰ *HB ΘΔ* τοῖς *E Z*. O. Praeferenda videtur lectio Διὰ τὰ
αὐτὰ δὴ ἴσα ἐστι καὶ τὰ *HB ΘΔ* τοῖς *E Z*. — Lin. 19. μεγέθη ab. p. 126.
V. — lin. 25. Καὶ ante συντεθὲν abjeci. — Lin. 9. ὅτι ὁσαπλάσιον p. 127.
τὸ *EZ*. V. — lin. 13. τοσαῦτα δὴ καὶ B. O. — lin. 14. μὲν ab.
B. O. — lin. 15. ἔσται δὲ B. O. — Lin. 10. ἐστιν post τὸ *Π*. p. 128.
B. O. — lin. 13. ἄλλα ἃ ἐτ. ab. B. O. — lin. 24. τοῦ *M* τὸ *K*.
B. — lin. 25. Post ἔλαττον haecce addit V. Καὶ ἐπεὶ (εἰ) ὑπερέ-
χει τὸ *K* τοῦ *M*, καὶ τὸ *Λ* τοῦ *N*, καὶ εἰ ἴσον, ἴσον, καὶ εἰ ἔλατ-
τον, ἔλαττον. — lin. 31. Adest πόρισμα in edd. hocce. Ἐπεὶ οὖν
ἐδείχθη, ὅτι εἰ ὑπερέχει τὸ *K* τοῦ *M*, ὑπερέχει καὶ τὸ *Λ* τοῦ *N*·
καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλαττον, ἔλαττον· δηλονότι καὶ εἰ ὑπερέχει
τὸ *M* τοῦ *K*, ὑπερέχει καὶ τὸ *N* τοῦ *Λ*· καὶ εἰ ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ
ἔλασσον, ἔλασσον· καὶ διὰ τοῦτο ἔσται καὶ ὡς τὸ *H* πρὸς τὸ *E*,
οὕτως τὸ *Θ* πρὸς τὸ *Z*. Ἐκ δὴ τούτου φανερὸν ὅτι ἐὰν τέσσαρα
μεγέθη ἀνάλογον ᾖ, καὶ ἀνάπαλιν ἀνάλογον ἔσται. Ad ultima verba
ἐκ δὴ τούτου etc. corollarium incipere docemur in margine O. —
Notandum est, verba ὅπερ ἐδ. δεῖξαι non addita esse in fine corol-
larii sed in fine argumenti. Praeterea in B. λῆμμα inscribitur. — ὅτι
post ἐδείχθη ab. V. — Lin. 12. καὶ τὸ *EB* . . . . . τοῦ *ΓZ* abs. p. 129.
B. O. — lin. 24. ἰσάκις ἔσται V. P. — Lin. 4. τῶν αὐτῶν τῶν p. 130.

scribendum cum edd. cet. — lin. 8. ἴσον τῷ *Z*. V. — lin. 9. καὶ
ab. V. — lin. 19. τῷ *Z* τὸ *ΚΓ*. V. P. — lin. 20. ἐστ. ἴσ. O. —
εἰ ab. B. ὅτι O. — lin. 29. δέ τι ὃ V. P. — lin. 33. μὲν ab. B.
O. — Lin. 4. τοῦ *Γ* πολλαπλ. ab. V. — lin. 9. πολλαπλάσιόν p. 131.
ἐστιν· ἔστιν V. P. — lin. 11. *Λέγω* δὴ καὶ B. — *Λέγω* δὴ ὅτι καὶ
O. P. Nostrum habet V. — lin. 13. ὁμοίως δὴ P. V. — lin. 15.
ὑπερέχει τὸ *Z* V. — lin. 22. Hoc coroll. recepi hoc loco ex V. —
Altera enim demonstrationis pars satis probare mihi videtur, Eucli-
dem ipsum post theor. 4. hoc coroll. non addidisse. — lin. 31. τοῦ
Γ ab. V. P. — Lin. 6. ἕως οὗ . . . γένηται τοῦ *Δ* abs. V. P. — p. 132.
μεῖζον ἔσται. O. — lin. 7. καὶ ἔσται O. — μεῖζον ὂν P. — Linea
καὶ ἔστω . . . μεῖζον τοῦ Δ excidit. B. — lin. 11. ἕως ἂν τὸ B. O.
— lin. 19. τὸ *ΗΘ* τοῦ *ΑΒ* B. τὸ *Κ* τῷ *ΗΘ*. P. — lin. 27. *Μεῖ-
ζον* δὲ *ΖΠ*. — lin. 29. ἐπειδήπερ . . . τῶν *ΔΜ* μεῖζόν ἐστιν abs.
O. — lin. 30. τῶν *ΜΔ*. B. — Lin. 8. τὸ δὲ *Ν* τοῦ *ΖΘ*. V. P. — p. 133.
lin. 13. μεῖζ. ἐστ. τ. *ΕΒ*. B. O. — lin. 22. τοῦ *Μ* μὴ ἔλασσον
εἶναι. — lin. 26. ὡσαύτως O. — Lin. 2. κἀκεῖνα B. O. — lin. 6. p. 134.
ἂν ἕτερον B. — lin. 7. τὸ *Α* πρὸς τὸ B. — lin. 15. τὸ τὸν μείζ.
B. O. P. sed deest articulus τὸν in repetitione. B. O. deest hic
quoque in V. — lin. 16. ἔχον ἐκεῖνο μεῖζον B. O. P. Abjeci ἐκεῖνο
cum in repetitione B. O. non legatur. — lin. 23. ἂν ab. B. —
lin. 26. τὸ *Γ* τὸν ἐλάσσονα B. O. P. sed ab. artic. V. — λόγον
εἶχεν B. — lin. 28. ὅτι ab. V. — Lin. 10. λόγοι edd. cet. except. p. 135.
V. in repetitione B. O. habent λόγῳ. — lin. 16. μὲν ab. V. —
lin. 20. μὲν ab. O. — lin. 21. ἰσάκις πολλαπλάσια ἃ ἔτυχε. B. O. —
lin. 23. ἴσον ἐστὶ, ἴσον V. — lin. 24. ἐλλείπει, ἐλλείπει V. — lin. 26.
μὲν ab. O. — Lin. 26. ἴσον, ἴσον· καὶ εἰ ἔλασσον, ἔλασσον. V. — p. 136.
lin. 28. ἂν ᾖ V. P. — lin. 30. πολλαπλάσιον. V. — Lin. 7. 9. 14. p. 137.
ἢ pro ἤπερ V. — μὲν ab. B. O. — lin. 16. πέμπτον ab. V. —
ἕκτον ab. V. — lin. 17. τὸ *Γ* πρὸς . . . πρὸς τὸ *Z*. abs. V. —
lin. 20. ὑπερέχει τοῦ τοῦ Δ. π. B. O. — Lin. 20. *Α* τοῦ *Γ* μεῖζόν p. 138.
ἐστι. B. O. — lin. 21. μέγεθος ab. V. — lin. 29. καὶ ab. B. O. —
Lin. 8. μεγέθη ab. V. — lin. 28. ἀνάλογον ab. V. — ἐστιν P. V. — p. 139.
Lin. 2. ληφθ. κατ. abs. V. — lin. 14. 15. κἂν pro καὶ εἰ B. O. — p. 140.
lin. 34. ἐστι ab. B. O. — Lin. 2. τὸ *ΑΜ* τοῦ *ΓΖ* καὶ τὸ *ΗΚ* τοῦ p. 141.
ΑΒ. — lin. 17. ἄλλα ἃ ἔτυχεν V. — lin. 23. ὑπερέχει ἄρα καὶ τὸ
O. P. — ὑπερεχέτω ἄρα καὶ τὸ B. quod meam adjuvat conjectu-

ram. — lin. 29. ἐστι δὲ τὰ μὲν B. O. — Lin. 20. τὸ ab O. — p. 142.
Lin. 2. ὅλον τὸ *AB* πρὸς ὅλον τὸ *ΓΘ*. O. — lin. 3. ἄρα ἐστὶν p. 143.
ab. P. — lin. 6. ἄρα ab. P. — ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν. O. — lin. 14. Hoc
corollarium maxime vexari videmus in edd. — B. habet haecce: *Καὶ
ἐπεὶ ἐδείχθη ὡς τὸ AB πρὸς τὸ ΓΔ, οὕτως τὸ EB πρὸς τὸ ZΔ
καὶ ἐναλλὰξ ὡς τὸ AB πρὸς τὸ BE, οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ZΔ·
συγκείμενα ἄρα μεγέθη ἀνάλογόν ἐστιν. ἐδείχθη δὲ ὡς τὸ AB πρὸς
τὸ AE οὕτως τὸ ΓΔ πρὸς τὸ ΓZ. * εἰ γὰρ ὡς ἡγούμενον τὸ
AB πρὸς τὴν ὑπεροχὴν αὐτοῦ, ἣν ὑπερέχει τοῦ ἑπομένου τοῦ EB. *
καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι. Ἐκ δὴ τούτου φανερόν* etc. — Eadem ha-
bent V. O. omissis tamen, iis quae intra asteriscorum signa legun-
tur. — In P. litterarum signa mutata sunt. Legimus enim. *Καὶ
ἐπεὶ ὡς τὸ AB . . . . οὕτως τὸ AE πρὸς τὸ ΓZ· καὶ ἐναλλὰξ
ὡς . . . πρὸς τὸ AE, οὕτως . . . πρὸς τὸ ΓZ. συγκείμενα ἄρα . . .
ὡς τὸ AB πρὸς τὸ EB . . . πρὸς τὸ ZΔ. καὶ ἔστιν ἀναστρέψαντι.*
Hanc vero mutationem nihil ad locum emendandum facere viri docti
jam docuerunt. — Addit B. Scholium quoddam sine titulo, quod
etiam in cod. Mon. reperitur, hocce. *Γεγόνασι δὲ οἱ λόγοι καὶ
ἐπὶ τῶν ἰσάκις πολλαπλασίων καὶ ἐπὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ἐπειδήπερ
ἐὰν πρῶτον δευτέρου ἰσάκις ᾖ πολλαπλάσιον, καὶ τρίτον τετάρτου,
ἔσται καὶ ὡς τὸ πρῶτον πρὸς τὸ δεύτερον, οὕτως τὸ τρίτον πρὸς τὸ
τέταρτον, οὐκ ἔτι δὲ καὶ ἀντιστρέφει. Ἐὰν γὰρ ᾖ ὡς τὸ πρῶτον
πρὸς δεύτερον, οὕτως τρίτον πρὸς τέταρτον· οὐ πάντως ἔσται καὶ τὸ
μὲν πρῶτον τοῦ δευτέρου ἰσάκις πολλαπλάσιον τὸ δὲ τρίτον τοῦ τε-
τάρτου, καθάπερ ἐπὶ τῶν ἡμιολιῶν ἢ ἐπιτρίτων λόγων* (— ον,
— ον B.) *ἢ τῶν τοιούτων· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* — lin. 19. *σὺν δύο
λαμβανόμεναι καὶ ἐν τῷ* etc. B. P. — *καὶ* ab. O. et in repetitione
B. — lin. 22. *καὶ ἐὰν* pro *κἂν* V. B. — lin. 26. *καὶ ἐν τῷ* B. P. —
lin. 31. *ἄλλο δὲ ὃ ἔτυχε* B. O. — Lin. 2. *οὕτως* ab. V. — *ὡς δὲ* p. 144.
Γ πρὸς B. V. — lin. 6. *τὸ τὸν μειζ.* etc. P. — *ἔχον ἐκεῖνο μ. ε.*
B. O. Nos secuti V. — lin. 14. *σὺν δυο λαμβ. καὶ ἐν.* B. O. P. —
lin. 19. *μεγέθη ἀνάλογον* V. — lin. 21. *καὶ ἐν τῷ* B. O. P. —
lin. 34. *μεῖζόν ἐστιν ἄρα* V. P. — Lin. 2. *ὅτι κἂν ἴσον, ἴσον· δη-* p. 145.
λονότι κἂν ἴσον ᾖ τὸ A τῷ Γ, ἴσον ἔσται καὶ τὸ Δ τῷ Z etc. B.
O. — lin. 8. *σύνδυο λαμβ. καὶ* P. — *καὶ* ab. O. — lin. 16. *ὡς τὸ
A . . . τὸ Z* ab. V. — lin. 28. *σύνδ. λαμβ. κ.* edd. omn. — *τὰ
OΛN* ab. B. — lin. 33. Post *τὸ Z* add. V. *Καὶ ἐναλλὰξ ἄρα
ἐστὶν ὡς τὸ A πρὸς τὸ Δ, οὕτως τὸ Γ πρὸς τὸ Z.* — Lin. 11. *πρὸς* p. 146.

τὸ *E* . . . οὕτως τὸ Δ. haec linea excidit B. — lin. 21. οὕτως ab. B. — lin. 24. ἄρα additum est a me. Praeterea totus hic locus καὶ ἐναλλάξ . . usque ad πρὸς το *M.* (lin. 35.) deest O. in qua pro istis legimus haecce. *Καὶ εἴληπται τῶν μὲν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Θ Κ τῶν δὲ Γ Ε ἄλλα ἃ ἔτυχεν ἰσάκις πολλαπλάσια τὰ Λ Μ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ Θ πρὸς τὸ Λ, οὕτως τὸ Κ πρὸς τὸ Μ.* Haec adsunt etiam in B. sed post finem eorum adduntur omnia ea, quae sequuntur inde a linea 24. καὶ ἐναλλάξ usque ad finem τὸ *M.* — lin. 30. 35. οὕτως ab. B. — lin. 34. ἀνάπαλιν pro ἐναλλάξ. B. —
Lin. 2. δή P. — lin. 3. ἐστὶν ἀνάλογον B. — lin. 16. ἔχει V. — p. 147.
lin. 22. *Πρῶτον μὲν γὰρ* V. P. — lin. 26. τὸ πρῶτον O. — Lin. 2. p. 148.
ὡς ἄρα τὸ O. — lin. 11. δύο τῶν O. — τὰ δύο τῶν V. — lin. 15.
μὲν ab. B. O. — lin. 19. οὖν ab. V. — lin. 20. τῷ μὲν *E* τὸ *AH*,
τῷ δὲ *Z* τὸ *ΓΘ* B. O. — lin. 29. ἐστ ἄνισ. B. O. — lin. 31. μὲν
ab. B. — Lin. 9. λόγων ab. O. — ὅροι ab. P. V. — λόγοι B. — p. 149.
lin. 11. ἡ ab. V. — lin. 15. Definitio quinta, cujus in toto libro nusquam fit usus, in V. ad marginem adscripta est, quare omissa est in P. et a nobis uncis inclusa. Attamen, qui scholium, quod legimus initio libri in B. recte perpenderit, antiquissimis temporibus hanc definitionem elementis jam (nescio an a Theone) adjectam fuisse intelliget.

Σχόλιον εἰς τὸ ς̄ ἀδήλου.

Λόγος ἐκ λόγων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν πηλικότητες τινῶν λόγων, πολλαπλασιαζόμεναι ποιῶσι λόγον. Ἐκεῖνος ὁ λόγος συγκεῖσθαι ἐκ τῶν λόγων ἐκείνων λέγεται, ὧν αἱ πηλικότητες ποιῶσιν αὐτόν. πηλικότητας δὲ λέγει, ἀφ᾽ ὧν ὀνομάζονται, ὡς ἀπὸ τῶν δύο, ὁ διπλάσιος. ἔστω λόγος τοῦ ὀκτὼ πρὸς τὸν δ̄ διπλασίων, καὶ αὖ τοῦ δ̄ πρὸς τὸν β̄ διπλασίων καὶ αὐτός· ὁ τετραπλάσιος οὖν λόγος τοῦ η̄ πρὸς τὸν β̄ συγκεῖσθαι λέγεται ἐκ τῶν δύο λόγων, τοῦ τε η̄ πρὸς τὸν δ̄ καὶ τοῦ δ̄ πρὸς τὸν β̄, ὅτι αἱ πηλικότητες αὐτῶν ποιοῦσιν αὐτὸν οὕτως. Ἐπεὶ ὡς εἴρηται πηλικότητες οἱ ἀριθμοὶ λέγονται, ἀφ᾽ ὧν αἱ σχέσεις ὀνομάζονται, οἷον ἀπὸ τῶν δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα, ὁ διπλάσιος, καὶ τριπλάσιος καὶ τετραπλάσιος λόγος. ὀνομάζεται δὲ καὶ τὸ ἥμισυ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς, ἔστι δὲ ὁ δύο τοῦ τέσσαρα ἥμισυς. λαμβάνω τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, ἀφ᾽ ἧς ὁ δύο τῶν τεσσάρων ἥμισυς λέγεται ὧν λεπτῶν πρώτων λ̄, λαμβάνω καὶ ἕτερον ἥμισυ μοναδος, ἀφ᾽ ἧς πάλιν ὁ δ̄ ἥμισυς λέγεται τοῦ η̄, καὶ πολλαπλασιάζω

τὰ λ πρῶτα λεπτὰ ἐπὶ τὰ λ πρῶτα καὶ αὐτὰ λεπτὰ καὶ γίνονται δευτέρα λεπτὰ, ἐννακόσια. ταῦτα ἀναβιβάζω ἤτοι μοιράζω, γίνονται δέκα καὶ πέντε πρῶτα λεπτὰ, ἅτινα δεκαπέντε πρῶτα λεπτὰ, τέταρτον εἰσὶ μονάδος, τετράκις γὰρ ιε ξ. ἀλλὰ δὴ ἔστω ὁ μέσος τοῦ β καὶ η, ὁ μ, καὶ ἐπεὶ τὰ δύο τοῦ μ, εἰκοστόν ἐστιν, λαμβάνω τὸ εἰκοστὸν τῆς μονάδος ὂν λεπτῶν τριῶν. ἐπεὶ πάλιν ὁ μ πενταπλάσιος ἐστὶ τοῦ η, πεμπτὸν μέρος τοῦ μ ὁ η λέγεται, πολλαπλασιάζω τὸν τρία, τὸ εἰκοστὸν τοῦ ξ, παρὰ τὸν ε, ἀφ᾽ οὗ πέμπτον μέρος ὁ η τοῦ μ λέγεται, καὶ γίνονται ιε λεπτὰ ἅπερ ἐστὶ τέταρτον μονάδος. καὶ οὕτως πάλιν ὁ β τοῦ η, τέταρτός ἐστι. Ἔστω πάλιν μεταξὺ τῶν δ καὶ ιβ, ὁ η. ἐπεὶ ὁ δ ἥμισυς ἐστὶ τοῦ η, ὁ δὲ η ὑφημιόλιος τοῦ ιβ λαμβάνω τὰ λεπτὰ λ τὸ ἥμισυ τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ μ λεπτὰ τὸν ὑφημιόλιον τῆς μονάδος, καὶ ποιῶ τὰ λ παρὰ τα μ, καὶ γίνονται χιλιαδιακόσια δευτέρα λεπτὰ· ἀναβιβάζω ταῦτα, γίνονται πρῶτα λεπτὰ κ. τὰ κ τρίτον εἰσὶ μονάδος, καὶ ὁ δ οὖν τρίτον ἐστι τοῦ ιβ. ἔστω μεταξὺ τοῦ β καὶ τοῦ ιβ ὁ δ. καὶ ἐπεὶ ὁ δύο τοῦ δ ἥμισυ ἐστὶν, ὁ δὲ δ τοῦ ιβ ὑποτριπλάσιος, λαμβάνω τὰ λ λεπτὰ τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ καὶ τὰ κ τὸ τρίτον αὐτῆς, ἀπὸ γὰρ τοῦ τρία ὁ τριπλάσιος παρωνόμασται. Καὶ ποιῶ τὰ λ ἐπὶ τὰ κ, γίνονται ἑξακόσια δευτέρα λεπτὰ· ταῦτα ἀναβιβάζω, καὶ γίνονται δέκα πρῶτα· τὰ δέκα, ἕκτον μονάδος. καὶ ὁ β ἕκτον τοῦ ιβ. πάλιν ἔστω μεταξὺ τοῦ δ καὶ ε, ὁ κ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ ὑποπενταπλάσιός ἐστι τοῦ κ, ὁ δὲ κ τετραπλάσιος τοῦ ε, λαμβάνω τὸ τῆς μονάδος πέμπτον τὰ ιβ καὶ τὸν δ ἀφ᾽ οὗ ὁ ε τετραπλάσιον λέγεται τοῦ κ, καὶ ποιῶ τὸ τέταρτον περὶ τὸ δωδέκατον, γίνονται μη, ὑποεπιτέταρτος τῆς μονάδος. Καὶ ὁ δ τοῦ ε ὑποεπιτέταρτός ἐστιν. ἔστω πάλιν μεταξὺ τοῦ β καὶ δ ὁ γ. καὶ ἐπεὶ ὁ δ τοῦ γ ἐπιτριτός ἐστιν, ἐπεὶ ἔχει αὐτὸν καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ, ὅ ἐστι μονὰς, λαμβάνω τὴν μονάδα, ἥτις ἐστὶ λεπτὰ ξ. ἀφ᾽ ἧς, μονάδος τρίτον οὔσης τοῦ τρία, ὁ δ ἐπίτριτος αὐτοῦ λέγεται. λαμβάνω καὶ τὸν λ, τὸ τῆς μονάδος ἥμισυ, διὰ τὸν τρία ἡμιόλιον εἶναι τοῦ β. ὀνομάζεται δὲ τὸ ἡμιόλιον ἀπὸ τοῦ ἡμίσεως. Καὶ ποιῶ τὸν λ παρὰ τὴν μονάδα, ἤτοι ξ λεπτὰ, καὶ γίνονται χίλια ὀκτακόσια δευτέρα λεπτά. ταῦτα ἀναβιβάζω καὶ γίνεται λ πρῶτα λεπτὰ· ταῦτα ἥμισυ μονάδος. καὶ ὁ β τοῦ δ, ἥμισυς ἐστιν.

Λόγος ἐκ δύο λόγων ἢ καὶ πλειόνων συγκεῖσθαι λέγεται, ὅταν αἱ τῶν λόγων πηλικότητες, πολυπλασιασθεῖσαι, ποιῶσι τινὰ πηλικότητα λόγου. Ἐχέτω γὰρ τὸ αβ πρὸς τὸ γδ λόγον δεδόμενον, οἷον, διπλάσιον ἢ τριπλάσιον ἤ τινα ἄλλον, καὶ τὸ γδ πρὸς τὸ εζ καὶ αὐτὸ δεδόμενον. λέγω ὅτι ὁ τοῦ αβ πρὸς τὸ εζ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ αβ πρὸς τὸ γδ, καὶ τοῦ γδ πρὸς τὸ εζ, ἤτοι ὅτι ἐὰν ἡ τοῦ αβ πρὸς τὸ γδ λόγου πηλικότης πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὴν τοῦ γδ πρὸς τὸ εζ λόγου πηλικότητα, ποιεῖ τὴν τοῦ αβ πρὸς εζ. ἔσω γὰρ πρότερον τὸ μὲν αβ τοῦ γδ μεῖζον, καὶ τὸ γδ τοῦ εζ. καὶ ἔστω τὸ μὲν αβ τοῦ γδ διπλάσιον, τὸ δὲ γδ τοῦ εζ τριπλάσιον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν γδ τοῦ εζ τριπλάσιόν ἐστι, τοῦ δὲ γδ διπλάσιον τὸ αβ, τὸ ἄρα αβ τοῦ εζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον, ἐπειδὴ ἐὰν τὸ τριπλάσιόν τινος διπλασιάσωμεν, γίνεται αὐτοῦ ἑξαπλάσιον. τοῦτο γάρ ἐστι κυρίως σύνθεσις. Ἢ οὕτως· ἐπεὶ τὸ αβ τοῦ γδ ἐστὶ διπλάσιον, διῃρήσθω τὸ αβ εἰς τὰ τῷ γδ ἴσα, καὶ ἔστω ταῦτα τὰ αη ηβ· καὶ ἐπεὶ τὸ γδ τοῦ εζ ἐστὶ τριπλάσιον, ἴσον δὲ τὸ αη τῷ γδ, καὶ τὸ αη ἄρα τοῦ εζ ἐστὶ τριπλάσιον, ὅλον ἄρα τὸ αβ τοῦ εζ ἐστὶ ἑξαπλάσιον. ὁ ἄρα τοῦ αβ πρὸς τὸ εζ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ γδ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ αβ προς γδ καὶ τοῦ γδ πρὸς εζ λόγου. ὁμοίως δὲ κἂν ἔλαττον ᾖ τὸ γδ ἑκατέρων τῶν αβ εζ, συναχθήσεται. ἔστω γὰρ πάλιν τὸ μὲν αβ τοῦ γδ τριπλάσιον, τὸ δὲ γδ ἥμισυ τοῦ εζ. καὶ ἐπεὶ τὸ γδ ἥμισύ ἐστι τοῦ εζ, τοῦ δὲ γδ τριπλάσιον τὸ αβ· τὸ αβ ἄρα ἡμιόλιόν ἐστι τοῦ εζ. ἐὰν γὰρ τὸ ἥμισύ τινος τριπλασιάσωμεν, ἥξει αὐτὸ ἅπαξ καὶ ἡμισάκις. καὶ ἐπεὶ τὸ μὲν αβ τοῦ γδ ἐστὶ τριπλάσιον, τὸ δὲ γδ τοῦ εζ ἐστὶ ἥμισυ, ὅιων ἐστὶ τὸ αβ ἴσων τῷ γδ τριῶν, τοιούτων ἐστι τὸ εζ δύο, ὥστε ἡμιόλιον ἐστὶ τὸ αβ τοῦ εζ. ὁ ἄρα τοῦ αβ πρὸς τὸ εζ λόγος συνῆπται διὰ τοῦ γδ μέσου ὅρου συγκείμενος ἔκ τε τοῦ αβ πρὸς γδ, καὶ τοῦ γδ πρὸς εζ λόγου. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστω τὸ γδ ἑκατέρου τῶν αβ εζ μεῖζον. καὶ ἔστω τὸ μὲν αβ τοῦ γδ ἥμισυ μέρος, τὸ δὲ γδ τοῦ εζ ἐπίτριτον. ἐπεὶ οὖν ὅιων ἐστὶ τὸ αβ δύο, τοιούτων ἐστὶ τὸ γδ τεσσάρων, ὅιων δὲ τὸ γδ τεσσάρων, τοιούτων τὸ εζ τριῶν, καὶ ὅιων ἄρα τὸ αβ δύο, τοιούτων εζ τριῶν· συνῆπται ἄρα πάλιν ὁ τοῦ αβ πρὸς εζ λόγος διὰ τοῦ γδ μέσου

ὅρου, ὁ τῶν δύο πρὸς τὰ τρία. ὁμοίως δὴ καὶ ἐπὶ πλειόνων, καὶ
ἐπὶ τῶν λοιπῶν πτώσεων. καὶ δῆλον ὅτι ἐὰν ἀπὸ τοῦ συγκειμένου
λόγου εἷς ὁποιοσοῦν τῶν συντεθέντων ἀφαιρέθῃ, ἑνὸς τῶν ἁπλῶν
ἀφανισθέντος, οἱ λοιποὶ τῶν συντεθέντων καταλειφθήσονται. —
lin. 17. Legimus in O. in margine τινα cum Theone (cf. Theon
ad Almagest. ed. B. p. 62.); in libb. vulgatis τινάς. — lin. 33. τὸ
ΑΓ sic V. sed cet. Edd. habent τὴν ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΒΔ κά-
θετον ἀγομένην. — Lin. 6. ὁσαιδηποτοῦν ab. V. — Lin. 5. ὡς ἡ p.150.15
μὲν. — lin. 6. ΑΓΔ τρίγωνον V. P. — lin. 7. τριγ. ab. B. O. —
lin. 10. πρὸς τὸ ΖΓ. B. O. — lin. 16. εὐθ. παράλληλος B. O. —
lin. 16. λοιπὰς et lin. 18. δύο adjiciendum puto. — lin. 20. πλευ-
ρὰν παράλληλος O. — lin. 25. Ἴσον ἄρα B. O. — lin. 26. τε a me
adjectum est. — lin. 29. τρίγων. ab. V. — lin. 34. δὴ καὶ ὡς V. —
Ὡς δὲ τὸ ΓΔΕ πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον, διὰ τὰ αὐτὰ οὕτως ἡ ΓΕ
πρὸς τὴν ΕΑ B. — Lin. 6. κατὰ τὰ ΔΕ σημεῖα abs. B. — Lin. 13. p. 152.
14. 15. 16. 17. τρίγωνον post ΑΔΕ add. V. P. — lin. 13. ἡ ab.
P. — lin. 20. καὶ ἐπὶ V. B. P. — lin. 27. τέμνει B. — lin. 28.
τμήματα ab. B. — τῆς ab. O. — ἡ ab. B. O. — lin. 33. τέμνει
edd. omn. — Lin. 8. ἐμπέπτωκεν B. — lin. 9. ἡ ab. B. — lin. 14. p. 153.
ἄρα γωνία abs. B. O. — lin. 20. ὡς ἄρα ἡ V. P. — ἔστιν ἄρα ὡς
ἡ B. — lin. 28. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 30. ἦκται παράλληλος B.
O. — lin. 34. ΒΑΔ ἴση, ἡ δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ἐναλλὰξ τῇ ὑπὸ
ΓΑΔ ἐστὶν ἴση. V. P. — Lin. 3. γωνία ab. B. O. — lin. 5. τέμ- p. 154.
νει B. O. — lin. 11. 17. πλευραὶ post ὑποτείνουσαι abjeci cum V.
— lin. 12. Ἔστωσαν B. O. — lin. 13. μὲν ab. B. O. — lin. 21.
24. περὶ ΑΒΓ O. — lin. 25. ἄρα ab. V. — lin. 30. τῶν πλευρῶν
ab. V. — Lin. 5. ἐναλλὰξ ἄρα B. O. P. nos secuti V. — lin. 6. p. 155.
Ἐπεὶ οὖν B. O. — lin. 7. ὡς ἡ μὲν ΑΒ V. — lin. 9. καὶ ab. B. O.
— ἐστι B. O. P. — lin. 31. ἡ πρὸς τὸ Δ λοιπῇ πρὸς τῷ Π ἐστ.
ἴσ. V. P. — lin. 34. τριγώνῳ ab. V. P. — Lin. 3. γωνίας πλευραὶ p. 156.
ὑποτ. B. — lin. 4. οὕτως ab. V. — lin. 6. καὶ ὡς V. P. — lin. 13.
ΖΗ ἐστὶν ἴση edd. omn. except. V. — lin. 20. ἐστ. ἴσ. abs. V. —
lin. 21. καὶ ἡ μὲν ὑπὸ V. P. — lin. 23. Δ ἐστὶν ἴση. B. O. —
Lin. 9. γωνίᾳ B. — γωνία O. — ab. V. P. — lin. 11. Β γωνία V. p. 157.
— lin. 19. ἐστὶν ἴση. B. O. — lin. 22. ἑκατέρα ἐκ. abs. V. P. —
lin. 24. ἡ δὲ πρὸς τῷ Π τῇ πρὸς τῷ Ε. B. O. — Lin. 4. τὰς ἄλ- p. 158.
λας B. O. P. nos secuti V. — lin. 12. τὰς πλευρὰς ἀναλ. τὰς ὑπὸ ΑΒΓ

ΔEZ B. O. — lin. 16. ἐστι P. B. O. — lin. 26. *ABH* γωνία B.
O. P. Nos cum V. — lin. 30. ὑπόκειται οὕτως V. P. — lin. 31
καὶ ὡς . . . πρὸς τὴν *BH* abs. V. — lin. 33. ἐστιν ab. B. O. —
lin. 34. ἡ ὑπὸ τῶν *BHΓ* γωνία τῆς ὑπὸ *BΓH* B. O. — Lin. 2. p. 159.
τὸ *Γ* B. O. — καὶ ab. V. P. — lin. 14. ἐστὶν ἴσογ. B. O. —
lin. 20. Τριγώνου δὲ B. O. — Lin. 5. καὶ ἀλλήλ. B. O. P. — p. 160.
lin. 7. γωνία ab. V. — lin. 16. τῇ πρὸς τῷ *Γ* abs. V. — lin. 19.
αὐτῶν ab. V. O. P. — lin. 19. ἄρα post *ABΔ* B. — lin. 22. ἐστι
ab. V. — lin. 23. τὸ *AΔΓ* τρίγ. ὅμ. ἐστ. τῷ *ABΓ* τριγ. B. O. —
lin. 25. ὅμοιόν ἐστι post τριγώνῳ O. — lin. 35. γωνίαν V. B. —
Lin. 4. ἡ *BA* πρὸς τὴν *AΓ*, ὑποτείνουσαι τὰς ὀρθάς· ὅμοιον ἄρα p. 161.
etc. V. et B. in margine. (Quae ob brevitatem placerent si ita
mutari possent: ὑποτείνουσι γὰρ τὰς etc.) — lin. 14. ἐστὶν ab. V.
pro his: ὅπερ ἔδει δεῖξαι, quae in *B* post finem corollarii. — lin. 22.
καὶ ab. V. — lin. 26. παράλληλος ἤχθω τῇ *BΓ* ἡ ΔZ. B. O. —
lin. 24. δεῖξαι pro ποιῆσαι B. non solum hoc loco, sed etiam in fine
propositionum 10. 11. 12. — Lin. 4. εὐθείᾳ ab. V. P. — lin. 6. p. 162.
δεῖ δὴ etc. . . τεμεῖν abs. V. — O. habet τετμημένη ἡ *AΓ*· δεῖ δὴ
τὴν . . . . τεμεῖν. Ἔστω τετμημένη ἡ *AΓ* κατὰ τὰ ΔE. idem *B*
omisso verbo τετμημένη. — lin. 8. *Καὶ* κείσθωσαν edd. omn. —
lin. 32. δύο εὐθ. ab. V. P. — lin. 33. ἀνάλογον εὑρεῖν. V. — To-
tum hunc locum, in quo verborum ordinem mutandum existimavi,
sic habent edd. cet. Ἔστωσαν αἱ δοθ. αἱ *AB AΓ* καὶ κείσθωσαν
γωνίαν περιέχουσαι τυχοῦσαν· δεῖ δὴ τῶν . . . προσευρεῖν. Ἐκβλή-
σθωσαν γὰρ αἱ *AB AΓ* ἐπὶ τὰ etc. — Lin. 12. ἀνάλογον αὐταῖς p. 163.
B. O. P. — προσεύρεται P. in hoc et sequentibb. 12. 13. — lin. 17.
εὐθειῶν ab. V. P. — lin. 20. τυχοῦσαν ab. V. — lin. 24. τῶν πλ.
ab. V. — lin. 25. ἡ B. O. P. — Lin. 19. *Τῶν* ἴσων τε καὶ μιὰν p. 164.
μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν παραλληλογράμμων. B. O. — lin. 21. καὶ
ὧν παραλληλογράμμων μίαν μιᾷ ἴσην ἐχόντων γωνίαν ἀντιπεπ. B. O.
— lin. 25. τε καὶ ἴσογ. ab. O. — lin. 26. In hisce similiter ut
supra mutavi ordinem. Edd. enim πρὸς τῷ *B* γωνίας, καὶ κείσθω-
σαν ἐπ' εὐθείας αἱ *AB BE*, ἐπ' εὐθείας ἄρα εἰσὶ καὶ αἱ *ZB BH*
λέγω ὅτι etc. . . . πρὸς τὴν *BZ*. Συμπεπληρώσθω γὰρ τὸ etc. —
Lin. 4. ὥς τε B. — lin. 6. *Τῶν* ἄρα *AB BΓ*. — lin. 9. ἀντιπε- p. 165.
πόνθασιν αἱ . . . γωνίας καὶ des. Vat. — lin. 17. παραλληλόγρ.
post *ZE* ab. B. O. — lin. 27. τριγώνων ab. O. — lin. 33. αἱ πλευ-

ϱαὶ περὶ τὰς V. — Lin. 6. τι a me insertum. — lin. 8. τρίγωνον p. 166
ab. B. O. — lin. 10. τὸ ΕΑΔ τρίγωνον B. O. — lin. 12. τριγώ-
νων ἄρα. B. O. — lin. 33. κἂν V. P. — καὶ εἰ B. O. — Lin. 5. p. 167
αἱ τέσσαρες . . . αἱ V. P. — τέσσαρες . . . αἱ ΑΒ ΓΔ ΕΖ ἀνάλο-
γον B. O. — lin. 10. γὰρ ab. V. — lin. 17. παραλληλογρ. ἄρα B.
O. — lin. 18. αἱ ab. V. — lin. 24. ἡ Ε τῇ ΓΘ V. — O. addit πε-
ριεχόμενον ὀρθογώνιον post ΓΔ Ε. — lin. 27. τῶν ab. P. — lin. 28.
τῶν ab. B. O. — lin. 33. γάρ εστιν ἡ. V. P. — τῇ Ζ ἡ ΑΗ B.
O. — lin. 35. καὶ ἔστιν V. P. — Lin. 13. κἂν V. P. — καὶ εἰ B. p. 168
O. Nos et in hoc et in antecedenti Scholiast. Mon. secuti sumus
hoc theorema singulis verbis repetentem. — lin. 20. τῆς μέσης τῆς
Β B. O. — lin. 29. τῷ ἀπὸ τῆς Β ἴσον. ἴσ. B. O. — Lin. 4. τῷ p. 169
ὑπὸ τῶν ΒΔ B. O. — lin. 23. ἡ ὑπὸ ΗΑΒ ἴση. B. O. — lin. 24.
ἴση ab. B. O. — λοιπῇ ab. V. — Lin. 3. ἤτε ΖΓ V. — lin. 4. ἡ p. 170
ab. P. — lin. 13. γωνίας αὐτῷ πλευρὰς B. O. P. — αὐτῶν V. Nos
abjecimus αὐτ. — lin. 17. τῷ ab. in edd. — τῷ ΓΕ ab. B. — lin. 24. τὸ
Β B. O. — Lin. 4. τριγώνων ἄρα B. O. — lin. 12. λόγον ἔχῃ V. p. 171
— lin. 16. τριγών. ab. B. O. — lin. 19. τρίγ. post ΔΕΖ ab. B. O.
— lin. 24. ὅτι κἂν B. O. — lin. 26. τῆς πρώτης εἶδος — lin. 27.
Ἐπείπερ edd. omn. Omnia quae uncis inclusi, Euclidis esse non
videntur. — lin. 30. V. addit ad Coroll. ὅπερ ἔδ. δεῖξ. — lin. 32.
εἰς τὰ ὅμ. B. sed ceteris locis habet τε. — Lin. 2. τὸ ab. O. — p. 172
lin. 11. γὰρ ab. B. — lin. 14. 15. 24. 25. 27. 28. τὴν ab. V. P. —
lin. 22. λοιπῇ ab. V. — lin. 30. εἰσὶ ab. B. O. — lin. 31. ἔτι
τὸ . . . τριγώνῳ abs. B. O. — Lin. 7. ἡ ab. B. O. — lin. 12. τὴν p. 173
ab. P. — lin. 14. γωνία ab. B. O. — lin. 16. Ἔστι δὲ V. — lin. 18.
ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 22. et seqq. τὴν ab. ubique P. post praepos.
πρός. — lin. 25. ὡς μὲν ἡ V. P. — lin. 26. τὸ ab. P. — lin. 27.
τὸ ab. B. P. — lin. 28. ἄρα ab. B. O. — Lin. 2. τὸ ab. V. — lin. 7. τρίγ. p. 174.
ab. post ΗΑΘ B. O. — lin. 10. τρίγ ab. post ΕΓΑ B. O. — lin. 12. 18.
τριγ. ab. post ΖΗΑ O. B. — lin. 12. τὸ ab. B. — lin. 25. εἰς τὰ B. O. —
lin. 28. δὴ edd. cet. nos secuti V. — lin. 31. καὶ ab. B. O. — lin. 32. pro
εἰσὶ mallem ἐστὶ. — lin. 33. In fine addit V. ὅπερ. ἔδ. δεῖξ. — Lin. 6. p. 175.
καὶ ab. B. — δὴ V. — lin. 8. πλευρὰν ab. B. O. — lin. 14. Ad-
jecta est demonstratio altera, quam vide in Append. — lin. 19.
ἐστ. ὅμ. O. — lin. 25. ὥςτε καὶ . . . ἀνάλογον ἔχει ab. V. P. —
lin. 29. Haec conclusio desideratur in codd. et edd. Adsunt tamen

notissima illa verba ὅπ. ἴδ. δ. — Lin. 5. αὗται O. P. (B. αὗται.) p. 176.
— lin. 16. ἡ μὲν *AB* B. O. — lin. 17. ἡ ab. P. — lin. 20. οὕτως καὶ τὸ B. O. — lin. 21. καὶ ab. O. — καὶ ὡς . . . τὸ *NΘ* abs. B. — lin. 25. καὶ ab. B. O. — lin. 27. V. P. ita initio demonstrationis: *Εἰ γὰρ μή ἐστιν ὡς ἡ AB πρὸς τὴν ΓΔ, οὕτως EZ πρὸς τὴν HΘ· ἔστω ὡς ἡ AB* etc. — Lin. 4. καὶ ὡς . . . τὸ *NΘ* ads. B. O. — p. 177.
lin. 5. *NΘ* καὶ *ΣP* B. O. — lin. 8. ἐστὶν ab. V. P. — lin. 15. καὶ ὅμοια ἢ B. O. Dubitari potest, num Euclidis sit hoc corollar. — lin. 28. τῆς in τῇ mutandum est. — Lin. 6. τοῦ τε . . . p. 178.
τὴν *ΓE* ab. V. — lin. 18. 19. τὴν ab. V. — lin. 32. παραλληλόγρ. post *ΓZ* ab. B. O. — Lin. 11. αὐτῷ O. — lin. 13. τῷ τε abs. P. p. 179.
O. — lin. 18. τῶν πλευρ. ab. V. — lin. 19. ἄρα post ἀνάλογον ejeci cum V. — lin. 22. ἡ ab. O. — lin. 23. συνθέντι ἄρα B. O. — lin. 24. πρὸς *AΠ* ἐναλλάξ etc. V. — lin. 26. τῶν *ABΓΔ EΠ* ἄρα. — lin. 30. Verba ὑπὸ *AΔΓ* . . . τῇ abs. V. — lin. 34. abjeci ἄρα post ὅλον cum cod. V. — Lin. 3. ἰσογ. ἐστ. ante τῷ *EΠ* habent p. 180.
B. O. — lin. 7. ὡς *TB* πρὸς O. — lin. 15. καὶ post δὴ abjeci cum V. — lin. 18. παραλληλογρ. ab. V. — lin. 29. ᾧ δὲ δεῖ ἴσον V. P. — lin. 31. γὰρ post Παραβεβλ. abjiciendum putavi. — Lin. 5. p. 181.
τε ab. B. O. — lin. 8. ἐστιν ab. V. — lin. 12. τρίγ. ab. B. O. — lin. 25. τῷ *Δ* ab. B. O. — συνίσταται Vulgo. — lin. 32. παραλληλογρ. γὰρ V. P. — lin. 33. ἀφαιρήσθω B. O. — Lin. 4. αὐτῶν ἡ p. 182.
διάμετρος ἡ *AΘΓ*, καὶ ἤχθω etc. B. O. et multi codd. — lin. 8. αὐτὴν ab. B. O. — lin. 9. ὅμοιον . . . τῷ *KΠ* ab. V. — lin. 12. καὶ ὡς ἡ V. P. — lin. 14. *AE* οὕτως . . . τὴν *AK* B. O. — ἄρα ab. V. — lin. 17. οὐκ ἄρα ἐστὶ B. O. — lin. 27. καὶ ab. B. — lin. 32. τὴν αὐτὴν *AB* V. P. — lin. 34. τῷ *ΔB*. — Lin. 2. τῆς p. 183.
AB ἀναγραφέντι V. — lin. 5. παραλληλογρ. ab. V. — lin. 6. et seq. *B* habet *ΔB* pro *ΓE* et *ZE* pro *KΘ*. — lin. 15. κοινὸν δὲ τὸ V. — lin. 18. ἴσ. ἐστ. . . . ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 20. καὶ ab. V. P. — lin. 22. *B* addit conclusionem: πάντων ἄρα etc. Reliqua demonstratio inscribitur ἄλλως. O. adnotat: „Hic est hujus theorema„tis casus secundus et non altera propositionis demonstratio: et ideo „conclusionem universalem in codd. tam Mss. quam impressis casui „primo subnexam ad secundi finem apposuimus." — Lin. 2. *Κοινὸν* p. 184.
ἔστω τὸ B. O. — lin. 10. ὄντι ab. V. P. — lin. 10. Vulgo δεῖ δή. — lin. 13. τῶν ἐλλειμάτων B. V. P. — τοῦ τε ἐλλείματος τοῦ ἀπὸ

O. — lin. 14. *καὶ ᾧ δεῖ* B. — lin. 15. *ἐλλείπειν παραλληλογράμμου*
O. — lin. 18. *ἀπὸ τῆς ΑΒ ἀναγραφομένου ὁμοίου* V. — lin. 19.
τῆς ΑΒ ab. O. P. B. — *ὁμοίων ὄντων τῶν ἐλλειμάτων* O. P. —
lin 27. in O. P. B. sequuntur verba *τὸ δὴ ΑΗ ἤτοι ἴσον ἐστὶ τῷ*
Γ ἢ μεῖζον αὐτοῦ διὰ τὸν ὁρισμὸν, quae cum Scholion esse vide-
antur, ejeci cum V. — lin. 32. *τῷ ΗΒ* B. — lin. 34. *τῷ ΕΖ . . .*
τὸ ΕΖ O. — Lin. 2. *τὸ ΕΖ* O. — lin. 4. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 5. p. 185
abjeci *οὖν* post *Ἔστω* cum V. — lin. 9. *τῇ ΚΛ μὲν* V. — *μὲν τῇ*
ΚΛ B. — *τῷ ΚΜ τὸ ΗΗ* V. P. — O. habet *ΞΟ* pro *ΗΗ* et *ΕΖ*
pro *ΗΒ*. — lin. 20. *τὸ ΡΣ* O. — lin. 25. *ἐστ. ἴσ.* V. P. — Lin. 6. p. 186
ὑπερβαλεῖν O. P. — B. quasi utrisque satis factura *παραβαλλεῖν*. —
lin. 12. 13. *ΕΛ* pro *ΒΖ* O. — lin. 14. *ὅμ. ἄρα . . . τῷ ΕΛ* abs.
V. — lin. 26. *οὖν* ab. V. — lin. 29. *ἴσ. ἐστ.* B. O. — Lin. 4. *τὸ* p. 187
ΕΛ . . . τῷ ΟΠ O. (*τὸ . . . τὸ* B.) — *Τετράγωνον δὲ* B. O. P. —
δεῖξαι pro *ποιῆσαι* B. — Sequitur demonstratio altera, quam vide
in append. — Lin. 3. 7. *τε* ab. B. O. — lin. 11. *ἄρα* ab. V. — lin. p. 188
16. *ἡ* ab. B. O. — lin. 30. Seq. demonstratio altera, quam vide
in append. — Lin. 12. *καὶ αἱ ἐναλλὰξ* P. — *καὶ ἐναλλὰξ* O. — p. 189
lin. 16. *τὰ* ab. O. — lin. 26. *Ἀλλ' αἱ ὑπὸ . . . ἴσαι εἰσί.* abs. V. —
Lin. 7. 8. Quae uncis inclusa sunt, in V. inter lineas exarata sunt p. 190
manu aliena et secunda pars demonstrationis, quae ad sectores atti-
net nec non corollarium in margine manu aliena exarata sunt vo-
cabulis contractis. cf. append. IV. pag. 306. — lin. 15. Quae unci
continent abs. V. — lin. 16. *ὁσαιδηποτοῦν κατὰ τὸ ἑξῆς* B. O. —
lin. 18. *ὁσαιδ. ἴσ.* B. O. — lin. 23. 24. *τῆς* scripsi pro vulg. *τῇ*. —
lin. 26. *Εἰ ἄρα* V. B. P. — *καὶ εἰ* O. — lin. 31. *γωνίας* ab. V.
— Lin. 6. *γωνίας* ab. B. O. — lin. 7. *ἡ* ab. B. O. — lin. 10. *δι-* p. 191
πλασία V. — lin. 13. *τὴν ΕΘΖ* V. — lin. 25. *ἐστὶ* ab. B. O. —
lin. 28. *ὅλον ΑΒΓ κύκλ.* B. O. — lin. 29. *εἰς τὸν αὐτὸν κύκλ.* B.
O. — lin. 30. *γωνίᾳ* ab. V. P. — Lin. 4. *ἑκατέρῳ τῷ ΗΚΓ* etc. p. 192
B. O. — lin. 6. *Διὰ τὰ . . . ἀλλήλοις εἰσὶν* ab. V. — lin. 12. *Εἰ*
ἄρα V. B. P. — *καὶ εἰ* O. — lin. 13. *περιφερείᾳ* ab. O. — lin. 15.
ὑπερέχει . . . . ἐλλείπει, ἐλλείπει abs. V. — Lin. 4. *καθ' ὃ ἕκαστον* p. 193
O. — *καθ' ἣν ὃ ἕκαστον* B. V. P. Nos aut ὃ in ὁ mutandum aut
plane abjiciendum putamus. — lin. 15. *ἡ μονάδι* V. — lin. 19. *πε-*
ρισσός ἐστιν ὁ B. O. V. P. — lin. 21. def. 10. ab. in cdd. B. O. et
in nonnullis aliis codd. adest in V. — lin. 23. *ἐστιν ἄρ.* B. O. —

Lin. 2. δὲ ab. B. O. — lin. 9. ὅσαι ἴσαι εἰσὶν B. O. — τοσάκις p. 194.
O. — lin. 16. στερεός ἐστι V. — lin. 20. ὁ ab. V. — lin. 22. ἴσων
ἀριθμῶν B. — O. abjecit ἴσων. — lin. 25. Edd. add. ὦσιν post
μέρη, quod abjiciendum mihi videbatur. — Lin. 4. δὲ ab. B. O. — p. 195.
lin. 5. ἐὰν initio propositionis positum est in B. O. — lin. 6. 11.
τὸν πρὸς ἑαυτοῦ edd. omn. — ληφθῇ fortasse in λειφθῇ mutandum esse videtur et hoc loco et in sequentibus. — lin. 9. ἀνίσων ab. V. — lin. 13. μετρῇ B. O. — lin. 23. 25. μετρήσει ὁ
E B. O. — lin. 26. τὸν *ZΘ* μετρεῖ V. — Lin. 3. καὶ ἔστω . . . ὁ p. 196.
ΓΔ ab. V. — lin. 17. ἐλάσσονα ab. B. O. P. — lin. 18. Post
μετρείτω additur in *E* ὁ δὲ *AE* ἑαυτοῦ ἐλάσσονα οὐ μετρεῖ τὸν
ΓZ. — lin. 32. τὸν *ΔZ* μετρεῖ V. P. — Lin. 7. Verba ὅπερ. ἔδ. δ. p. 197.
in V. post corollarium scripta sunt. — lin. 20. κοινὸν μεγ. μέτρ.
B. O. — lin. 21. τις ab. B. O. P. — lin. 23. ἄρα μετρήσει V. P.
— lin. 24. τῶν *AB* ἄρα B. O. — lin. 28. τις et ὧν abs. V. P. —
Lin. 3. τὸ Δ quod omnes habent edd. in τὸν Δ mutandum est. — p. 198.
lin. 10. δὴ ab. V. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — lin. 19. μέτρον
μετρεῖ O. — μέτρον ab. B. — lin. 24. Adest conclusio: Τριῶν ἄρα
ἀριθμῶν δοθέντων εὕρηται τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον· ὅπερ ἔδει
ποιῆσαι. B. Idem O., quae tamen post δοθέντων addit: μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους; cum hac congruunt P. V. sed habent δεῖξαι
pro ποιῆσαι. — lin. 25. Totum corollarium ab. V. — lin. 29. τόπον B. — Lin. 5. *BΓ* πρότερον B. O. — lin. 6. πρότερον ab. B. p. 199
O. — V. P. habent Ἔστ. πρότ. οἱ *A BΓ* πρῶτ. etc. — lin. 10.
δὴ πρῶτ. πρ. ἀλλ. οἱ *A BΓ* B. O. — lin. 12. οὖν ὁ *BΓ* τὸν *A*
μετρεῖ B. O. — lin. 16. ἴσος δὴ etc. V. P. — ἴσος δὲ ὁ Δ ἑκατέρῳ
τῶν *BE EZ* B. O. — lin. 26. ἀριθμοῦ ab. V. — lin. 32. ὅσοι ἄρα
ἀριθμοί εἰσιν ἐν τῷ *BΓ* ἴσοι τῷ *A* B. O. — Lin. 2. ἀριθμοὶ ab. p. 200.
B. O. — lin. 7. τὸ *Δ*· ὁ *BH* ἄρα καὶ *EΘ* etc. B. O. — lin. 8.
εἰσί ab. P. — lin. 8. Καὶ διὰ ταῦτα ὁ *HΓ* τῷ *A* ἴσος ἐστὶ καὶ ὁ
ΘZ τῷ *Δ*· καὶ οἱ *HΓ ΘZ* ἄρα τοῖς *AΔ* ἴσοι εἰσὶν B. O. — Διὰ
τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ *HΓ* τῷ *A* ἴσος ἐστίν· ὁ δὲ *ΘZ* τῷ *Δ* καὶ οἱ *HΘ*
ΘZ ἄρα τοῖς *AΔ* ἴσοι εἰσὶν V. P. — lin. 12. τῷ *A* B. O. — lin.
18. ἢ hic omissum et post μέρη scriptum in O. — in B. O. P.
utroque loco legitur ἤ. — lin. 28. ἐστὶ ab. V. — Lin. 3. αὐτὸ τὸ p. 201
μέρος B. O. — lin. 5. post τοῦ *Γ* habet V. καὶ ὁ *ΘE* τοῦ *Z*· ὁ
ἄρα μέρος ἐστὶ τὸ *HB* τοῦ *Γ* καὶ συναμφότερος etc. — lin. 17. ὁ

λοιπὸς B. O. P. — lin. 18. ὁ ὅλος B. O. P. — lin. 25. ἐστι καὶ
ὁ *AB* B. O. P. — lin. 26. ὁ *AB* ἄρα . . . μέρος ἐστὶν abs. V. —
lin. 29. ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 30. ἐστὶ ab. V. — lin. 31. τοῦ *ZΔ*
B. O. — Lin. 2. ὁ ἄρα . . . τοῦ *ΓΔ* abs. V. — lin. 5. ὁ ὅλος B. O. P. p. 202.
— lin. 30. Κείσθω ἴσος τῷ *EA* ὁ *KN* B. O. — lin. 32. ἐστὶ ab.
B. O. — Lin. 5. Ἴσος δὴ edd. omn. — lin. 12. τὸ αὐτὸ μέρος ἢ p. 203.
V. P. — lin. 18. Post *BΓ* O. et P. inserunt: ἐλάσσων δὲ ἔστω ὁ
A τοῦ *Δ*. — lin. 20. τὰ αὐτὰ ab. B. O. P. — lin. 22. καὶ ab. V.
— Ἴσος δὴ V. P. — lin. 12. 16. τὸ αὐτὸ ab. B. O. — lin. 14. p. 204.
Post μέρη addit O. Ἔστω δὲ ὁ *AB* τοῦ *ΔE* ἐλάσσων. — lin. 15.
ὅτι ab. P. — lin. 24. τῷ *Γ* B. O. — lin. 27. μέρη τὰ αὐτὰ B. —
lin. 28. τῷ *ΘE*. — lin. 31. ὁ *HB* τοῦ *ΘE* . . . . μέρος ἐστὶ καὶ
abs. B. O. — Lin. 3. μέρος ἐστὶ B. O. — lin. 4. ἄρα ab. B. O. — p. 205.
lin. 19. ἅπερ *AB* B. O. P. — lin. 20. ὡς *EB* P. — lin. 33. τὰ
αὐτὰ abs. B. O. P. — Lin. 17. τὰ αὐτὰ ab. B. O. — lin. 22. καὶ p. 206.
post λαμβανόμενοι in edd. omnib. — lin. 25. γὰρ post Ἔστωσαν
ejeci cum V. — lin. 27. καὶ ab. V. et in edd. ceteris ut supra post
λαμβ. positum. — Lin. 12. fortasse scribendum τὸν τέταρτον. — p. 207.
lin. 16. ὁ ab. O. — lin. 22. Ἔσται δὲ P. — lin. 27. ἔσται ἄρα V.
P. — lin. 33. ἀριθμὸς ab. V. B. O. — Lin. 4. ἄρα ὁ *A* τὸν *Δ* p. 208.
μετρεῖ V. — lin. 16. ἀριθμὸν ab. B. O. — lin. 31. λόγον ἔχουσι
πολλαπλασιασθεῖσιν B. O. — ἔχουσι λόγον πολλαπλ. V. P. — Lin. 33. p. 209.
γινόμενος B. O. — Lin. 3. 4. γινόμεν. B. O. — lin. 4. καὶ δευτέρου p. 210.
B. O. — lin. 8. οὕτως ab. B. — lin. 17. Ὡς δὲ ὁ *Γ* B. O. —
Lin. 10. ἴσος ἐστί B. — lin. 11. ἀπὸ τῶν O. — lin. 19. 20. ἐστὶ p. 211.
ab. B. — lin. 25. ἀπὸ τῶν B. — lin. 32. ἔχοντας αὐτοῖς B. O. —
Lin. 14. ἐπεὶ οἱ *ΓH* *ΓΔ* ἴσοι ἀλλ. εἰσ. B. O. — lin. 15. *ΘZ* ἀλ- p. 212.
λήλοις ἴσοι B. O. — lin. 16. τὸ ab. B. — lin. 23. καὶ post λαμβ.
in edd. omn. — Totam hanc propositionem 22. in cod. V. aliena
manu, vicesimam eadem manu, utramque vocabulis contractis ad mar-
ginem adscriptam esse notavit Peyrardus. — 27. αὐτὸ τὸ μέρος O. —
Lin. 5. καὶ ut supra post λαμβ. in edd. omnib. — lin. 6. οἱ *ΔEZ* p. 213.
post πλῆθος scriptum V. P. — lin. 17. ἐστιν initio lineae ab. B. O.
— lin. 26. εἰσιν οἱ . . . . αὐτοῖς desunt B. O. — lin. 28. ἐλάσσονες
ἀριθμοὶ ἐν τῷ V. P. — ἐλάχιστοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ B. O., unde utrumque
scribendum esse conjicimus. — Lin. 11. ἔλασσον. ἀρ. ἐν edd. omn. — p. 214.
Lin. 25. ἔστωσ. πρῶτ. B. O. — lin. 28. τις τοὺς *ΓΔ* ἀριθμός. — p. 215.

Lin. 2. Ὁσάκις δὲ B. O. — lin. 15. τε ab. B. O. — lin. 29. *Καὶ* p. 216.
ab. V. — lin. 30. ὁ *A* τῷ Δ καὶ ὁ Δ τῷ *B* καὶ οἱ *A*Δ ἄρα B. —
Lin. 15. πρῶτός ἐστιν πρὸς τὸν *Γ* B. O. — lin. 27. ποιῇ τινας V. p. 217.
P. — lin. 28. κἂν οἱ edd. omn. — lin. 30. κἀκεῖνοι edd. omn.
— Lin. 2. ἀριθμ. δύο V. P. — lin. 5. ἑαυτὸν μὲν V. P. — lin. 10. p. 218.
Ἐπεὶ ἄρα οἱ B. O. — lin. 33. τις τοὺς *ΓA AB* ἀριθμός. — Lin. 7. p. 219.
Διὰ τὰ αὐτὰ . . . . ἀλλήλους εἰσὶν abs. B. O. — lin. 10. πρὸς ἀλλή-
λους πρῶτοι B. O. — lin. 13. *Εἰ* γὰρ μή εἰσι πρῶτοι πρ. ἀλλ. οἱ *AB*
BΓ B. O. — *Εἰ* γ. μ. εἰσι πρῶτ. οἱ *AB BΓ* πρὸς ἀλλ. V. P. —
lin. 14. τὶς τοὺς *AB BΓ* ἀρ. V. P. — lin. 29. post ὁ *Γ* add. B.
O. ὁ *Γ* (ἄρα O.) οὐκ ἔστι μονάς, quae glossema esse videntur.
— Lin. 6. δὲ ab. B. — lin. 27. ὁ *Δ* ab. V. — Lin. 6. 10 et 25. p. 220. 221.
Pro δῆλον etc. V. P. habent γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν. — lin. 8.
B. male: καὶ ἐπεὶ ὁ *B* τὸν *Γ* μετρεῖ καὶ ὁ *Γ* ἄρα etc. — lin. 12.
γινομένης edd. omn. — lin. 14. οὐ ληφθ. edd. omn. — lin. 17.
πρωτ. ἀρ. abs. B. O. — Adest conclusio Ἅπας ἄρα συνθ. etc. in
edd. omn. — Sequitur praeterea demonstratio altera, quam vide
in Append. I. — Lin. 5. οἱ *ABΓ* γὰρ ἤτοι edd. omn. — lin. 11. p. 222.
ἐν ab. V. — lin. 14. ἄρα ab. B. — lin. 16. αὐτοῖς τοῖς *ABΓ* B. O. —
lin. 21. τινες ab. V. — lin. 22. ἐλάχιστοι addendum censui ex cau-
sis supra exhibitis. — lin. 26. Post μονάδας legimus in B. *Τὸ*
M ἄρα τὰ *ABΓ* μετρεῖ. — Lin. 5. ἐλάχιστοι vide supra. — lin. p. 223.
13. γὰρ addunt post *AB* edd. omn. — Lin. 2. μετροῦσι B. O. — p. 224.
lin. 3. Quae uncis inclusa sunt in Cod. V. aliena manu inter lineas
scripta leguntur. — lin. 22. Post *E* addunt V. P. ἀλλ' ὡς ὁ *A*
πρὸς τὸν *B*, οὕτως ὁ *Θ* πρὸς τὸν *H*. — Lin. 9. *Εἰ* γὰρ οὐ μετ. p. 225.
edd. omn. — lin. 12. τὸν *ΔZ* μετροῦσι V. P. — lin. 21. μετρή-
σουσιν V. P. — lin. 25. οἱ *ABΓ* ἄρα . . . μετρήσουσι ab. V. —
οἱ ἄρα *ABΓ* B. O. — lin. 30. τὸν *E* ab. V. — lin. 33. μετροῦσι
B. O. — Lin. 3. 7. 9. μετρήσουσι V. P. — lin. 5. ὁ ante ὑπὸ ab. p. 226.
edd. omn. — lin. 8. τὸν *E* ab. V. P. — lin. 9. δὴ ab. B. O. —
lin. 11. *Καὶ* ab. B. — lin. 16. ὥστε ab. V. P. — lin. 17. ὁ ἐλάχιστος
ἄρα ὑπὸ V. P. — lin. 17. μετρήσ. τ. *Z* B. O. — lin. 21. μετροῦσι
B. O. — lin. 26. μετρεῖται edd. omn. — lin. 31. καὶ ab. B. —
Lin. 13. ἀριθμὸς ab. V. P. — lin. 17. ἄρα μέρος O. — lin. 27. p. 227.
τὰ δοθέντα μέρη· ἔστωσαν δὲ τὰ *ABΓ* B. — τὰ μέρη τὰ *ABΓ* O. —
τὰ δοθέντα μέρη τὰ *ABΓ* P. Nos Cod. V. secuti sumus. —

lin. 29. *ἀριθμοὶ* ab. V. — lin. 30. *ὁ* ab. V. — lin. 32. *Ἐπεὶ*
οὖν . . . , *μετρεῖται* abs. V. P. — *ἄρα* ab. B. O. — Lin. 3. *ὁ Η* p. 228.
ἐλάχιστος . . . , *μέρη* ab. V. P. — *ἔστω τις* V. P. — *τις* ab. B. O.
— lin. 5. *ἔστω* ab. V. P. — lin. 6. *καὶ* ab. in edd. omn. — Lin. p. 229.
15. *τῶν ΑΒΓΔ* ab. V. — lin. 16. *τῶν ΕΖΗΘ* ab. V. — lin. 17.
οὕτως ab. V. B. — lin. 18. *οἱ δὲ ἐλάχ.* abs. B. O. — lin. 20. *ὅ*
τε . . . . *τοῦτ᾽ ἔστιν* abs. B. O. — Lin. 4. *ὅσους ἐπιτάξῃ τις* B. p. 230.
O. — lin. 18. *ἀριθμὸς δὴ* . . . *πεποίηκεν* abs. V. — lin. 20. *οὕτως*
ab. V. — lin. 23. *ἑκάτερον τὸν* V. — lin. 34. *Ἀλλ᾽ ὡς ὁ Δ* B. O.
— Lin. 3. *οὕτως* ab. V. — lin. 6. *Ἐδείχθη δὴ καὶ ὡς* B. O. — p. 231.
lin. 8. *τε* ab. V. — lin. 12. *οἱ δὲ ἐλάχ.* . . . *αὐτοῖς* abs. V. — 16.
17. *τὸν ΤΕ* V. — lin. 26. *ὅτι ἂν τρεῖς* V. — Lin. 6. *ἀριθμοὶ μὲν.* p. 232.
B. O. — lin. 8. *αἰεὶ* B. O. — *ἂν* ab. V. — B. O. habent *ἕως οὗ.* —
lin. 11. B. O. addunt post *ΛΜΝΞ. Οἱ ἄρα ἄκροι αὐτῶν οἱ ΛΞ*
πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Ἐπεὶ γὰρ οἱ ΕΖ πρῶτοί εἰσιν· ἑκάτε-
ρος δὲ αὐτῶν ἑαυτὸν πολλαπλασιάσας ἑκάτερον τῶν ΠΚ πεποίηκεν. —
lin. 15. *τὸν ἕτερον τῶν* B. O. — lin. 16. B. O. post *πεποίηκεν*, omis-
sis quae sequuntur *οἱ ΠΚ . . . εἰσὶν*, sic habent: *Οἱ ΠΚ ἄρα πρῶ-*
τοι καὶ οἱ ΛΞ. — lin. 23. *Καὶ εἰσὶν οἱ* V. — lin. 24. *εἰσιν, ἴσος*
δὲ . . . *τῷ* Δ abs. V. — lin. 29. 34. *ἑξῆς ἀνάλογον* V. P. — Lin. p. 233.
6. *καὶ* ab. B. O. — lin. 15. 19. *ἑξῆς ἀνάλογον* V. — lin. 20. *καὶ*
ἐν τῷ τοῦ V. — lin. 20. *ἔσονταί τινες* . . . . *λόγοις* abs. V. —
lin. 26. *οἱ δὲ ἐλάχ.* ab. V. — lin. 32. *ἄρα τῶν ὑπὸ ΒΓ* B. O. —
Lin. 3. *ἐν* ab. V. — lin. 5. *εἰλήφθω ὑπὸ* V. — lin. 10. *Καὶ* ab. p. 234.
V. — lin. 18. 23. *ἑξῆς ἀνάλογον* V. — *τε* ab. B. O. — lin. 19. *ἔτι*
ab. B. O. — lin. 20. *Λέγω δὴ ὅτι καὶ ἐλάχιστοι ἐν τοῖς Α . . . Ζ*
λόγοις· Εἰ γὰρ μή, ἔσονταί τινες etc. V. P. — lin. 27. *τὲ* ab. B.
O. — Lin. 7. 9. *ἑξῆς ἀνάλογον* V. — lin. 15. *μὲν* ab. V. — lin. 21. p. 235.
ὁ Η V. — lin. 22. *ὁ Δ* V. — lin. 23. *Καὶ ὁ Δ* . . . *ποιείτω* abs.
B. O. — lin. 25. *Οἱ ἄρα* etc. . . . *ἐκ τῶν πλευρῶν* abs. V. P. Ad
haec verba in margine ed. B. haec legimus: „*Οἱ ἄρα Θ* etc. non
„habet exemplar alterum et videtur nihil huc pertinere.“ — In ed.
O. vero haecce: „Quae uncis inclusa dedimus (scil. *Οἱ . . . τὸν Κ*)
„in quibusdam exemplaribus desiderantur et commode quidem
„abesse possunt; deinde eadem exemplaria pro *ὁ Δ γὰρ τὸν* habent
„*καὶ ὁ Δ τὸν* etc.“ — Sequentia autem *Καὶ ἐπεὶ* etc. sic leguntur in
B. et O.: *Λέγω οὖν ὅτι ἔστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Η*

πρὸς τὸν Κ· ὁ Δ γὰρ τὸν Ε πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα etc. — Lin. 9. οὕτως ab. V. — lin. 15. μετρεῖ edd. omn. p. 236. — lin. 22. Post μετρήσει habent. B. O. Λέγω γὰρ ὅτι οὐ μετρεῖ ὁ Α τὸν Γ. Ὅσοι γάρ εἰσιν οἱ ΑΒΓ etc. — lin. 32. μετρεῖ ἀριθμὸν B. O. — lin. 34. οὐδὲ ὁ Ζ ἄρα τὸν Θ μετρεῖ abs. V. — Lin. 7. p. 237. μετρεῖ edd. omn. — lin. 12. οὐ μετρεῖ V. — lin. 13. Ὅπερ . . . μέτρων abs. V. P. — lin. 14. μετρεῖν mutavi in μετρῶν. — In seqq. habent edd. omn.: Μετρεῖ δὲ ὁ Α τὸν Δ. — lin. 21. αὐτοῖς ab. V. — lin. 32. οἱ ab. V. — Lin. 11. τοῦτ᾽ ἔστιν . . . ἑπόμενον p. 238. abs. B. O. — lin. 13. ὁ Η post μετρεῖ B. O. — ὁσάκις δὲ B. O. — 19. καὶ a me receptum ex V. — lin. 21. ἀνάλογ. εἰσ. ἑξ. B. O. — lin. 32. μονάδος ἑξῆς μεταξὺ B. O. — Lin. 3. μεταξὺ ab. O. — p. 239. lin. 7. τῆς Ε μονάδ. B. O. — lin. 30. πρὸς τὸν Θ B. O. — lin. 32. ἐν αὐτῷ μονάδ. edd. omn. — lin. 34. ὁ Ε τὸν V. — Lin. 5. Ὁ δὲ p. 240. Μ τῷ Α ἴσ. ἐστ. B. O. — lin. 13. ἐμπεπτώκασιν edd. omn. — lin. 16. ἀριθμῶν ἑκατέρον καὶ V. — lin. 18. ἑξῆς μεταξὺ B. O. — lin. 24. τε ab. B. O. — Lin. 3. ἀριθμὸς ex V. receptum. — lin. 5. p. 241. μονὰς ab. V. — lin. 15. πεποιήκεν ab. B. O. — Lin. 2. καὶ ὡς . . . . p. 242. πρὸς τὸν Α abs. B. O. — lin. 11. 16. 34. ἀναλογὸς B. — lin. 20. ἀριθμὸς ab. V. — lin. 26. Pro verbis: Πάλιν ἐπεὶ . . . . . ἔστιν ἄρα ὡς legitur in V. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς. — lin. 29. καὶ τὸν αὐτὸν τὸν Δ B. O. — lin. 31. Ἀλλ ὡς . . . πρὸς τὸν Ε abs. V. P. — lin. 34. ὁ Ε ab. V. — Lin. 8. πλευρὰν ab. V. — lin. 24. p. 243. ὁ Γ ἄρα B. O. — lin. 25. ὁ Γ ἄρα . . . πεποίηκε abs. B. O. — Lin. 5. ἐπεὶ ab. V. — lin. 12. Καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς etc. V. — p. 244. lin. 14. ὡς ἄρα . . . τὸν Κ abs. in edd. omn. — lin. 16. ἀριθμοὶ ab. B. — lin. 22. ἄρα ab. V. — lin. 27. τινας edd. omn. — lin. 30. αἰεὶ O. V. P. nobiscum B. — lin. 32. ὁποιοῦν O. V. P. nos secuti B. — ἑξῆς ab. B. O. — Lin. 12. ἀνάλ. εἰσ. B. O. — lin. 14. p. 245. ἀνάλογ. ab. B. O. — lin. 18. τῶν ab. V. — lin. 20. καὶ διΐσου ἄρα V. P. — lin. 24. 25. ἀριθμ. ab. in edd. omn. — lin. 30. ἔστωσαν οἱ ΓΔ V. — Lin. 3. μετρεῖ ἄρα . . . τὸν Δ ab. V. — lin. 4. Ἀλλὰ p. 246. δὴ μετρείτω ὁ Γ τὸν Δ B. O. P. Nos secuti V. — lin. 7. ἑξῆς ab. B. O. — lin. 9. μετρεῖ δὲ . . . τὸν Ε ab. V. — lin. 20. μετρήσει B. O. — lin. 22. Singula enunciata verbis ὁ δὲ etc. καὶ ἔτι etc. incipientia inter se commutantur B. O. — lin. 25. φανερὸν δὲ B. O. — lin. 35. Ἐπεὶ γὰρ B. O. — Lin. 8. 25. Κἂν ᾖ πλ. edd. p. 247.

omn. — lin. 9. ὁ δὲ B. O. — lin. 11. ἀριθμοὶ ab. B. O. — lin. 12. ἔστωσαν ab. B. O. — lin. 13. λέγω δὲ V. — lin. 13. 32. μετρεῖ V. — lin. 17. δὲ πάλιν B. P. V. — Lin. 7. 16. ἀνάλογος B. — lin. p. 248. 11. ὅμοιοι ἐπίπ. ἀρ. V. — lin. 17. ἡ ὁμόλ. πλ. ab. V. P. — lin. 18. τὴν ὁμόλ. πλ. ab. V. P. — lin. 19. Τοῦτ' ἔστιν ἤπερ ἡ ὁμόλ. πλ. πρὸς τὴν ὁμόλ. πλ. addit V. — lin. 20. Καὶ επεί ἐστιν edd. omn. — lin. 22. οὕτως ab. V. B. — lin. 27. μὲν ab. B. O. — lin. 30. οὕτως ab. V. — lin. 32. μὲν ab. V. — Lin. 10. ἀνάλογοι B. — lin. 13. p. 249. ὅ τε Γ V. — lin. 24. ὁ μὲν Γ B. O. — lin. 30. τὸν μὲν Δ B. O. — lin. 34. ἄρα V. — Lin. 3. post ἐδείχθη addunt B. O. ἐστὶν p. 250. ἄρα ὡς ὁ Κ πρὸς τὸν Μ, (οὕτως O.) ὁ Μ πρὸς τὸν Λ. — lin. 8. εἰσιν ab. V. — lin. 11. Πάλιν ἐπεὶ . . . ἐναλλὰξ ἄρα ἐστιν abs. V. et pro hisce legimus Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ὁ Δ etc. — lin. 14. εἰσ. ἀναλ. P. — lin. 15. λόγῳ post Θ habent B. O. — lin. 23. τὸν ἐκ τῶν ΖΗ ab. V. P. — lin. 29. καὶ ὡς ab. B. O. — lin. 35. τὸν Η, καὶ ὁ Ε πρὸς τὸν Θ καὶ ὡς ἄρα ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ V. — Lin. 3. p. 251. ὅτε ab. V. — lin. 24. ἄρα ab. B. — lin. 31. οἱ ab. B. — Lin. 2. p. 252. γὰρ ab. V. — lin. 3. ἔστιν ἄρα . . . πρὸς τὸν Γ ab. V. — lin. 4. οὕτως ab. B. — post τὸν Γ haecce sequuntur in B. O. P. ὡς δὴ (δὲ B.) ὁ Α πρὸς τὸν Γ, (οὕτως O.) ὁ Γ πρὸς τὸν B., quae cum V. omisimus. — lin. 7. μὲν ab. edd. omn. — lin. 8. τὸν δὲ Ε πολλαπλ . . πεποίηκεν ab. V. — lin. 11. τοῖς ΑΓ τοῦτ' ἔστιν ab. edd. omn. — lin. 14. Ὁσάκις δὲ V. P. — lin. 15. καὶ ab. V. — lin. 19. Ἐπεὶ γὰρ ὁ Ζ τὸν μὲν Δ πολλαπλασιάσας τὸν Α πεποίηκε, τὸν δὲ Ε πολλαπλασιάσας τὸν Γ πεποίηκεν· ἰσάκις ἄρα ὁ Δ τὸν Α μέτρει καὶ ὁ Ε τὸν Γ. Ἔστιν ἄρα ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Γ, τοῦτ' ἔστιν ὁ Γ πρὸς τὸν Β. Πάλιν ἐπεὶ ὁ Ε ἑκάτερον τῶν ΖΗ πολλαπλασιάσας τοὺς Γ Β πεποίηκεν· ἔστιν ἄρα etc. V. P. — lin. 24. Καὶ ἐναλλὰξ . . . πρὸς τὸν Η. ab. B. O. — lin. 26. αὐτῶν πλευραὶ B. O. — lin. 31. οἱ ab. V. — Lin. 2. γὰρ ab. V. — τρεῖς p. 253. ἐλάχιστοι O. — lin. 3. οἱ τρεῖς V. — lin. 7. εἰσιν ἀριθμοὶ B. O. P. — lin. 8. τοῦ πρὸ abs. B. O. — lin. 9. ἀνάλ. εἰσ. B. O. — lin. 12. καί ἐστιν ἴσον . . . . . τῶν ΑΓΔ B. O. — lin. 28. Ὁσάκις δὲ ὁ Η τὸν Β B. O. — lin. 30. καὶ ab. B. O. — lin. 33. 34. μὲν ab. edd. omn. — lin. 34. Verba τὸν δὲ . . . πεποίηκε uncis inclusit editor O. et adscripsit in margine: „Illa uncis inclusa desunt in ma- „nuscr. Bodl. et commode abesse possunt.“ — Lin. 2. δὴ in δὲ mu- p. 254.

tavi cum B. — αὐτῶν pro αὐτοῦ habet O. — lin. 4. δὴ ab. V. —
lin. 6. οὕτως ab. B. — lin. 7. οὕτως ab. V. B. — Lin. 14. οὕτως p. 255.
ab. V. B. — lin. 25. λέγω δὴ ὅτι B. O. — Lin. 27. ἀριθμοὶ ab. p. 256.
B. O. — Lin. 7. ἐπίπεδοι ab. B. O. — lin. 11. Ἐπεὶ οὖν ὁ *Α* V. p. 257.
P. — lin. 12. μὲν ab. B. O. — lin. 17. μεταξὺ ἀρ. B. O. — lin. 26.
οἱ ab. edd. omn. — ἀριθμοὶ ab. B. O. — Lin. 2. Δύο γὰρ ἀριθμ. p. 258.
οἱ *Α Β* πολλαπλασιάσαντες ἀλλήλους τετράγωνον τὸν *Γ* ποιείτωσαν,
λέγω ὅτι etc. B. O. — lin. 9. οὕτως post *B* omisi cum V. B. —
lin. 15. ἐμπίπτει edd. omn. — lin. 16. *AB* ἄρα B. O. — lin. 30.
οὕτως post *Γ* omisi cum V. B. — Lin. 2. οὕτως ante ὁ *Δ* omisi cum p. 259.
V. B. — lin. 3. item ante ὁ *Γ*. — lin. 11. item ante ὁ *Α*. — lin.
12. ἀρ. ἐμπεπτ. V. P. — lin. 13. ἀνάλογον ἐμπεπτώκασιν B. O. —
lin. 14. Post ἀριθμοὶ addunt editiones: Ἐὰν δὲ δύο ἀριθμῶν δύο
μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτωσιν· ὁ δὲ πρῶτος κύβος ᾖ· καὶ ὁ τέταρτος
(δεύτερος P. V.) κύβος ἔσται. — lin. 23. Ὁ *Α* γὰρ B. O. — lin.
28. οἱ *AB* ab. B. O. — Lin. 6. ἀριθμὸς ab. B. O. — lin. 13. p. 260.
οὕτως ante ὁ *Δ* omisi cum V. B. — lin. 29. Post verbum πεποίηκε
haecce leguntur in V. P. ὁ *Α* ἄρα τὸν *Β* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ
μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς τὸν *Α* κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονά-
δας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν *Α*, οὕτως ὁ *Α* πρὸς τὸν *Β*.
Καὶ ἐπεὶ ὁ *Α* τὸν *Β* πολλαπλασιάσας τὸν *Γ* πεποίηκεν· ὁ *Β* ἄρα
τὸν *Γ* μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ *Α* μονάδας. Μετρεῖ δὲ καὶ ἡ μονὰς
τὸν *Α* κατὰ τὰς εν αὐτῷ μονάδας· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν
Α, οὕτως ὁ *Β* πρὸς τὸν *Γ*. Ἀλλ' ὡς ἡ μονὰς πρὸς τὸν *Α*, οὕτως
ὁ *Α* πρὸς τὸν *Β*· καὶ ὡς ἄρα ὁ *Α* πρὸς τὸν *Β* etc. — lin. 31. οὕ-
τως ante ὁ *Β* omisi cum B. V. — οἱ ab. B. O. — *ΒΓ* ab. V. —
lin. 34. οὕτως ab. V. — Lin. 14. Ἐπεὶ οὖν . . . μονάδας abs. B. p. 261.
O. — lin. 19. καὶ addidi. Cetera quae sequuntur ὁ *Β* . . . πεποίη-
κεν abs. V. P. — lin. 25. ἐστιν B. O. — lin. 26. 27. 29. πάντες
ab. V. — lin. 35. ἅπαντες B. O. — Lin. 5. ἀριθμ. ab. B. O. — p. 262.
lin. 12. πάντες ab. B. O. — lin. 18. αὐτῷ scripsi pro τῷ *Α*. — καὶ
ὁ *Β* ἄρα . . . μονάδας ab. B. — lin. 21. μὲν ab. V. — lin. 24.
ἐστί ab. B. O. — lin. 24. Quae litteris minoribus excusa sunt, ut
adjicerem res ipsa monuit. Reperies in edd. Ἐδείχθη δὲ καὶ τετρά-
γωνος· ὁ ἄρα ἕβδομος ἀπὸ τῆς μονάδος ὁ *Ζ* κύβος τε etc. — lin.
30. πάντες ab. B. — ἅπαντες O. — τέ ab. V. P. — lin. 34. ἑξῆς
κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοὶ V. — lin. 35. μετὰ τῆς μονάδος B. —

Lin. 5. ὁσοιδηποτοῦν V. P. — lin. 13. ἄρα ab. V. — lin. 15. ὁ Δ p. 263
τε V. — lin. 18. Ἀλλὰ δὲ O. — καὶ ab. O. — lin. 22. λέγω δὴ
B. O. — lin. 30. καὶ ὁ *B* ἄρα κύβος ἐστὶ V. — Lin. 12. Ἔστωσαν p. 264
γὰρ V. P. — ὁσοιδηποτοῦν V. P. — lin. 15. πλὴν τοῦ τρίτου B.
O. — lin. 16. καὶ τῶν ἕνα διαλειπ. ab. V. — lin. 21. οὕτως ante
ὁ *A* omisi cum V. P. — lin. 25. ὑπόκειτο V. P. — lin. 27. τετρά-
γωνός ἐστι B. O. — lin. 29. Λέγω δὴ B. O. P. — lin. 34. οὕτως
omisi ante ὁ *B* cum V. B. — lin. 35. Post κύβον addunt B. O. οἱ
ΒΓ ἄρα ὅμοιοι στερεοί. — Lin. 3. οὕτως ante ὁ *A* omisi cum V. p. 265
B. — lin. 6. καὶ ante ὁ *A* omisi cum V. P. — lin. 20. ὁ ἐλάχι-
στος ὁ *B* V. P. — τὸν μείζονα ab. in edd. Sed B. et O. addunt
μείζονα post *E*. — lin. 26. ἐν τῷ Δ μονάδ. B. O. — lin. 30. ὅπ.
ἔδ. δ. absunt hoc quidem loco in V. sed additur Porisma, quod
inter lineas codicis 2345. scriptum quidem, nullo autem alio in codice
reperitur. Πόρισμα. Καὶ φανερὸν ὅτι ἣν ἔχει τάξιν ὁ μετρῶν ἀπὸ
μονάδος, τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ὁ καθ᾽ ὃν μετρεῖ ἀπὸ τοῦ μετρουμέ-
νου κατὰ τὸν πρὸ αὐτοῦ ὡς τὸν Δ. Ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — lin. 33.
ἑξῆς ab. B. O. — Lin. 2. μετρῆται edd. — lin. 4. ὁσοιδηποτοῦν p. 266
B. O. — ὁποσοιδηποτοῦν V. P. — lin. 9. καὶ ab. V. — lin. 10.
μετρείτω ὁ *E* τὸν *A* ab. V. — lin. 11. ἀριθμὸν ab. V. — lin. 20.
29. οὕτως ab. V. — Lin. 2. post πεποίηκεν: Ἔστιν ἄρα ὡς ὁ ἐκ p. 267
τῶν *ΘΕ* ἴσος τῷ ἀπὸ τοῦ *A* edd. cet. Nos cod. V. secuti. —
lin. 4. οὕτως ante ὁ *A* omisi cum B. V. — lin. 7. μείζων τὸν . . .
τουτ᾽ ἔστιν ὁ omiserunt V. P. — lin. 9. add. V. ὡς ἡγούμενος ἡγού-
μενον. Praeterea hic notatur in ed. O. ad verba Ἀλλὰ etc. „In qui-
„busdam codd. quae sequuntur rectius absunt, scribiturque οὐκ ἄρα
„οὐ μετρεῖ ὁ *E* τὸν *A*, μετρεῖ ἄρα· ὅπερ ἔδ. δ.“ — lin. 12. πρώτου
post ὑπὸ omisi cum V. — οἱ *AE* . . . μετροῦνται ab. V. — lin. 14.
ὑπὸ ἑτέρου B. O. P. — lin. 16. καὶ ab. V. — lin. 19. μετρεῖται
edd. omn. — lin. 24. ἄλλου ab. V. — lin. 25. 30. παρὲξ edd.
omn. — lin. 27. ἀπὸ μονάδ. . . . ἑξῆς ab. V. — B. O. habent
Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμ. ὑπὸ μονάδ. ἀναλ. (sine ἑξῆς quod nos-
met adjecimus). — Lin. 3. Πᾶς V. P. — lin. 4. ὁ *E* ἄρα . . . p. 268.
μετρεῖται B. O. — lin. 6. πρώτου ab. V. P. — lin. 15. μετρεῖ τὸν
Δ B. — lin. 20. οὐκ ἐστι ὁ *Z* B. O. — lin. 21. Εἰ γάρ ἐστι πρ.
B. O. — lin. 24. Ἅπας . . . . ὁ *Z* ἄρα abs. B. O. — lin. 25. ὑπὸ
πρώτου ἄρα B. O. — Lin. 11. οὕτως ab. V. B. — lin. 17. ὑπὸ p. 269.

τῶν *Θ Π* V. P. — lin. 19. οὕτως ante ὁ *A* omisi cum B. O. — lin. 23. 27. 31. παρὲξ. edd. omn. — lin. 26. πρώτου ab. B. O. Tredecim priores propositiones hujus libri excidisse in cod. 2344. notavit Peyrardus. — Lin. 4. τῶν ab. B. O. — lin. 6. γενόμεν. δὲ p. 270.
B. — lin. 11. ἐστὶν post ὅπερ abjeci cum V. — lin. 14. παρὲξ edd. omn. — lin. 22. τῶν *ABΓ* ab. B. O. — lin. 27. φανερὸν δὲ B. O.
— Lin. 2. πρῶτ. εἰσ. πρ. τ. *EZ* B. O. — lin. 3. Ἐὰν δὲ . . . . . p. 271.
πρῶτός ἐστιν omiserunt B. O. et habent καὶ ὁ ἐκ τῶν etc. — lin. 6. ὥςτε καὶ . . . Ἐὰν γὰρ aeque omissa sunt in B. O. atque loco eorum scriptum legimus Ἐὰν δὲ δύο etc. — lin. 10. Inserunt B. O. multique alii codd. post ἐστιν haecce: ὥςτε ὁ ἐκ τῶν *ZΔ ΔE* καὶ πρὸς τὸν ἀπὸ τοῦ *EZ* πρῶτός ἐστιν. Ἀλλ' ὁ ἐκ etc. — lin. 19. ὥςτε καὶ ὁ ἀπὸ edd. omn. — lin. 20. 22. 23. τὸν ὑπὸ τῶν P. B. O. Nos secuti V. qui tamen lin. 25. 27. 28. habet ὑπὸ. —
Lin. 5. οὕτως ab. B. V. — lin. 7. ἀριθμ. ab. B. O. — lin. 8. 28. p. 272.
ἔχοντας αὐτοῖς B. O. — lin. 10. post B, add. edd. omn. ὡς ἡγούμενος ἡγούμενον. — lin. 12. ἄτοπόν ἐστιν B. O. — ἐστιν pro ἔσται B. O. — lin. 13. ἐστιν οὕτως B. O. — lin. 26. 31. 33. οὕτως ante ὁ *B* omisi cum B. V. — lin. 27. ἀριθμ. ab. B. O. — lin. 28. —
Lin. 3. B. O addunt ὁ *A* post καὶ, ed. P. ante καὶ. — lin. 13. p. 273.
ἔστω emendavi pro vulgato ἔσται. — lin. 16. *Καὶ εἰ* πρῶτοι P. — lin. 25. ἀπὸ scripsi pro vulg. ἐκ. — lin .26. οὕτως ante ὁ *B* abjeci cum B. V. — lin. 27. ἀνάλογον ab. B. O. — Lin. 9. 12. p. 274.
πότε δυνατὸν P. — lin. 16. Post ἢ οὐ pergit B.: ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσι, οἱ ἄκροι δὲ αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ ἢ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς, οὐ πρῶτοι δὲ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρὸς ἀλλήλους εἰσὶ, ἢ οὔτε ἀνάλογον ἑξῆς οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσί. Ad quae verba haecce in margine notantur: „Quia Zambertus, graecum „sine dubio exemplar secutus, exacta divisione membrorum hic uti- „tur et singula membra demonstrationibus exsequitur, voluimus eam „lectionem inserere; est enim pernecessaria, licet neutrum nostrum „exemplar tale quidquam haberet.“ — Pro hisce Cod. V. quem sequitur P. haec praebet Ἢ οὐκ εἰσὶν ἑξῆς ἀνάλογον καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσὶν ἢ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν οὐκ εἰσὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἢ οὔτε ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον οὔτε οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσιν· ἢ καὶ ἑξῆς εἰσιν ἀνάλογον καὶ οἱ ἄκροι αὐτῶν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους εἰσίν. Nimi-

rum ex hoc orta est versio Zamberti, quam imitatus est graece Grynaeus in ed. B. — O. ed. habet hanc in margine notam. „Corruptissima est haec propositio. Nos ex auctoritate codicum manuscriptorum ita corrigendam censemus, ut, quae uncis sunt inclusa (ea scilicet quae supra ex ed. B. exhibuimus et infra exhibebimus), pro deletis habeantur. In universum datis tribus numeris „quartus proportionalis inveniri potest, quando primus metitur eum, „qui fit, cum secundus multiplicat tertium. Alioquin *ἀδύνατον*; et „quartus est numerus, per quem primus metitur numerum ita creatum. Ideoque propositionis divisio in quatuor casus non est necessaria; certe Euclidis concinnitati minime respondet, immo casus „secundus paralogismus merus est. Cum quod falsum probat, tum „quod *ἀλογίστως*. Patet enim, tribus numeris 4, 8, 9 posse quartum proportionalem inveniri, nempe 18; licet non sunt deinceps „proportionales et eorum extremi sunt inter se primi.“ — Lin. 21. Sic pergit ed. B. *εἰ δὲ οὐκ ἀνάλογον μὲν ἑξῆς εἰσι, ἄκροι δὲ οἱ πρῶτοι, λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἐστιν ἀδύνατον· Εἰ γὰρ μή, προσευρήσθω καὶ ἔστω* Δ. *Ὡς οὖν A πρὸς τὸν B, Γ πρὸς τὸν* Δ, *ὡς δὲ B πρὸς τὸν Γ,* Δ *πρὸς E, ἐξ ἴσου γοῦν ὡς ὁ A πρὸς τὸν Γ οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν E· Ἀλλὰ μὴν οἱ AΓ πρῶτοι εἰσί, πρῶτοι δὲ ἐλάχιστοι, οἱ ἐλάχιστοι δὲ μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας αὐτοῖς ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον, μετρεῖ ἄρα ὁ A τὸν Γ, ὁ ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτὸν, ὁ A ἄρα τοῦς AΓ μετρεῖ πρώτους πρὸς ἀλλήλους ὄντας ὅπερ ἀδύνατον. Τοῖς ABΓ ἄρα τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν ἀδύνατον. Πάλιν οἱ ABΓ ανάλογον ἑξῆς ἔστωσαν μὲν οἱ δὲ AΓ ἄκροι οὔ πρωτοι λέγω ὅτι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν δυνατόν ἐστιν· ὁ B γὰρ τὸν Γ πολλαπλασίασας* etc. quae retinuimus lin. 21. p. 274. usque ad finem theorematis p. 275. cui additur in ed. B. *Ἀλλὰ μὴν οὔτ᾽ ἀνάλογον ἑξῆς οἱ ABΓ· οὔτε πρῶτοι οἱ AΓ ἄκροι ἔστωσαν, καὶ ὁ B τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ ποιείτω. Ὁμοιως δείξομεν ἐὰν ὁ A τὸν Δ μετρῇ ὅτι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν δυνατόν ἐστιν, ἐὰν δὲ μὴ μετρῇ ὅτι ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.* — Pro hisce omnibus sic habet V. *Μὴ ἔστωσαν δὴ οἱ ABΓ ἑξῆς ἀνάλογον, τῶν ἄκρων πάλιν ὄντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους·* (NB) *λέγω ὅτι καὶ οὕτως ἀδύνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Εἰ γὰρ δυνατόν, προσευρήσθω ὁ Δ, ὥστε*

εἶναι ὡς τὸν *A* πρὸς τὸν *B*, οὕτως τὸν *Γ* πρὸς τὸν *Δ*, καὶ γεγονέτω ὡς ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Δ* πρὸς τὸν *E*. (Hic claudicat argumentatio. Ille enim quartus numerus proportionalis, quem nescio quis Elementorum corruptor hoc loco postulat, *E* scilicet, reperiri non potest quoties reperitur numerus *Δ*. Quare haec demonstratio id unicum probat, reperto numero *Δ*, numerum *E*, non posse reperiri.) Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς μὲν ὁ *A* πρὸς τὸν *B*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν Δ, ὡς δὲ ὁ *B* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ Δ πρὸς τὸν *E*· διΐσου ἄρα, ὡς ὁ *A* πρὸς τὸν *Γ*, ὁ *Γ* πρὸς τὸν *E*. οἱ δὲ *AΓ* πρῶτοι· οἱ δὲ πρῶτοι καὶ ἐλάχιστοι, οἱ δὲ ἐλάχιστοι μετροῦσι τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας, ὅ τε ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον καὶ ὁ ἑπόμενος τὸν ἑπόμενον· μετρεῖ ἄρα ὁ *A* τὸν *Γ*, ὡς ἡγούμενος τὸν ἡγούμενον· μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτόν· ὁ *A* ἄρα τοὺς *AΓ* μετρεῖ πρώτους ὄντας πρὸς ἀλλήλους, ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. Οὐκ ἄρα τοῖς *ABΓ* δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν οἱ *ABΓ* ἑξῆς ἀνάλογον, οἱ δὲ *AΓ* μὴ ἔστωσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· λέγω ὅτι δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν. ὁ γὰρ *B* τὸν *Γ* πολλαπλασιάσας etc. quae retinuimus lin. 21. p. 274. usque ad finem p. 275. Annexa autem sunt haecce: Ἀλλὰ δὴ οἱ *ABΓ* μήτε ἑξῆς ἔστωσαν ἀνάλογον, μήτε οἱ ἄκροι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Καὶ ὁ *B* τὸν *Γ* πολλαπλασιάσας τὸν *Δ* ποιείτω. Ὁμοίως δὴ δειχθήσεται ὅτι εἰ μὲν μετρεῖ ὁ *A* τὸν Δ, δυνατόν ἐστιν αὐτοῖς ἀνάλογον προσευρεῖν, εἰ δὲ οὐ μετρεῖ, ἀδύνατον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. In singulis haecce notanda sunt. p. 274. lin. 22. ὁ *A* ἄρα V. — lin. 27. οὕτως ante ὁ *Γ* omisi cum V. B. — lin. 28. τῶν *ABΓ* B. O. — προσευρ. ἀνάλ. B. O. — Praeterea alia quaedam reperitur demonstratio, qua ista emendetur, quam falsam cognovimus, in Cod. V. illo loco inserta, quem signo (NB) supra distinximus. Λέγω ὅτι καὶ οὕτως δυνατόν. Εἰ γὰρ ὁ *A* τὸν ὑπὸ *BΓ* μέτρεῖ, προβήσεται ἡ δεῖξις ὁμοίως τοῖς ἑξῆς. Εἰ δὲ οὐ μετρεῖ ὁ *A* τὸν ὑπὸ *BΓ*, ἀδύνατον αὐτοῖς τέταρτον ἀνάλογον προσευρεῖν· Οἷον ἔστω ὁ μὲν *A* τριῶν τίνων, ὁ δὲ *B* ἕξ· ὁ δὲ *Γ* ἑπτα· καὶ δηλονοτὶ δυνατόν. Εἰ δὲ ὁ *A* εἴη πέντε, οὐκ ἔτι δυνατὸν καὶ ἁπλῶς· ὅτε μὲν ὁ *B* πολλαπλάσιός ἐστι τοῦ *A*, δυνατόν ἐστι τέταρτον ἀνάλογον εὑρεῖν. Εἰ δὲ μή, ἀδύνατον. (scilicet cum primus et tertius numerus sunt inter se primi, de quo casu hic agitur). — Lin. 7. ἀριθμ. προσευρ. B. p. 275. O. — lin. 17. καὶ ab. B. O. — lin. 24. Εἰ γὰρ δυνατόν· ἔστω, οἱ

δὲ etc. B. O. — lin. 29. Ὁ αὐτὸς καὶ ὑπόκειται πρῶτος B. O. —
Lin. 14. 28. ὁ ab. edd. omn. — lin. 21. ἄρα ante τῶν λ. abjeci p. 276.
cum V. — lin. 29. ἀριθμ. περισσ. ὀπ. B. O. — Lin. 6. καὶ ab. p. 277.
P. — lin. 7. ἄρτιος ἀφῃρ. B. O. — lin. 10. ὥςτε καὶ . . . ἥμισυ
ab. B. — lin. 15. 17. 24. καὶ ὁ λοιπὸς B. O. — Lin. 5. ἀριθμοῦ p. 278.
ab. P. — lin. 8. γὰρ ab. V. — lin. 10. Ἔστι δὲ καὶ μονὰς ἡ ΔΑ abs.
V. — Lin. 4. πλῆθος περισσόν, ὁ δὲ συγκείμενος ἐκ περισσῶν ἀριθ- p. 279.
μῶν, ὧν τὸ πλῆθος περισσὸν, περισσός ἐστιν· ὥςτε etc. B. O. —
lin. 15. ὁ ἄρα Β B. P. — lin. 18. ἐστιν ab. O. P. — lin. 20. In
fine hujus theorematis ad marginem ed. B. scriptum reperimus:
„Addit hic quaedam Zambertus, quae non videntur Euclidis.“ —
lin. 23. διπλάσιον B. O. — lin. 26. διπλάσιος B. O. — 27. καὶ ab.
P. — Lin. 6. 8. 12. διάδος B. O. V. (semel) — lin. 11. οὖν ab. p. 280.
V. — τῶν ΒΓΔ ἀρτιάκις ab. V. — lin. 13. δὴ ab. V. P. — lin. 14.
ἡ Ε ab. V. — lin. 19. ὅτι ab. V. — B. O. habent ὅτι καί. — lin.
20. Abjeci Α ante ΒΓ. — lin. 29. Post ἄρτιος addunt B. O. [ὁ
ἥμισυς αὐτοῦ ἀρτιός ἐστι καὶ] μετρηθήσεται etc. Sed adscriptum
est in O. „Illa uncis inclusa non agnoscunt Codd. Mss. et rectius
„quidem abesse possunt.“ — Lin. 3. ἄρτιος ab. V. — lin. 3. 17. 18. p. 281.
διάδος B. O: — lin. 13. ἐστὶ περισσ. B. O. — lin. 14. τέμωμεν B.
O. — lin. 15. ποιοῦμεν V. P. — ἀριθμὸν ab. B. — lin. 17. Post
εἰ γὰρ οὐ B. O. et V. (in repetitione errore quodam theoremati
36. adnexa.) ita pergunt καταντήσομεν εἴς τινα περισσόν (ἀριθμον B.),
ὃς μετρήσει τὸν Α κατὰ ἄρτιον ἀριθμὸν, καταντήσομεν etc. — lin.
19. ὁ Α καὶ B. O. — lin. 25. ἴσος B. O. — lin. 28. ἅπαντας B.
O. — lin. 29. ὁποσοιδηποτοῦν V. P. — lin. 30. ἀπ᾽ ἐλαχίστου B. —
Lin. 3. ἴσος ἐστὶ V. P. — lin. 17. τὸν Δ ΒΓ Α B. O. — lin. 27. p. 282.
ὁποσοιδηποτοῦν P. V. — lin. 35. Post Verba τον Μ errore scriben-
tis Verba in Cod. V. irrepserunt quae ad demonstrationem theo-
rem. 34. pertinent. Legimus enim; Περιττὸν ἐχέτω. Λέγω ὅτι ὁ
Α ἀρτιάκις ἐστὶν ἄρτιος καὶ etc. quae sequuntur p. 281. lin. 9.
usque ad finem illius theorematis. — Lin. 12. πρὸ αὐτῷ B. — πρὸ p. 283.
ἑαυτῷ O. P. — lin. 19. καὶ ab. B. O. — lin. 27. οὕτως ante ὁ Ο
omisi cum V. B. — lin. 28. item ante ὁ Ε. — lin. 35. ἀριθμὸν
ab. V. — in sequentibus conjunctio μὴ cum Indicativo pendere vide-
tur ab antecedente ἅπαντα. — Lin. 4. αὐτοῖς ab. V. — lin. 6. 13. p. 284.
17. οὕτως ante ὁ Ο, ὁ Ε, ὁ Α omisi cum B. V. — Lin. 7. Καὶ p. 285.

ἀλλ. est inscriptio in Cod. V. — ἔτ. δ. in B. O. — lin. 17. ἐντὸς
καὶ abs. V. B. — lin. 18. πρὸς τὸ *A* O. — lin. 21. καὶ ab. B. O.
— lin. 23. ἐστι ab. V. — ἴσον ἐστὶ B. O. — lin. 26. ἴση ἐστὶ γὰρ
V. P. — lin. 27. ἄρα ab. V. — Lin. 11. ἡ ὑπὸ *ΠΕΖ* γωνία B. O. p. 286.
— lin. 13. ἐστιν ab. B. O. — lin. 18. Legendum est Ἐπεζεύχθω ἡ
MN. Καὶ ἐπεὶ etc. — καὶ ab. V. — lin. 21. ἐστ. ἴσ. B. O. —
ἄρα ab. V. — lin. 22. ἐστὶν ab. V. B. — lin. 23. ἡ δύο εὐθεῖαι B.
O. — lin. 34. ἡ δὲ *ZΠ* B. O. — lin. 36. ὃ μή ἐστι non est mu-
tandum in ὃ οὐκ ἐστι. cf. supra ad p. 283 l. 35. — τὸ Δ post
κύκλου scriptum B. O. — Lin. 12. ἴσ. εὐθ. B. O. — ἐστ. κέντ. B. p. 287.
O. — lin. 14. ἀλληλῶν V. — lin. 19. προςεκβεβλήσθω B. O. —
lin. 25. μικροῦ καὶ κέντρον B. — lin. 29. Ἡ ab. B. O. — Lin. 14. p. 288.
τρίγωνον post *ZHA* ab. B. O. — lin. 24. post *AΘK* additur in B.
O. καὶ ὡς ἄρα ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως
ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα, καὶ τὰ λοιπὰ ὡς ἐν
τῇ προτέρᾳ δείξει. ὅπερ. ἔ. δ. — lin. 27. εὐθεῖαν ab. V. P. —
lin. 32. ἡ *AB* ἄρα B. — lin. 37. λόγῳ εἰσὶ B. O. — lin. 38. εἶδος
ἄρα B. O. — Lin. 5. εἶδος post *BA* ab. B. O. — lin. 6. Διὰ τὰ p. 289.
αὐτὰ δὴ καὶ ὡς B. P. — lin. 12. τοῖς post εἴδεσι ab. V. — Haec
altera demonstratio in infima pagina Cod. V. exarata est vocabulis
contractis. P. — lin. 16. Haec demonstratio altera ab. V. reperitur
in B. O.

Appendix VII.

Varietas lectionum Libri X. XI. XII. XIII.

sive Partis II. hujus editionis.

Lin. 9. ὑπ' αὐτῶν edd. omn. Nos Scholiasten Mon. secuti su- p. 1.
mus. — lin. 15. σύμμετροί τε καὶ abs. V. P. — αἱ μὲν μήκει καὶ
δυνάμει, αἱ δὲ δυνάμει μόνον O. B. — lin. 20. post ἀσύμμετροι a
Scholiaste adjecta reperimus: κατ' ἀμφότερα τοῦτ' ἔστι μήκει καὶ
δυνάμει. — lin. 25. καλείσθωσαν Schol. — Lin. 3. αὗται quod ha- p. 2.
bent edd. omn. in αὐταὶ mutandum esse existimavi. — lin. 8. ἀπὸ
ab. edd. omn. — lin. 9. ἀεὶ ab. B. in qua legimus ἂν, O. habet
ἀεὶ ἄν. — lin. 10. ληφθήσεται O. — ὅ ἐστιν O. — lin. 15. καὶ
ἀπὸ . . . ἢ τὸ ἥμισυ ab. P. — lin. 16. ληφθήσεται B. O. — lin. 17.
ὅ ἐστιν B. O. — lin. 18. γὰρ ab. V. P. — lin. 19. μεγέθους ab.
V. P. — lin. 29. τοῦ ΔΕ ἔλασσον abs. B. — lin. 30. τοῦ ἡμίσεος
B. O. — lin. 31. B. O. habent μεῖζον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΒΘ, V. P.
habet μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ. Quae lectionum varietas cum
paulo infra iterum deprehendatur, cogitanti mihi, Euclidem nun-
quam fere conjunctionem ἢ post comparativi formam scribere so-
litum videri, ea se obtulit emendatio totius theorematis, ut ubique
ante ἢ τὸ ἥμισυ adderem vocem ἡμίσους, quam deleant licet lin. 7.
9. 15. 16. 22. 23. qui ceterarum editionum lectionem restituere sibi
cupiunt. Res enim ipsa maxime favet huic emendationi, cum, sive
majus aliquid dimidii sive dimidium ipsum abstuleris, idem semper
efficies, scilicet ut quantitas oriatur data quantitate alia quam mi-
nima minor. — Lin. 2. ἡμίσους ab. P. — ἢ τὸ ἥμισυ ab. B. O., p. 3.
in quibus legimus μεῖζον τοῦ ἡμίσους. — lin. 8. In ceteris edd.
additur Ὁμοίως δὲ δειχθήσεται κἂν ἡμίσῃ (ἡμίσεα B. O.) ἢ τὰ

ἀφαιρούμενα. — Hoc in ed. B. post τὸ Ἄλλως scriptum est. Du-
bito, num Euclidis sint haec verba. — lin. 8. Adest demonstratio
altera, quam vide in Appendice V. — lin. 15. ἐκκειμένων ab. B.
μεγεθῶν ὄντων. V. P. — lin. 16. ὄντος ab. V. P. — lin. 21. ὁ *E*
B. O. — lin. 32. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 2. ἐκκειμένων ab. B. — p. 4.
lin. 9. σύμμ. μεγ. B. O. — lin. 12. μεγεθ. ab. B. O. — ἤτοι ab.
V. — lin. 13. τὸ *AB* τὸ *ΓΔ* ab. V. P. — lin. 14. B. O. habent
τὸ *AB* ἄρα κοινὸν μέτρον ἐστὶ τῶν *AB* *ΓΔ*· καὶ φανερὸν ὅτι μέτρον
μέγιστον. — lin. 17. καὶ post *ΓΔ* add. V. P. — lin. 18. ἀεὶ pro
ἄρα V. P. — ἀεὶ ab. V. — lin. 23. τὸ *AZ* δὲ V. P. — lin. 29.
Verba τὸ *AZ* ἄρα . . . μετρεῖ, contracta aliena manu in margine
Cod. V. — lin. 32. Μετρείτω καὶ ab. V. P. — ἔστω ab. O. —
Lin. 2. καὶ ab. O. — lin. 4. ἄρα ab. V. — lin. 7. μεγέθη ab. V. p. 5.
— lin. 11. ἔδ. δεῖξαι B. — lin. 21. δύο ab. O. — lin. 23. μετρεῖ
ab. V. P. — lin. 24. μετρεῖ δὲ καὶ . . . *BΓ* μετρεῖ. Haec infima
pagina et contracta in Cod. V. — lin. 25. τὸ δὲ *AΔ* τῶν *ABΓ*
V. — lin. 27. B. O. habent: τὰ *ABΓ* οὐ μετρήσει. Εἰ γὰρ δυνα-
τόν· μετρείτω τὰ *ABΓ* μεῖζον τοῦ *Δ* μεγέθους τὸ *E*. Καὶ ἐπεὶ
τὰ *ABΓ* μετρεῖ, καὶ τὰ *AB* μετρήσει, καὶ τὸ τῶν *AB* μέγιστον
κοινὸν μέτρον μετρήσει τὸ *Δ*, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον· ὅπερ ἀδύνατον.
Idem codd. ceteri excepto V. — lin. 31. τὸ ab. P. — lin. 34. οὖν
ab. B. O. — Lin. 4. *AB* μετρεῖ B. O. — lin. 4. Τὸ *E* . . . μετρεῖ p. 6.
ab. B. O. — lin. 5. μέτρ. ἐστ. B. O. — lin. 9. τὰ ἄρα *AB* V. P.
— lin. 14. V. habet: Ἔστι δὲ τὸ *E*, τὸ *Z* ἄρα τὸ *E* μετρήσει. —
lin. 15. μετρεῖ B. O. P. — lin. 17. μεγέθη ab. V. — lin. 18. Ad-
dunt edd. ceterae Ἐὰν (V. ἂν) μὴ μετρῇ τὸ *Δ* τὸ *Γ*, ἐὰν δὲ μετρῇ
αὐτὸ τὸ *Δ*. — lin. 19. δοθ. συμμ. B. O. — lin. 25. μετρήσ. μέτρ.
B. O. — lin. 27. V. addit ὅπερ ἔδ. δ. — Lin. 7. ἀριθμὸν ab. B. p. 7.
O. — lin. 16. οὕτως ab. V. — lin. 23. ἔσται V. P. — lin. 25.
πρὸς ἀλλ. τὰ *AB* B. O. — lin. 33. τοσαῦτά εἰσι O. — lin. 34.
ταὐτὸ μέρος B. O. — ὁ *Γ* V. — Lin. 3. Μετρεῖ δὲ . . . *Δ* ἀριθ- p. 8.
μόν. Haec abesse dicit Gregor. in utroque codice manuscripto; sed
non desunt in V. B. et in ceteris, quos inspexit Peyr. codicibus.
— lin. 4. ὁ *Γ* V. — lin. 8. τοσαῦτά εἰσι B. O. — μεγέθη ab. V.
P. — lin. 10. ἀριθμὸν ab. V. P. — lin. 13. οὕτως ἐστὶ τὸ *A* V.
— lin. 14. τὸ *A* ab. V. — lin. 17. μὴν ab. V. — P. habet μετρεῖ.
— lin. 20. Adest altera demonstratio, quam vide in app. — lin. 24.

ὡς ὁ Α ἀριθμὸς V. P. — lin. 25. ἡ εὐθεῖα πρὸς V. P. — lin. 26.
27. 33. Β, quod habent omnes in Η mutavi. — lin. 34. V. add.
ὅπερ ἔδ. δ. — Lin. 17. ἔσται B. P. — lin. 20. ἔσται B. O. — lin. p. 9.
21. O. habet: Εἰ γὰρ σύμμετρόν ἐστι τὸ Α τῷ Β, λόγον ἔχει, ὅν-
περ πρ. ἀρ. — B. habet: Εἰ γὰρ σύμμετρά ἐστι, τὸ Α τῷ Β, λό-
γον ἔχει, ὅνπερ etc. — V. P. habent: Εἰ γὰρ ἔσται σύμμετρον τὸ
Α πρὸς τὸ Β, λόγον ἕξει etc. Ex quibus quomodo nostra orta sit
lectio facile videbis. — Lin. 4. 7. 12. ὃν τετράγωνος V. P. — lin. 10. p. 10.
γὰρ ab. B. O. — lin. 17. 18. 22. ἀριθμ. ab. V. P. — lin. 22. τοῦ
δὲ Γ πρ. τ. Δ λόγου V. P. — lin. 26. ἀριθμ. ab. B. O. — lin. 28.
καὶ ab. B. O. — lin. 29. τοῦ Γ ἀριθμοῦ B. O. — lin. 30. τετρά-
γωνος ἀριθμὸς B. O. — τοῦ Δ ἀριθμοῦ B. O. — lin. 31. Alia hic
incipit demonstratio in B. O. et additur in O.: ὅπερ. ἔδ. δ. —
lin. 32. 33. τετράγωνον ab. V. — Lin. 3. 5. Β τετράγωνον B. O. — p. 11.
lin. 4. Δ τετράγωνον B. O. — lin. 5. ἐστι ab. B. O. — lin. 6. τοῦ
Γ ἀριθμοῦ τετραγώνου ἀριθμοῦ B. O. — lin. 7. Δ ἀριθμοῦ τετρά-
γωνον ἀριθμὸν B. O. — lin. 8. Γ ἀριθμοῦ B. O. — lin. 8. 10.
Δ ἀριθμὸν B. O. — lin. 9. Γ ἀριθμὸς B. O. — lin. 12. Altera
demonstratio hic inseritur B. O. — lin. 13. Ἀλλὰ δὲ O. — lin. 15.
18. 24. Β τετράγωνον B. O. — lin. 19. 28. μήκει ab. V. — lin. 21.
Β τετράγωνον O. P. — lin. 23. Πάλιν δὲ B. O. — lin. 27. ἔσται V.
P. — lin. 33. Adest demonstratio altera, quam vide in app. —
Lin. 3. φανερὸν ἔστω B. O. — ἔσται V. P. — lin. 5. σύμμετροι p. 12.
ab. V. — καὶ αἱ . . . . καὶ μήκει abs. V. — lin. 7. Adest demon-
stratio quaedam porismatis, quam vide in app. — lin. 22. Nostrum
propositionum ordinem Codd. omn. Schol. Mon. et ed. B. habent,
O. et P. alterum numero uncis incluso indicatum. — Lin. 3. τοῦ p. 13.
Α V. — lin. 4. τοῦ Δ V. — lin. 15. B. O. habent: *Τῇ ἄρα προ-
τεθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ῥητῇ, ἀφ᾽ ἧς ἔφαμεν τὰ μέτρα λαμβάνεσθαι οἱ-
ονεὶ τῇ Α δυνάμει μὲν σύμμετρος ἡ Δ τοῦτ᾽ ἔστι ῥητὴ δυνάμει μό-
νον σύμμετρος, ἄλογος δὲ ἡ Ε. Ἀλόγους γὰρ καθόλου καλεῖ τὰς
καὶ μήκει καὶ δυνάμει ἀσυμμέτρους.* Eadem reperiuntur in quibus-
dam aliis codd. Nostra tamen habent V. Codices Gregorii non-
nullique alii. — lin. 27. 34. ἐστιν B. O. — Lin. 6. B. O. addunt p. 14.
post ἀριθμὸν haecce: *Εἰ γὰρ ἔχει λόγον, ὃν ἀρ. πρ. ἀρ. τὸ Γ πρὸς
τὸ Δ, καὶ τὸ Α πρὸς τὸ Β λόγον ἕξει, ὃν ἀρ. πρ. ἀρ. καὶ ἔσται
σύμμετρον τὸ Α τῷ Β, ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἀσύμμετρον·*

τὸ *Γ* ἄρα πρὸς τὸ Δ λόγον οὐκ ἔχει ὃν ἀρ. πρ. ἀρ. Sic etiam
nonnulli codd. Nostra tuentur et V. et multi alii codd. — lin. 17.
τὸ *Γ* τῷ B. V. — lin. 22. ὁ Δ O. P. τὸ *Δ* B. — lin. 23. τὸ *K*
O. P. — lin. 30. Ὁ *Γ* V. — lin. 31. ὁ *A* B. — Lin. 16. Gry- p. 15.
naeus notat in margine B.: In altero exemplari lemma est, itaque
variat numerus deinceps.“ Re vera in ed. B. uno minores sunt
numeri propositionum. — Peyrardus.“ Haec propositio, quae prorsus eadem est, quae subsequens, exarata est vocabulis contractis et
aliena manu in summa pagina codicis V., in margine vero codicis
unius et in textu ceterorum. — lin. 22. ἑτέρῳ τινὶ B. O. — lin. 25.
τὸ *Γ* τῷ B. V. — lin. 26. ἐστι ab. B. O. — Lin. 10. ἐστ. ὀρθ. p 16.
B. O. — lin. 11. τῇ *Γ* O. B. — lin. 12. δύναται τῇ *ΔB* in ceteris
edd. — lin. 15. δοθ. εὐθ. B. O. — lin. 16. εὑρεῖν τὰς τὴν δυναμένην αὐτὰς edd. cet. — lin. 17. Ἐκκείσθ. — B. O. — lin. 19. ἡ τὰς
AΔ etc. edd. cet. — lin. 23. 25. 26. 28. μήκει post ἑαυτῇ add. B.
O. — lin. 31. ἡ *A* μὲν B. — lin. 33. τῆς *E* V. — Lin. 5. καὶ ab. p. 17.
B. O. — lin. 8. 14. 19. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 30. σύμμ. ἐστ. B.
O. — Lin. 2. καὶ τὸ abs. P. — lin. 5. σύμμετρον τῇ *AB* V. — p. 18.
lin. 20. Συγκείσθωσαν B. O. — lin. 24. αὐτὰ ab. V. — καὶ ἔστω
εἰ δυν. τὸ Δ B. O. P. Nobiscum V. — lin. 28. ὑπόκειντο B. O. —
lin. 29. ἀδύνατόν ἐστι B. O. — lin. 34. ἔστω δὴ πρῶτ. V. — πρῶτον edd. cet. omn. — Lin. 2. Εἰ γὰρ ἔσται V. P. — lin. 7. Ὑπέ- p. 19.
κειντο B. O. — lin. 9. Ὅτι εἰ etc. Greg. notat in O.: Ita restituimus ex codd. m.; antea in editis (B.) erat ὅτι τὸ *AΓ* καὶ λοιπῷ
τῷ *BΓ* ἀσύμμετρόν ἐστι. — lin. 10. λοιπῷ ab. O. P. — τὰ ab. O.
P. — Omnia haec verba ὁμοίως δὴ . . . ἔσται abs. in Cod. V. et
in nonnullis aliis codd. — lin. 20. *AΔ* παραλλ. B. O. — lin. 25.
τοῦτ᾽ ἔστι . . . *AΓ ΓB* ab. B. O. — lin. 32. παραλληλόγρ. ab. V.
— Lin. 2. 10. μήκη B. O. — lin. 4. 6. 18. μήκει ab. V. — lin. 5. p. 20.
δυνήσεται O. — lin. 6. τετάρτῳ μέρει B. O. — lin. 7. 14. παραλληλογρ. ab. V. — lin. 23. τῶν ab. V. — lin. 25. καὶ τὰ τετραπλ.
haec verba signis notata sunt in B. tanquam dubia sive suspecta.
— lin. 26. 28. 30. 32. τετράκις pro τετραπλασ. τ. — lin. 31. ἡ ab.
O. — Lin. 3. δύναται τῇ *ZΔ* edd. cet. — lin. 8. ἄρα ταῖς *BZ ΓΔ* p. 21.
ἐστ. σύμμ. μήκ. B. O. — lin. 11. 13. 34. μήκει ab. V. — lin. 19.
τῆς *A* μεῖζον B. O. — lin. 20. ἑαυτῆς O. — lin. 23. τῇ *AΓ* συμμ.
ἐ. μ. B. O. — ἴση γάρ . . . τῇ *ΔΓ* ab. P. — lin. 24 ὥστε ab. B.

O. cetera ita leguntur *καὶ ἡ ΒΓ ἄρα συμμ. ἐ. μ. τῇ ΑΓ δηλονότι*
ἄρα etc. — lin. 34. *μήκη*. B. — Lin. 4. *δυνήσεται*. — lin. 8. *μήκει* p. 22.
ab. V. — *μήκη* B. — lin. 17. *τῷ προτέρῳ* B. O. — lin. 18. *οὖν*
ab. P. — *καὶ* ab. B. O. — lin. 20. *μήκει* ab. B. O. — lin. 26. 35.
ἑαυτῆς V. — lin. 34. Post *ΖΔ* B. add. *Δεικτέον οὖν*. — Lin. 4. p. 23.
Καὶ ab. P. — lin. 8. Adduntur duo Scholia, quae vide in app. —
lin. 10. additur vulgo *κατά τινα τῶν προειρημένων* (*εἰρημένων* P.)
τρόπον (*τρόπων* O.) quae verba ut glossema rejicienda putavi. —
lin. 20. *σύμμετρ. . . . τῇ ΒΓ* abs. V. — lin. 21. *καὶ* ab. V. —
lin. 22. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 26. 29. *χωρίον* a me ex Schol. Mon.
receptum est. — lin. 29. Post *ῥητὴν* in cet. edd. legimus *κατά τινα*
πάλιν τῶν εἰρημένων (*προειρημένων* P.) *τρόπων*. — Lin. 5. *ἐστι* ab. p. 24.
P. — lin. 9. Additum est Lemma et Scholium, quae vide in App.
— lin. 14. *ἔσται* P. — lin. 17. *λέγω ὅτι ἀλ. . . τὸ ΑΓ* ab. B. —
lin. 18. Addunt edd. omn. *καλείσθω δὲ μέση*, quod hoc loco ejeci
sed in recapitulatione retinendum existimavi. — lin. 27. *τετράγωνον*
δυναμένη B. — lin. 28. Quae sequuntur uncis inclusa a me adjecta
non leguntur in edd. Post *ἐστι* sequitur *καλείσθω δε μέση* additur-
que Scholiastae cujusdam explicatio in Cod. V. *διὰ τὸ τὴν ἴσον*
ἀναγράφουσαν τετράγωνον τῷ ΑΓ χωρίῳ, ἣν καλεῖ μέσην, μέσην
ἀνάλογον εἶναι τῶν ΑΒ ΒΓ — in B. O. multisque aliis codd.
διὰ τὸ (priorem hunc articulum omittit O.) *τὸ ἀπ' αὐτῆς τετρά-*
γωνον ἴσον εἶναι τῷ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ καὶ μέσην ἀνάλογον γενέσθαι
τῶν ΑΒ ΒΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — Schol. Mon. ad theorema ipsum
addit: *διὰ τὸ μέσην ἀνάλογον αὐτὴν γίνεσθαι τῶν περιεχουσῶν τὸ*
ἄλογον χωρίον εὐθειῶν· καὶ γάρ ἐστι τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον τῷ
ὑπ' αὐτῶν περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ ἴσον. Sequitur Lemma quod
vide in app. — Lin. 2. *παρεμβαλλόμενον* O. — lin. 3. *χωρίον* ad- p. 25.
didi ex Schol. — lin. 8. *ὀρθογώνιον* ab. B. O. — lin. 27. *ἐστὶ* ab.
V. — lin. 28. *ἐστι* ab. B. O. — lin. 29. Post *δυνάμει* B. add. *ὡς*
ἄρα δέδεικται. — lin. 31. *ἴσα γάρ εἰσι* B. O. — lin. 32. *περιεχο-*
μένῳ ab. V. — Lin. 5. Ad *σύμμετρος* add. Scholiast. *ἢ μήκει καὶ* p. 26.
δυνάμει ἢ δυνάμει μόνον οὖσα σύμμετρος. — lin. 16. *ἐστὶ* ab. V. B.
— lin. 22. *Ἡ δὲ τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυν. μ. συμμ. δυναμένη μέση ἐστὶν*
P. — lin. 25. *Καλείσθω δὲ ἡ δυναμένη μέση* B. — *καλεῖται δὲ ἡ*
δυναμένη μέση O. — Adest demonstratio quaedam corollarii et
Scholium, quae vide in app. — Lin. 2. *εὐθειῶν κατά τινα τῶν εἰρη-* p. 27.

μένων τρόπων P. — lin. 10. ἐστι καὶ ἡ *ΑΒ* B. O. — lin. 16. εὐ-
θειῶν ab. B. O. — lin. 19. ὀρθ. περιεχ. B. O. — lin. 20. ἐστιν ἡ
μέσον B. O. — lin. 32. ἐστι ab. P. — Lin. 2. Ἐπεὶ οὖν σύμμ. B. p. 28.
O. — lin. 4. Ἔστιν ἄρα καὶ ὡς B. O. — lin. 12. ὡς τὸ *ΓΞ* B. O.
— lin. 13. πρὸς τὸ *ΑΔ* B. O. — lin. 19. τὸ ab. B. — lin. 20. τῇ
ab. B. — lin. 21. *Θ Μ*, τοῦτ᾽ ἔστι τῇ abs. P. — lin. 24. ἐστιν
ἡ μέσον B. O. — Lin. 2. ἴσ. ἐστ. B. O. — post haec add. edd. p. 29.
Ῥητὸν δέ ἐστι τὸ *ΔΒ*, ῥητὸν ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ *ΚΘ*, quae hic omisi,
cum paulo infra repetantur. — lin. 6. παράκεινται B. O. — lin. 19.
αὐτοῦ ab. B. O. — lin. 24. ἐστι ab. V. — lin. 27. Μέσον ἄρα μέ-
σου οὐχ ὑπ. etc. V. P. — Lin. 5. 12. 13. 24. 30. 34. οὕτως ab. V. p. 30.
— lin. 6. εἰσι ab. in edd. cet. — lin. 9. δὴ ab. V. — lin. 12. Ἀλλ᾽
ἡ *Α* B. — lin. 16. ἐστι ab. B. O. — lin. 18. ῥητὸν περιεχ. ab. P.
— Quae minoribus litteris addita sunt, in edd. desiderantur. —
lin. 22. τρεῖς ab. V. — lin. 30. καὶ αἱ *Δ Ε* V. — lin. 31. δυνάμ.
εἰσ. συμμ. V. — lin. 33. καὶ ab. P. — Lin. 2. 3. 4. οὕτως ab. V. — p. 31.
lin. 9. αἱ *Δ Ε* adjeci. — lin. 14. δὴ B. O. — lin. 19. ὑπὸ τῶν
B. O. — lin. 27. ὅπ. ἴδ. ποιῆσ. ab. V. — lin. 31. τὴν ὑπὸ B. O.
— lin. 32. ἐπίπεδ. ὦσιν B. O. — Lin. 2. 9. ὁ ab. V. — lin. 9. τῷ p. 32.
Δ B. V. — lin. 10. τῆς *ΓΔ* V. — lin. 11. Ἀφῃρήσθω. ὁμοίως V.
— lin. 12. τετρ. ab. V. — lin. 13. 15. 17. 22. τοῦ post ἀπὸ in τῆς
mutatur in V. — lin. 15. ἐστι P. — lin. 17. ἐλάσσων τοῦ ἀπὸ τοῦ
ΒΕ P. — lin. 18. μήτε ὁ . . ἐλάσσων αὐτῶν abs. P. — lin. 20. Quae
uncis inclusa sunt, desiderantur in edd. omn. — lin. 22. καὶ διπλα-
σίων ὁ *ΗΑ* τῆς *ΔΕ* μονάδος B. O. — lin. 23. διπλάσιος V. —
lin. 24. ὁ δὲ *ΑΗ* V. P. — ἐστὶ διπλ. τ. *ΔΕ* O. — lin. 27. 28. 29.
30. 34. τοῦ post ἀπὸ ab. V. — lin. 31. ὑπὸ τῶν *ΑΒ ΒΓ* O. —
lin. 33. ἡ *ΑΒ* ἴση τῇ *ΗΒ* V. — Lin. 3. 4. 7. 8. 9. 10. 11. 13. 16. p. 33.
τοῦ post ἀπὸ ab. V. — lin. 4. 5. διπλάσιος B. O. — lin. 4. κείσθω
ab. B. V. — lin. 5. Καὶ ab. V. — lin. 10. ὥςτε καὶ . . . ἀπὸ τοῦ
ΓΕ abs. V. — B. habet pro hisce: συναχθήσεται ἄρα ἴσος ὁ ἐκ τῶν
ΑΒ ΒΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ τοῦ *ΓΕ* τῷ ἐκ τῶν *ΘΒ ΒΓ* μετὰ τοῦ ἀπὸ
τοῦ *ΓΖ*. — lin. 14. τῷ ab. V. — lin. 15. αὐτῷ ab. V. — lin. 15. οὐδὲ
μείζονι αὐτοῦ abs. V. — lin. 17. τρόπους τοὺς εἰρημένους ἀριθμοὺς
ἐπιδεικνύειν ἀρκείσθωσαν ἡμῖν οἱ εἰρημένοι V. — Haec ultima verba,
majoribus uncis inclusa, permovent me ut omnia minoribus uncis
inclusa, non Euclidis Lemmata sed commentatoris cujusdam addi-

tamenta esse credam. Sic enim Proclus nonnunquam majori rerum
explicationi finem imponere solet. — lin. 28. τὴν ΓΕ edd. omn. —
lin. 31. τετράγωνον ab. B. O. — lin. 33. οὖν ab. V. — Lin. 12. p. 34.
ἐστιν ab. V. — lin. 21. τῷ ἀπὸ τῆς ΒΖ ab. V. — Sed B. O. ha-
bent τῇ ΒΖ συμμέτρῳ. — lin. 25. μείζονα V. — lin. 26. συμμέτρῳ
B. — ὅπ. ἔδ. δεῖξαι B. O. — lin. 27. Hoc theorema in ed. B. nu-
mero caret et inter 30. et 31. locum habet. — lin. 32. ἀριθμοὶ ab.
B. O. — Lin. 5. ὡς ab. V. — lin. 8. ἐστὶν adjeci. — lin. 19. ὅπ. p. 35.
ἔδ. π. ab. B. — Sequitur Lemma quod vide in app. — lin. 25.
γὰρ post Ἐκκείσθωσαν abjeci cum V. — lin. 32. ἐστι ab. B. O. —
Lin. 3. ὡς ἄρα . . . ὑπὸ τῶν ΓΔ abs. B. — lin. 6. καὶ ὡς . . . πρὸς p. 36.
τὴν Δ abs. B. — lin. 10. οὕτως ab. V. — lin. 11. 12. 16. ἀπὸ
ἀσυμμ. V. — lin. 11. δύναται V. P. — lin. 16. ἑαυτῷ B. O. —
ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 19. Ὁμοίως δὲ B. O. — τῷ ἀπὸ V. P. —
lin. 20. ὅταν ἡ Α μεῖζον δύναται τοῦ B. O. — lin. 22. Adest
Lemma, quod vide in app. — lin. 27. αἱ ΑΒΓ δυν. μόν σύμμ.
B. O. — lin. 30. Μέσον δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ. Sic habet exemplar
latinum B. — desiderantur in Cod. mss. O. — abs. V. P. —
Lin. 3. ἐστὶ ab. V. — lin. 5. Ἀλλ' ὡς τὸ B. — lin. 8. μόνον ab. p. 37.
V. — lin. 11. οὕτως ab. V. — lin. 15. τῷ ὑπὸ τῶν ΒΓ τὸ B. O.
— lin. 16. αἱ γὰρ . . . . μόνον σύμμετροι ab. B. O. — lin. 20.
τὴν μείζονα ab. O. — lin. 22. ὅπ. ἔδ. δ. ab. V. B. — lin. 24.
Ὁμοίως δὲ B. O. — καὶ τῷ V. P. — ἡ ἀπὸ τῆς Γ B. ἡ Α τοῦ
ἀπὸ τῆς Γ O. — lin. 26. ὅπ. ἔδ. δ. add. B. — lin. 33. τὸ δὲ ὑπὸ
B. O. — ἐστι ab. O. — ὑπὸ ΒΑ ΑΓ V. — Lin. 2. ὅτι ab. P. — p. 38.
τῶν ab. V. — ἐστι ab. B. O. — lin. 24. Ἡ recepi ex V. ab. in
ceteris. — lin. 28. τῶν ab. V. — lin. 30. ὅπ. ἔδ. δ. add. O. P. —
Adsunt Lemmata, quae vide in app. — Lin. 8. καὶ ab. B. — lin. p. 39.
12. τῇ ΒΓ B. O. — lin. 13. μέρει addidi. — τῆς ἐλάσσονος, τῆς
ΒΓ B. O. — lin. 17. Καὶ ἐπεί ἐστιν O. P. — lin. 25. ΑΖ ΖΒ
ἄρα. — lin. 29. ΒΓ σύμμετρόν ἐστι τῷ P. — ὥστε καὶ σύμμετρον
adjeci. — Lin. 5. ὅπ. ἔδ. δεῖξαι B. Adest Lemma, quod vide in p. 40.
app. — lin. 19. τῆς Ζ ab. B. O. — lin. 21. οὖν ab. B. O. — lin.
26. αἱ ΑΔ . . . εἰσὶν ἀσύμμετροι abs. P. In O. adnotatur: Illud
αἱ . . . — μετροι ab. codd. Mspt. — et in B. legimus: Non
habet exemplar alterum. — lin. 29. διπλασίων ἐστὶν B. O. — lin.
30. ἀπὸ τῶν B. O. — ὥστε καὶ σύμμετρον abs. P. — lin. 31. ΑΒ

ΒΓ· ὑπόκειται γὰρ οὕτως B. O. — Lin. 4. *τὸ δ' ἀπ' αὐτων* B. — lin. 5. p. 41.
ὅπ. ἴδ. π. ab. B. — lin. 10. *ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ'*
αὐτῶν τετραγώνων edd. omnes. — lin. 14. *τῇ ΒΓ* O. — *ἀπὸ σύμμ.*
B. — lin. 16. *ὁμοίως τοῖς ἐπ. εἰρ.* B. O. — lin. 20. *ἀπὸ τῶν* ab.
O. — lin. 21. *ἐστιν ἴσον* B. O. — lin. 22. *ἴση ἄρα ἡ ΔΖ τῇ ΒΕ*
B. O. — lin. 26. *τὸ ὑπὸ* B. — *μέσον δὲ* B. — *ἄρα* ab. O. —
Lin. 2. *τῶν ὑπὸ τῶν* O. — lin. 3. *τῷ ἀπὸ τῶν* B. O. — lin. 4. *αἱ* p. 42.
ΑΔ ΔΒ abs. B. O. — lin. 6. *τετράγωνον* ab. V. — lin. 7. *τῷ*
συγκειμένῳ ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων edd. omn. — lin. 8. *ὅπ.*
ἴδ. δ. ab. B. — lin. 9. Adest in B. inscriptio *Ἀρχὴ τῶν κατὰ σύν-*
θεσιν ἑξάδων. — lin. 10. *ῥηταὶ εὐθεῖαι* Schol. Mon. — lin. 11. *κα-*
λεῖται V. — lin. 14. *ὅλη* ab. B. O. — lin. 22. pro *αἱ γὰρ . . . ἀπὸ*
τῶν ΑΒ ΒΓ B. et O. habent: *τὸ ἄρα δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τοῖς*
ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ἀσύμμετρόν ἐστι. — lin. 28. *ἐστι* ab. B. O. —
Lin. 8. *ἄρα* ab. O. — lin. 9. *καὶ* ab. B. O. — *συνθέντι ἄρα* B. O. — p. 43.
lin. 12. *Ῥητὸν δὲ . . τῶν ΑΒ ΒΓ* abs. B. O. — Adest Scholion,
quod vide in App. — lin. 24. *γὰρ* ab. B. O. — lin. 28. *δὴ τοῖς*
ἀ. τ. ΑΒ ΒΓ παρὰ τ. ΔΕ P. — lin. 31. *ἐστι* ab. B. O. — Lin. 3. p. 44.
παράκεινται B. O. — lin. 4. *Καὶ ἐπεὶ ἀσ.* B. O. — lin. 7. *τῷ*
ἀπὸ τῆς ΑΒ τὸ B. O. — lin. 16. *ἐστὶ ἀσύμμ. μήκ.* V. — *Ἐδείχ-*
θησ. δὲ ῥηταὶ ab. V. — lin. 21. *ὥστε καὶ* B. O. — *αὐτὸ* ab. V. —
lin. 23. Adest Scholium, quod vide in app. — lin. 29. *καλείσθω*
καὶ μείζων διὰ τὸ τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα μείζονα εἶναι τῷ ὑπ'
αὐτῶν. Schol. Mon. — *ἄρα* ab. V. — Lin. 7. *Ῥητὸν δὲ . . . τῶν* p. 45.
ΑΒ ΒΓ abs. — V. P. — lin. 10. B. habet: Addit exemplar alte-
rum. *Ἐκάλεσε δὲ αὐτὴν μείζονα διὰ τὸ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ ῥητὰ*
μείζονα εἶναι τοῦ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ μέσου. Haec leguntur etiam
in O. — lin. 15. *εὐθεῖα* ab. Schol. — lin. 16. *καλεῖται δὲ* V. —
lin. 23. *συνθέντι* ab. V. — lin. 32. *ἀσύμμετρον τῷ συγκειμένῳ ἐκ*
τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων edd. omn. — Lin. 5. *ποιοῦσαι τὰ προ-* p. 46.
κείμενα. Ἐκκείσθω etc. V. — *ἀσύμμετρον τῷ* etc. ut supra B. O. —
lin. 14. *καί ἐστιν ἴσον* P. — lin. 18. *Καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ*
B. O. — lin. 20. *ἄρα* ab. V. O. — lin. 26. Adsunt Scholia, quae
vide in app. — lin. 29. *καθ' ἑκατέρα . . . ὑποκείσθω δὲ* abs. V. —
Καὶ ὑποκείσθω P. — lin. 30. *τὸ ἀπὸ τῶν* B. — lin. 34. *καὶ λοιπὴ*
V. P. — *ἐστὶν* ab. B. O. — Lin. 4. *μὴν* ab. P. — lin. 5. *ἐστι* ab. p. 47.
P. — lin. 12. Quae litteris minoribus expressa sunt, ad rem ex-

plendam necessaria mihi videbantur. — lin. 13. *ἐκ τῶν* ab. B. —
lin. 15. B. O. add. *εἴπερ συναμφότερα ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ*,
sed notatur in margine O.: Illa *εἴπερ* . . desunt in codd. man. —
lin. 26. *ἡ ΑΒ τῇ ΔΒ*. — lin. 29. *τὸ αὐτὸ τμῆμα κατὰ τὸ Γ διαιρ.*
B. O. — In manuscript. *Ἔσται ἡ ΑΒ κατὰ τὸ αὐτὸ τμῆμα τὸ Γ*
διαιρ. διαιρεθεῖσα κατὰ τὸ Δ, notatur in O. — lin. 33. *τοῦ διχοτό-*
μου V. — lin. 34. *τοῦ ἀπὸ τῶν* B. O. — Lin. 9. *ὅπερ ἄτ.* ab. B. p. 48.
O. — *μέσον δὲ μέσ.* B. O. — lin. 12. *εἰς τὰ ὀνόμ.* ab. B. O. P.
— lin. 13. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — lin. 16. 35. *διαιρεῖται εἰς τὰ ὀνό-*
ματα B. O. — lin. 17. *Ἔστω δὴ* B. O. — lin. 21. *διῃρήσθω καὶ*
κατὰ edd. omn. — lin. 31. *διαιρεῖται εἰς τὰ ὀν.* edd. omn. — *ὅπ.*
ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 5. *κατὰ τῆς διχοτομίας, ὅτι οὐκ.* V. — lin. 8. p. 49.
καὶ κατὰ V. — lin. 11. *ΑΓ ΓΒ μείζονα τῶν ἀπὸ τῶν ΑΔ ΔΒ*
B. O. — lin. 13. *Καὶ* ab. V. — lin. 14. *ἡ* ab. in edd. sed *B* ha-
bet *ὁ*. — lin. 15. *παραλλ. ὀρθ.* ab. B. O. — lin. 21. *ἴσον τῷ δὶς*..
B. O. — lin. 22. *καὶ* ab. V. — Lin. 3. *ἐστὶ* ab. B. O. — lin. 8. p. 50.
ἄρα ab. V. — lin. 12. *τὸ* ab. B. — lin. 13. *ὅτι τὰ ἀπὸ* V. —
lin. 16. *τῶν* ante *ΑΔ* addidi. — lin. 20. Omnia, quae minoribus
litteris expressa sunt, addenda censeo. — lin. 22. *Ὅπ. ἔδ. δ.* ab.
B. — lin. 25. *εἰς τὰ ὀνόματα* add. B. O. — lin. 31. *καὶ κατὰ τὸ*
P. — Lin. 5. *ἀπὸ τῶν* ab. B. — lin. 7. 28. *ῥητοῦ ὑπερέχουσι* B. p. 51.
O. — lin. 7. *ἄτοπον* B. — lin. 9. *ἄρα* ab. P. — lin. 13. 34. *εἰς*
τὰ ὀνόματα add. B. O. — lin. 17. 22. *τὸ δὲ δὶς ὑπὸ* V. P. —
lin. 20. *καὶ κατὰ* edd. omn. — lin. 31. *καθ᾽ ἓν ἄρα σημεῖον διαίρ.*
sic edd. omn. *μόνον* ex conj. mea. — *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 6. p. 52.
αὐτῶν τῷ συγκειμένῳ ἐκ τῶν ὑπ᾽ αὐτῶν edd. omn. — lin. 30. *ἡ*
ἄρα ἐκ τῶν δύο V. P. — lin. 34. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 4. *τῆς* p. 53.
ἐκκειμένης ῥητῆς B. — lin. 15. Vocabulum *ἐλάσσονος* contractum
est et inter lineas exaratum in Cod. V. — lin. 21. Adest Scholium,
quod vide in app. — lin. 24. *μὲν* ab. O. — lin. 29. *καὶ* ab. B. O.
— Lin. 27. *ὅπ. ἔδ. ποιῆσ.* ab. B. — P. O. habent *ὅπ. ἔδ. δεῖξαι.* — p. 54.
Lin. 10. *ἄρα* ab. V. — lin. 29. *τῇ ἐκκ. ῥητῇ σύμμ. ἐστ.* V. — lin. p. 55.
31. *ὅπ. ἔδ. δ.* ab. B. — Lin. 6. *ἀριθμ. τετρ.* B. O. — lin. 15. p. 56.
Ῥητὴ δέ ἐστι B. O. — lin. 20. *Γεγονέτω δὲ* P. — lin. 23. *πρὸς*
τὸ ἀπὸ τῆς edd. omn. — Lin. 2. *πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΘ* B. — lin. 4. *οὐδὲ* p. 57.
τὸ . . . . *τετράγωνον ἀριθμὸν* abs. B. O. — lin. 6. *ἐστιν* ab. B. O.
— lin. 11. *ἐστὶν* ab. V. — lin. 16. *ἐστὶν* ab. B. O. — lin. 21. *ὅπ.*

ἴδ. ποιῆσ. ab. B. — P. O. habent ὄπ. ἴδ. δεῖξ. — lin. 26. πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν V. P. — μήτε μὴν πρὸς τὸν ΑΓ abs. B. O. — lin. 33. καὶ ab. B. O. — Lin. 2. οὐδὲ τὸ . . . . τετράγωνον ἀριθμὸν p. 58. abs. B. O. — lin. 10. καὶ ab. V. — lin. 16. οὐδ' ἄρα . . . . τετράγωνον ἀριθμὸν abs. B. O. — lin. 22. ὄπ. ἴδ. ποιῆσ. ab. B. — lin. 29. τις εὐθ. ῥητ. B. O. — lin. 32. τῆς ΖΕ· ὁ δὲ ΓΔ πρὸς τὸν etc. V. — Lin. 2. ἄρα ab. B. O. — lin. 4. ἄρα ab. O. — p. 59. lin. 19. τῇ ΖΗ B. O. — lin. 23. ὄπ. ἴδ. π. ab. B. — lin. 30. μήδε πρὸς B. O. — lin. 35. σύμμετρος ἄρα ἐστὶ ἡ Ε τῇ ΖΗ δυνάμει B. O. — Lin. 26. οὐδὲ τὸ . . . τετράγωνον ἀριθμὸν ab. B. — lin. 32. p. 60. τῆς ante ΖΗ et 33. ante ΖΘ ab. V. — Lin. 2. τῆς ante Κ et lin. 5. p. 61. ante ΖΗ ab. V. — lin. 13. ὄπ. ἴδ. π. ab. B. — lin. 22. τῇ ΒΗ μήκει B. O. — lin. 23. ἡ δὲ . . τῶν ΑΚ ΘΓ abs. B. O. — lin. 31. καὶ ὡς ἄρα . . . πρὸς τὸ ΒΓ ab. B. — lin. 35. ἐστι ab. V. — Lin. 3. ἴση γὰρ ἑκατέρα V. — lin. 7. πρὸς τὴν ΓΒ P. — lin. 11. p. 62. περιέχεται edd. omn. — lin. 16. τὸ ΑΓ V. — lin. 20. γάρ ἐστι ἐκ δ. ὁ. B. O. — lin. 26. Τετμήσθω δὲ B. O. — lin. 28. 29. τῶν ἀπὸ τῆς B. O. — lin. 29. τοῦ ἀπὸ τῆς V. P. — lin. 31. διελεῖ B. O. — lin. 33. τῶν ab. V. — lin. 34. διὰ τῶν Η etc. B. O. — Lin. 8. 9. p. 63. τὴν ab. V. — lin. 10. οὕτως ab. V. — τὸ ab. V. — lin. 11. τῷ μὲν . . . τὸ ΣΝ O. — lin. 15. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔ τῷ ΜΡ ὥστε καὶ τῷ ΩΞ ἴσον ἐστίν etc. V. — lin. 24. 34. μήκει ab. V. — lin. 26. 35. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 28. ΗΚ, καί ἐστι σύμμ. B. O. — Lin. 4. p. 64. οὕτως ab. V. B. — τὴν ab. V. — lin. 5. Ἴση δὴ O. P. — lin. 22. τὸ μὲν μεῖζ. B. O. — lin. 26. σύμμετρός ἐστι B. O. — lin. 35. ἐστὶ ab. V. — Lin. 3. ἀνάλ. ἐστι τῷ B. O. — lin. 6. Ἐπεὶ γὰρ p. 65. O. — lin. 8. μήκει ab. V. — ἐπεὶ ab. V. — lin. 11. τῶν ΑΗ ΗΕ. Ἀλλ' ἡ ΑΕ σύμμετρός ἐστι τῇ ΑΒ μήκει· καὶ αἱ ΑΗ ΗΕ ἄρα σύμμετροί εἰσι τῇ ΑΒ· αἱ ΑΗ ΗΕ ἄρα etc. V. — lin. 17. ἐστιν ab. V. — lin. 18. τῇ ΗΚ V. — lin. 20. ὥστε δυνάμει εἰσὶ σύμμετροι αἱ ΜΝ ΝΞ ab. V. — lin. 23. σύμμετρος ab. B. O. — lin. 25. pro ὥστε edd. omn. habent τουτ' ἐστιν. — lin. 31. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 32. καὶ ab. V. — lin. 34. μόνον adjeci. — Lin. 4. Ἡ p. 66. ΜΞ ἄρα B. O. — lin. 13. διῃρημένη B. — Ε, τὸ μεῖζον ἔστω V. — lin. 16. Κατασκευάσθω B. O. — lin. 19. δύναται τὸ ἀπὸ συμμ. B. — lin. 20. 33. ἐστι ab. V. — lin. 22. καὶ ὅτι αἱ B. O — lin. 23. μέσαι εἰσὶ . . . ἡ ΜΞ abs. B. O. — lin. 23. μέσων εἰσὶ B.

ρ. — lin. 27. ἀσύμμετρα B. — ἀσύμμετρον O. — lin. 30. ἐστι ab. B. O. — lin. 33. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 8. διηρημένη B. — p. 67.
lin. 18. 28. ἐστιν ab. B. O. — lin. 22. Δεικτέον δὲ O. — lin. 23. γὰρ ab. V. P. — lin. 25. δυνάμει ab. O. — B. habet δυνάμει μόνον. — lin. 29. ἐστιν ab. V. — lin. 31. τῆς EZ V. — lin. 32. μέσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ τῶν MN NΞ B. — lin. 35. συγκείμ. ab. V. — Lin. 2. p. 68.
καὶ ἔστιν ἀσύμμετρος ἡ MN τῇ NΞ. — lin. 16. διηρημένη B. — lin. 20. Κατασκευάσθω B. O. — lin. 22. Δεικτέον δὲ edd. omn. — lin. 24. ἄρα ab. B. O. — lin. 28. σύμμετρός ἐστιν ἡ EΔ B. — lin. 29. μήκει ab. V. — lin. 31. ἄρα ab. B. V. — Lin. 3. Ῥητὴ δὲ p. 69.
ἡ EK B. O. — lin. 4. ὑπὸ MNΞ V. — lin. 17. διηρημένη B. — lin. 20. Κατασκ. B. O. — γὰρ ab. V. — lin. 21. ἡ ab. V. — lin. 26. ἀπὸ τῶν ab. O. — lin. 28. ἄρα ab. O. B. — καὶ ab. V. — lin. 31. ἐστιν ab. V. — Lin. 3. Καὶ ἐστὶ . . . αἱ MN NΞ, quod p. 70.
bis adest in O., ab. in V. — lin. 10. περιεχομένων B. — lin. 12. ὑπὸ τῆς κατὰ τὸ T B. — lin. 18. 21. τῆς ab. V. — lin. 20. ἐστι ab. B. O. — lin. 23. τῶν ab. V. — Lin. 6. ἑκατέρα τῶν MA ΠZ p. 71.
ab. V. — lin. 11. ῥητά εἰσι B. O. — lin. 13. ῥητὸν ἄρα . . . ἀπὸ τῶν AΓ ΓB abs. V. P. — lin. 20. καὶ ab. edd. omn. — ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ MΠ B. O. — lin. 27. γὰρ ab. V. — lin. 31. οὕτως ab. V. B. — lin. 35. μήκει ab. V. — Lin. 3. τῇ MΠ B. — lin. 5. μέρει p. 72.
ab. V. B. — lin. 6. μήκει ab. V. — lin. 11. ἡ ΔM . . . . συμμέτρου ἑαυτῇ abs. B. O. — lin. 22. εἰς τὰ μέσα. — lin. 23. καὶ παραβεβλ. παρὰ τ. ΔE B. O. — lin. 27. Κατασκ. B. O. — lin. 32. καὶ παρὰ ῥητὴν παράκειται B. O. — τὴν ab. V. — lin. 34. ἐστι ab. B. O. — Lin. 2. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 12. ἐστι καὶ τὸ edd. p. 73.
omn. — lin. 17. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 29. Κατασκ. B. O. — γὰρ ab. V. — lin. 30. δευτέρα ἐστὶ B. O. — Lin. 2. παρὰ τὴν ΔE p. 74.
ῥητὴν V. P. — lin. 3. 13. καὶ ab. B. O. — lin. 15. δὴ ab. V. — lin. 16. τοῖς προτέροις V. P. — lin. 17. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 23. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 29. τις ἔστω ab. V. — lin. 34. γὰρ ab. V. — Lin. 5. ἄρα ἐστὶ τὸ V. — lin. 6. ἐστὶ ab. V. — lin. 8. παρὰ p. 75.
ῥητήν ἐστι τὴν MA V. — lin. 11. ἄρα ab. V. — lin. 14. Ὁμ. δὴ δείξομεν τοῖς προτ. V. P. — lin. 18. ἐστι ab. B. O. — lin. 19. ὥςτε καὶ ἡ KΔ τῇ KM ἀσ. ἐ. B. O. — lin. 21. παραβλ. παρὰ τ. μ. B. O. — lin. 23. μήκει ab. V. — lin. 30. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. —
Lin. 8. γὰρ ab. V. — lin. 17. ἐστιν ab. V. — lin. 18. μήκει ab. p. 76.

V. — lin. 24. τῇ *KM* ab. B. — μήκει τῇ *KM* O. — lin. 26. ῥηταὶ ab. V. — lin. 28. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 10. συγκείμενον post p. 77.
τετραγ. V. P. — lin. 11. τῷ ἐκ τῶν ὑπ' αὐτῶν V. P. — lin. 17. ἐστι ab. V. — lin. 21. Ὁμοίως δὴ V. P. — τοῖς πρ. τούτ. ab. V. P. — lin. 29. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — Lin. 11. 12. τὴν ab. V. — lin. 11. p. 78.
οὕτως ab. B. V. — lin. 18. ἤτοι ab. O. B. — lin. 20. δυνήσεται B. O. — lin. 24. ἐστι B. O. — lin. 27. διά τὸ B. — lin. 29. ἔσται V. P. — lin. 33. δύναται V. P. — Lin. 2. σύμμετρός ἐστιν αὐτῇ p. 79.
edd. omn. — lin. 3. καὶ ἔσται edd. omn. — lin. 5. σύμμ. ἔσται V. P. — καὶ ἔσται edd. omn. — lin. 7. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 10. καὶ αὐτὴ ab. B. O. — lin. 14. ἡ *AB* διῃρημένη B. O. — lin. 17. 19. 22. 28. 29. τὴν ab. V. — lin. 17. 23. 28. οὕτως ab. B. V. — lin. 20. σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ μὲν *AE* τῇ *ΓZ*, ἡ δὲ *EB* τῇ *ZΔ*· καί εἰσι μέσαι αἱ *AE EB*· μέσαι ἄρα etc. O. B. — lin. 24. 25. εἰσ. σύμμ. B. O. — lin. 31. ἄρα ab. V. — Lin. 2. τὸ ὑπὸ *ΓZ* B. p. 80.
— lin. 3. ῥητόν ἐστι edd. omn. — Post ἔσται add. Cod. V. εἴτε μέσον, μέσον· καὶ ἔστιν ἑκατέρα δευτέρα καὶ διὰ τοῦτο ἔσται ἡ *ΓΔ* τῇ *AB* τῇ τάξει ἡ αὐτή· ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 3. ἑκατέρα ab. edd. omn. — lin. 6. ἔσται ab. edd. omn. — lin. 16. γεγονέτω γὰρ V. P. — lin. 17. ἡ *AB* πρὸς *EB*, οὕτως ἡ *ΓZ* πρὸς *ZΔ* καὶ ὡς V. — lin. 23. 24. 25. τὴν ab. V. — lin. 24. ἐστιν ab. B. O. — lin. 30. 31. πρὸς τὸ ἀπὸ B. — Lin. 8. εἰσ. ἀσύμμ. B. O. — lin. 9. ἅμα p. 81.
ῥητὸν V. P. — τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτ. B. — lin. 12. 32. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 23. κατασκ. B. O. — lin. 28. τῶν τῶν ab. V. B. — μὲν ab. B. O. — Lin. 6. δεικτέον δὴ edd. omn. — lin. 11. τετρα- p. 82.
γώνων ab. V. — lin. 13. ἀπὸ τῶν ab. B. — lin. 18. *ZΔ*, ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ V. — lin. 23. Ἡ ἄρα *ΓΔ* V. P. — lin. 24. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 27. ἢ ἐκ δύο B. et in margine notatur: „Habet alterum „exemplar ἤτε καὶ ἢ conjunctive; sed perinde est.“ — Lin. 5. ἴσον p. 83.
κατὰ τὴν *EZ*, παραβ. etc. V. — edd. cet. habent παρὰ τὴν *EZ* τοῦτ' ἔστι τὴν *ΘΠ*. — lin. 7. τὸ *EΠ* B. O. — lin. 8. ῥητὴν ab. V. — lin. 9. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν ἡ *EΘ* B. O. — καὶ ἀσύμμ. B. — lin. 10. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 11. τὸ *ΘΙ* B. O. — lin. 12. ῥητὴν τὴν *EZ* τοῦτ' ἔστιν τὴν *ΘΠ* edd. omn. — παρὰ ῥητὴν τὴν *EZ* παρὰκ. V. — lin. 27. 35. καὶ ἔστω μείζων B. O. — lin. 34. ἀπὸ συμμ. B. — lin. 35. τῇ *EK* ἐκκειμένῃ B. — Lin. 11. μήκει adjeci. p. 84.
— lin. 13. ἑαυτῇ μήκει edd. omn. — καὶ ἔστω O. — lin. 19. χω-

ϱίον ab. V. — lin. 21. ἔστω B. O. — lin. 30. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 34. ἤτοι ἐκ δύο V. — In margine ed. B. legimus: „Vel ἤτε „καὶ ἡ ut supra.“ — Lin. 6. Ἔστω εἰ τύχοι V. — lin. 22. μήκει ad- p. 85.
didi. — lin. 23. μήκει post ἑαυτῇ abjeci. — lin. 34. δυναμένη ἡ δύο V. P. — Lin. 2. ὥςτε καὶ ἡ etc. V. P. — lin. 3. ἡ δύο μέσα p. 86.
V. P. — lin. 4. Ὁμοίως δὴ . . . μέσα δυναμένη abs. V. — lin. 6. δύο ἡ μέσα O. — ἡ ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη B. — lin. 9. Adest Lemma, quod vide in app. — Quae sequuntur in ed. O. inscripta sunt Ἀρχὴ τῶν καθ' ἀφαίρεσιν ἑξάδων et in B. Δευτέρα τάξις ἑτέρων λόγων τῶν κατὰ ἀφαίρεσιν — Ἀρχὴ etc. — lin. 13 τῆς ab. B. — lin. 14. τῇ ΑΒ ab. edd. omn. — lin. 15. ἐστιν ἡ καλουμένη ἀποτομὴ edd. omn. — lin. 17. τὴν ab. B. — lin. 22. τὰ ἄρα ἀπὸ . . . τῶν ΑΒ ΒΓ abs. V. pro hisce quae sequuntur καὶ ἐπειδήπερ τὰ . . . . ἀπὸ τῆς ΑΓ a nobis uncis inclusa ante verba καὶ λοιπῷ etc. scripta reperiuntur. — lin. 32. περιέχουσα scripsi ex Schol. Mon. pro vulgato περιέχῃ. — Lin. 3. ὅλῃ τῇ abs. edd. omn. p. 87.
— lin. 4. ῥητὸν ποιοῦσα edd. omn. — lin. 5. καλείσθω (καλεῖται V.) δὲ etc. addunt edd. ceterae. — lin. 10. τῶν ab. V. — lin. 12. Ῥητὸν δὲ . . . τῆς ΑΓ abs. B. — lin. 14. ἐστιν ab. B. O. — Καλείσθω δὴ V. — lin. 19. περιεχούσῃ B. O. P. Nobiscum V. — lin. 23. μετὰ δὲ ὅλης V. — lin. 24. καλείσθω δὲ etc. add. edd. omn. — lin. 25. καὶ τῷ μὲν ἀπὸ B. — Lin. 7. καὶ τῇ ΒΓ V. P. p. 88.
— lin. 11. ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ δὶς ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ B. O. — lin. 14. ἐστι ab. B. O. — lin. 17. μήκει ab. V. — lin. 20. ὀρθογώνιον ab. V. — lin. 21. ἄρα αὐτὸ B O. P. sed nobiscum V. — lin. 21. Ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕ. haec adjicienda mihi videbantur. — lin. 23. μέση ἀποτομὴ B. O. — lin. 27. τὸ μὲν ἀπ' αὐτ. edd. omn. — lin. 31. ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω ὅτι etc. V. — lin. 33. ἅμα ante ῥητὸν abjeci cum insit vis hujus verbi voci συγκείμενον. — lin. 34. καλείσθω δὲ etc. add. O. P. ἡ καλουμένη etc. V. B. Ob hanc hujus additamenti diversam in variis codd. formam abjiciendum illud putavi, cum ex repetitione verborum theorematis nimis anxia ortum esse videatur. — Lin. 6. p. 89.
λοιπῷ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἀσύμμ. ἐστ. τ. ἀπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ V. — edd. cet. ut nos, omisso tamen vocabulo λοιπῷ. — lin. 7. ἄλογόν ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ. Καλείσθω V. — lin. 19. ποιοῦσα τὰ προκείμενα· λέγω V. — lin. 21. Καλείσθω (καλεῖται)

δὲ etc. edd. omn. — lin. 25. *ΑΒ ΒΓ* τετράγωνα τῷ δὶς etc. B. O.
— καὶ ab. V. — lin. 29. ἡ *ΑΓ* ἡ προειρημένη cetera abs. V. —
Lin. 2. τὸ μὲν συγκ. B. O. P. (sed nobis cum V.) — lin. 3. τό τε p. 90.
δὶς ὑπ' αὐτῶν μέσον exciderunt B. — τὸ δὲ etc. O. P. (sed nobis
cum V.) — lin. 4. ἔτι δὲ B. — καὶ ἔτι O. P. — τετραγώνων O.
P. — lin. 9. ποιοῦσα τὰ προκείμενα λέγω V. P. — τὸ δὲ B. O. —
lin. 11. τὸ δὲ B. O. — ἔτι δὲ O. — lin. 13. καλείσθω δὲ (ἡ κα-
λουμένη V. P.) etc. add. edd. omn. — lin. 15. ῥητὴν post παρὰ
omisi cum V. — lin. 17. πλάτος ποιοῦν τὴν *ΔΖ* ab. V. — lin. 20.
τετραγώνων ab. P. — lin. 21. ἐστὶ ab. V. — lin. 29. ἐστὶ ab. V. —
lin. 30. οὕτως ἐστὶ ἡ V. P. — οὕτως ἐστὶ καὶ ἡ B. O. — lin. 31.
τὴν ab. V. — lin. 35. ὀρθογώνιον ab. V. — Lin. 2. τὸ *ΖΕ* ἄρα p. 91.
ἄλογόν ἐστι a me inserta sunt ut ad rem necessaria. — lin. 7. μό-
νον ab. V. — lin. 12. προςαρμόσει B. O. P. — lin. 14. προςαρμο-
ζέτω ἡ *ΒΔ*, καὶ αἱ V. edd. cet. omittunt καὶ. — lin. 21. καὶ ab.
V. — lin. 22. Τὸ δὲ ἀπὸ B. O. — lin. 23. ῥητὴ γὰρ edd. omn. —
ῥητὴ γὰρ ἑκατέρα B. — lin. 29. προςαρμόσει B. O. — lin. 30. ὅπ.
ἔδ. δ. ab. B. — lin. 32. Τῇ μέσῃ edd. omn. — μόνον μία B. O.
— Lin. 4. μέση edd. omn. — lin. 5. αἱ ἄρα *ΑΓ ΓΒ* B. O. — p. 92.
lin. 15. πάλιν ab. V. P. — lin. 24. μέσῃ edd. omn. — lin. 25. ὅπ.
ἔδ. δ. ab. B. — lin. 27. Τῇ μέσῃ edd. cet.; sed nobiscum con-
gruenter V. — lin. 29. οὖσα ab. V. — lin. 31. μέση edd. cet.; sed
nobiscum V. — Lin. 2. προςαρμόσει B. O. — lin. 4. προςαρμο- p. 93.
ζέτω ἡ *ΒΔ*, καὶ αἱ etc. V. P. sed B. O. omittunt καὶ. — lin. 5.
ΑΔ ΔΒ ἄρα B. O. — lin. 7. μὲν ab. B. O. — lin. 26. εἰσὶν σύμμ.
B. O. — lin. 28. οὕτως ἄρα καὶ τὸ B. — οὕτως καὶ τὸ O. —
οὕτως ἐστὶ τὸ V. P. — lin. 30. ἐστὶ καὶ τὸ B. O. — Lin. 9. τῇ p. 94.
ΕΘ inserenda putavi. — lin. 12. μεσῇ edd. omn. excepto cod. V.
— lin. 13. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 24. προςαρμόσει edd. omn. —
lin. 26. καὶ ab. B. O. — lin. 28. ποιοῦσα τὰ προειρημένα· καὶ ἐπεὶ
V. P. — lin. 33. τετραγώνων ab. B. O. — lin. 34. ἐστιν ab. B. —
Lin. 3. 29. ἐστιν ab. B. O. — lin. 5. 32. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. p. 95.
14. ἡ *ΑΒ*, καὶ τῇ *ΑΒ* προςαρμοζέτω ἡ *ΒΓ* V. — lin. 15. ποιοῦ-
σαι τὰ προκείμενα· Ἐπεὶ οὖν, ᾧ ὑπερέχει etc. (lin. 23.) V. —
lin. 18. 30. προςαρμόσει B. O. P. — lin. 25. Post *ΑΓ ΓΒ* addunt
edd. cet. ἀκολούθως τῶν (τοῖς V.) πρὸ αὐτοῦ. — lin. 30. V. per-
git δυνάμει ἀσύμμετρος οὖσα τῇ ὅλῃ μετὰ δὲ τῆς ὅλης ποιοῦσα τὰ

προκείμενα· μία ἄρα μόνον προςαρμόσει. — B. O. δυνάμει ἀσύμ-
μετρος ποίουσα τὸ μὲν συγκείμενον ἐκ τῶν ἀπ' αὐτῶν τετραγώνων
μέσον, τὸ δὲ δὶς ὑπ' αὐτῶν ῥητόν· τῇ ἄρα etc. ut nos; sed. in B.
omissum est ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 4. μία μόνη V. — τῷ συγκειμένῳ p. 96.
O. P. — τῷ ὑπ αὐτῶν abs. O. P. — τῷ δὶς ὑπ' αὐτ. habet B. —
lin. 11. αὐτῇ ab. B. — lin. 12. ποιοῦσαι τὰ προειρημένα V. P. —
lin. 15. τῷ δὶς ὑπὸ B. O. — lin. 16. εὐθεῖα ab. V. — προςαρμό-
σει edd. omn. — δυνάμει . . . τῆς ὅλης abs. V. P. — lin. 20. ποι-
οῦσα τὰ μὲν edd. cet. sed V. nobiscum. — lin. 27. ἴσον παρὰ
τὴν EZ παραβεβλήσθω τὸ ΘΠ V. — lin. 29. μὲν post τοῖς abjeci
cum V. — Lin. 4. ἐστιν ab. B. O. — lin. 5. τὸ ΘΠ B. O. — p. 97.
lin. 9. ἄρα post ἀσύμμ. abjeci cum V. — lin. 17. ἀσύμμετρος B.
O. — lin. 21. καὶ τὸ . . . μέσον abs. B. O. — lin. 22. καὶ ἔτι τὰ
ἀπ' V. P. — lin. 23. τῷ δὶς ὑπ' edd. omn. — ὅπ. ἔδ. δ. ab. B.
— lin. 27. ᾗ ab. V. — Lin. 5. ἀπὸ συμμέτρου B. — μήκει V. — p. 98.
lin. 15. ὁ ante ZΔ adjeci cum V. — lin. 19. ΗΓ τετράγωνον V.
— lin. 30. δὴ adjectum est a me. — Lin. 10. μήκει τῇ Δ V. — p 99.
lin. 13. ὅπ. ἔδ. εὑρεῖν V. — ὅπ. ἔδ. δεῖξαι B. — lin. 17. καὶ ab.
B. O. — lin. 21. ΗΒ τετράγωνον V. — lin. 22. idem V. P. —
lin. 23. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 24. ἀπὸ ab. O. — lin. 27. ἄρα a
me insertum. — lin. 28. ἄρα ab. V. — Lin. 7. μεῖζον τὸ P. — p. 100.
lin. 10. τῇ ἐκκειμ. ῥ. σύμμ. τῇ Δ· ἡ etc. V. — lin. 12. ἡ δευτέρα
ab. B. — ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 16. Ἐκκείσθ. ῥητὴ ἡ Δ καὶ ab.
B. — lin. 24. ΗΘ τετράγωνον edd. omn. — lin. 24. Ἐπεὶ οὖν . . .
τῆς ΖΗ τετράγωνον. Haec a me recepta ex cod. V. — Quae
sequuntur lin. 26. σύμμ. . . . ΖΗ τετραγώνῳ recepta ex eodem
etiam in P. — lin. 31. 35. τετράγωνον ab. B. O. — lin. 35. πρὸς
ΓΔ B. — Lin. 6. οὐκ ἄρα B. O. — lin. 15. πρὸς ΓΔ V. — p. 101.
lin. 23. μήκει τῇ Δ B. O. — lin. 28. τετράγ. ab. B. O. —
lin. 34. Κ ἡ ἄρα . . . τῷ ἀπὸ abs. V. P. — Lin. 5. ὅπ. ἔδ. π. p. 102.
abs. B. — lin. 12. ἑκάτερον τὸν edd. omn. — lin. 26. Λέγω δὴ . .
τετάρτη ab. V. — edd. cet. habent δὲ. — lin. 27. Ὧι οὖν μεῖζον
τὸ ἀπὸ B. O. — lin. 30. καὶ ἀναστρέψ. V. P. — lin. 31. τὸν ab.
V. — Lin. 6. μήκει ab. V. — ἐστιν ὅλη. V. — lin. 7. μήκει τῇ Δ p. 103.
B. O. — ΒΓ ἄρα B. O. — lin. 9. ΒΓ ab. B. O. et in V. ante
τετάρτη scriptum est. — ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 13. μήκει ab. B.
O. — lin. 14. ἐστιν ab. V. — lin. 18. τὸν ab. V. — lin. 20. σύμ-

μετρον ἄρα . . . τὸ ἀπὸ τῆς ΓΗ abs. V. — lin. 21. *ἄρα καὶ . . .*
τῆς ΗΒ abs. V. — lin. 25. *οὐδὲ τὸ ἀπὸ* V. — Lin. 9. *μεῖζον* ab. p. 104.
V. — lin. 10. *ἀπὸ συμμέτρου* B. — lin. 15. *ὅπερ ἔδ. π.* abs. B. —
lin. 20. *ἔτι δὲ . . . τετράγωνον ἀριθμὸν* abs. B. O. — Lin. 3. *ἐστὶ* p. 105.
a me additum. — lin. 12. *ἡ ἄρα Ζ Θ* B. O. — lin. 24. *καὶ οὐδε-*
τέρα τῶν B. O. — lin. 25. *τῇ Α ῥητῇ μήκει* sic edd. omn. — Lin. p. 106.
5. *μήκει τῇ Α* edd. omn. — lin. 7. *ὅπ. ἔδ. π.* abs. B. — lin. 14.
πρώτης ab. O. — lin. 22. *παραλληλόγραμμον* ab. V. — lin. 23.
διαιρεῖ. — Lin. 15. *περιεχόμ. ὀρθ.* ab. O. — Verba *ΖΗ περιεχό-* p. 107.
μενον . . . ὡς ἡ ΑΖ exciderunt in ed. B. — lin 16. *τετραγώνῳ* ab.
O. — lin. 18. *τὴν* ab. V. — lin. 19. *ἐστὶ* ab. B. O. — lin. 22.
μὲν ab. B. O. — lin. 25. *ἴσ. ἐστ.* B. O. — lin. 27. *καὶ λοιπὸν* B.
O. — lin. 31. *καὶ* ab. B. O. — lin. 33. *ἴσον τοῖς* O. P. — lin. 34.
ἑκατέρων τῶν B. O. P. Nostra tuetur V. — Lin. 5. *καὶ* post *ἐστὶ* p. 108.
abjeci cum V. — lin. 13. *ὅπερ ἔδει δεῖξαι* abs. B. — lin. 24. *ἡ δὲ*
ΑΗ ὅλη B. O. — lin. 27. *μήκει* ab. V. — lin. 30. *διαιρεῖ* V. —
lin. 31. *καὶ τὸ ἀπὸ τῆς* B. O. — lin. 34. *Καὶ διὰ τῶν . . . τῇ ΖΗ*
μήκει abs. V. — Lin. 10. *ῥητὴ ἄρα ἐστὶ . . . τῇ ΑΓ μήκει* abs. V. p. 109.
— lin. 15. *ὑπὸ τῶν ΛΟΜ* V. — lin. 18. *καὶ σύμμετρα ἀλλήλοις*
abs. V. — lin. 20. *ἄρα* ab. V. — lin. 21. *μέσαι εἰσί· Λέγω ὅτι καὶ*
δυνάμει μόνον σύμμετροι B. V. — lin. 22. *Ἐπεὶ γὰρ* V. P. — lin.
26. 31. *ἐστὶ* ab. V. — Lin. 2. pro *τοῦτ' ἔστι* V. habet *τὸ δὲ ΤΣ* p. 110.
ἐστὶ — τῆς ΑΝ ἄρα V. — lin. 3. *τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ χωρίον* V. —
lin. 4. *δὴ* ab. V. — *μέση* V. — lin. 5. *τῷ ΜΝ τοῦτ' ἔστι* abs. V.
— lin. 6. *ἐστὶ* ab. V. — lin. 9. *Καὶ ὡς ἄρα τὸ ΑΞ* B. O. — lin.
15. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — Lin. 6. *τῇ ΑΓ μήκει· ὥστε καὶ αἱ ΑΖ* p. 111.
ΖΗ· ἑκάτερον ἄρα etc. V. — lin. 11. *μήκει* ab. B. O. — lin. 19.
ἀσύμμετρον . . . τῷ ΕΚ abs. V. — lin. 29. *ἐστὶ* ab. B. O. —
lin. 35. *ἴσον τῷ ΔΘ* B. O. — *ἐστι τῷ ΔΘ* V. — Lin. 6. *μέση* B. p. 112.
O. — lin. 20. *καὶ* ab. V. P. — lin. 23. *χωρίον* ab. B. O. — lin. 25.
ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 30. *τῆς* ab. O. — Lin. 4. *δυναμένη* V. — p. 113.
lin. 10. *ἴσον* ab. B. — lin. 12. *ἐστὶν μήκει* V. — lin. 21. *ἀφῃρήσθω*
περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὴν ἀπὸ τῶν ΛΟΜ τὴν ΝΞ. — lin. 26.
τὴν ab. V. — lin. 29. *ἐστι* post *οὕτως* abjeci cum V. — lin. 33.
Ἀλλὰ τῷ μὲν . . . τὸ B. O. — Lin. 12. *ἴσον τοῖς ΛΟ ΟΝ τετραγώνοις* p. 114.
B. — lin. 16. *ΟΝ τετραγώνῳ* V. P. — lin. 22. *ὅπ. ἔδ. δεῖξ.* abs. B.
— lin. 36. *Ἐπεὶ οὖν . . . ἑαυτῇ μήκει* a me addita sunt. — *τ. τῶν*

abs. B. — Lin. 9. Καὶ ἤχθωσαν . . . ΕΘ ΖΙ ΙΚ abs. V. — lin. 13. p. 115.
καὶ a me additum. — lin. 15. τὸ ΝΞ ante περὶ rectius habet V. —
lin. 20. χωρίον ab. O. — lin. 27. καὶ αὐτὸ ῥητόν ἐστι V. — lin. 32.
ἡ ab. B. O. — lin. 34. μέσον ab. B. O. — lin. 36. ὅπ. ἔδ. δ. abs.
B. — Lin. 12. οὐδέτερα (O. οὐδέτερον) τῶν ΑΠ ΠΔ B. O. — lin. 17. p. 116.
παραβάλλωμεν. — lin. 20. σημεῖον ab. V. — lin. 17. Πάλιν ἐπεὶ . . . καὶ
τὸ ΔΚ abs. V. — lin. 20. σημεῖον ab. V. — lin. 34. ὂν τῷ ΛΜ abs. V. —
Lin. 5. Λέγω ὅτι ἡ ΛΝ ἡ μετὰ etc. sic legendum est cum edd. p. 117.
omn. ἡ ante μετὰ ab. V. — lin. 10. ἄρα ab. V. — lin. 16. τὸ μὲν
συγκ. B. — lin. 22. ΑΒ ab. V. — lin. 23. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. —
lin. 34. πλατὸς ποιοῦν τὴν ΓΚ a me addita sunt; item lin. 35.
πλ. π. τ. ΚΜ. — Lin. 4. τῶν ab. V. — lin. 7. τῶν ab. B. — lin. p. 118.
9. καὶ a me additum. — lin. 13. ἐστι ab. V. — lin. 15. 34.
ἐστὶν ab. B. O. — lin. 17. τὰ δὲ δὶς . . μέσα V. — lin. 18. ἄρα
ab. B. — lin. 19. Καὶ ἐστὶ τοῖς . . . ἴσον τὸ etc. B. O. — lin. 21.
22. ΔΜ pro ΓΛ habet B. — lin. 26. δὴ ab. B. O. — lin. 30. τὸ
ΛΝ scriptum est ante τῷ δὲ ἀπὸ etc. et post ΑΠ ΠΒ additum
ἴσον B. O. — lin. 35. Verba ὡς ἄρα ἡ ΓΚ etc. . . πρὸς τὴν ΚΜ
abs. in V. et in Mnscpto Gregorii. Uncis haec verba inclusit Gry-
naeus. — Lin. 6. ἐστι ab. V. — lin. 11. τῷ ὑπὸ B. O. — lin. 17. p. 119.
ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 22. ἀποτομὴ μέση B. — lin. 32. μέσοις
οὖσι abs. V. — Lin. 5. ἐστὶ a me additum. — καὶ ab. V. P. — p. 120.
lin. 6. ῥητὴ ἄρα . . . ἡ ΖΜ abs. B. — ἐστι ab. V. — lin. 7. καὶ
ἀσύμμετρος O. P. — lin. 12. ἐστὶν ab. V. — lin. 22. τῷ δὲ . . τὸ
V. — lin. 30. Καὶ ἐπεὶ . . . τῇ ΚΜ abs. V. — lin. 34. τῷ δὲ τε-
τάρτῳ B. O. — Lin. 2. τῷ ὑπὸ B. V. — lin. 3. τῆς ab. B. — p. 121.
lin. 5. μήκει ab. B. O. — lin. 8. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 13. μέση
ἀποτομὴ edd. omn. — Lin. 7. σύμμετρόν ἐστι abs. V. — lin. 8. p. 122.
τῷ δὶς B. — ἀσύμμ. ἄρα . . . ὑπὸ τῶν ΑΠ ΠΒ abs. V. — lin.
19. ἐστὶ καὶ abs. B. O. — ἐστι ab. V. P. — lin. 26. πρὸς ΚΛ B.
— lin. 29. καὶ ὡς ἄρα B. O. — lin. 30. τὴν ab. B. — Lin. 4. μή- p. 123.
κει συμμ. ἐστ. B. O. — lin. 7. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 14. παρὰ
ῥητὴν τὴν V. P. — lin. 22. Linea τῷ δὲ . . . τὴν ΚΜ excidit in
B. — lin. 23. παρὰ τὴν ΚΘ παραβεβλ. abs. V. P. Legimus in
margine O. „Rectius in Cdd. msc. desiderantur." — lin. 32. οὖν
καὶ ἡ V. P. — lin. 35. τῶν ab. V. — Lin. 6. μὲν ab. V. — lin. 9. p. 124.
10. ἐστι ab. V. — lin. 12. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 9. ὑπὸ ἐλάσσ. O. — p. 125.

lin. 10. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 33. ἀπὸ τοῦ Ν ὁποτέρᾳ B. O. —
Lin. 3. 9. 19. ἐστὶ ab. V. — lin. 24. διαιρεῖ αὐτὴν B. O. — lin. 29. p. 126.
Ἀπὸ τῆς ἄρα B. — ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 9. μέσον καὶ ἀσύμμε- p. 127.
τρον τὸ ἀπὸ τῶν *ΑΗ ΗΒ* V. — lin. 14. 18. 27. ἐστὶ ab. V. —
lin. 25. ἀπὸ τῶν abs. V. — lin. 28. τὸ ab. V. — Lin. 5. τὸ ἀπὸ p. 128.
τῆς *ΓΘ* V. — lin. 7. 8. ἐστι ab. B. O. — lin. 10. ἀπὸ τῶν abs. V.
— lin. 13. ἴσον ἐστὶ τὸ *ΝΛ* V. P. — καὶ τῶν ἄρα . . . τὸ *ΝΛ* abs.
V. — lin. 14. ἔστιν ἄρα . . . πρὸς τὸ *ΚΛ* abs. B. O. — lin. 20.
Ἀπὸ τῆς ἄρα B. — lin. 21. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 25. συμμ. ἔστ.
μ. B. O. — lin. 32. ἐστι ab. V. — Lin. 2. Καὶ αἱ *ΑΕ ΕΒ* V. P. p. 129.
— lin. 4. σύμμετροι. Ἐπεὶ οὖν ἐστιν ὡς etc. (lin. 7.) V. — lin. 6.
τῇ *ΑΒ* ab. B. — lin. 8. ἐστιν ab. B. O. — lin. 9. δὲ ab. V. —
lin. 15. καὶ ἡ *ΓΖ* abs. B. — lin. 17. τῷ ab. B. — lin. 24. ὅπ. ἔδ.
δ. abs. B. — lin. 26. μέση . . μέση B. — lin. 28. 31. μέση B. —
lin. 34. σύμμετρος ἄρα . . . τῇ *ΓΖ* abs. B. O. — Lin. 3. καὶ αἱ p. 130
ΓΖ . . . μόνον σύμμετροι abs. B. O. — lin. 4. μέση B. — lin. 6.
Δεικτέον δὴ ὅτι B. O. — lin. 8. ἀλλ' ὡς μὲν . . . τὸ ὑπὸ τῶν *ΓΖ*
ΖΔ abs. V. P. — lin. 13. ἐναλλὰξ ἄρα . . . τῶν *ΓΖ ΖΔ* abs. V.
P. — lin. 16. 32. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 18. ῥητόν ἐστι B. O. —
lin. 20. ἔσται ab. V., cett. edd. ἐστὶ. — lin. 21. Μέση B. —
lin. 22. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 25. Ἔστω γάρ. — lin. 27. τοῖς
πρότερον ab. V. cett. edd. habent τῷ προτέρῳ. — lin. 33. καὶ ἐναλ-
λὰξ ab. V. P. — Lin. 6. τῶν ab. O. — ἀπὸ τῶν abs. B. — ῥητὸν p. 131.
ἄρα . . . τετραγώνων abs. B. — lin. 10. καὶ ἐναλλὰξ ab. V. P. —
lin. 11. τετραγώνῳ ab. B. O. — lin. 12. ἐστι ab. V. — lin. 18. ὅπ.
ἔδ. δ. abs. B. Sequitur demonstratio altera, quam vide in appen-
dice. — lin. 21. καὶ αὐτὴ post σύμμετρος abjeci cum cod. V. —
lin. 24. ἔστω a me adjectum. — λέγω ὅτι καὶ V. P. — lin. 32.
ἐστι ab. B. O. — μὲν ab. V. P. — Lin. 6. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — p. 132.
lin. 12. ἔστω ab. B. O. — ὅτι καὶ V. — lin. 18. Ejeci τετραγώ-
νων post αὐτῶν. — lin. 24. τε ab. V. — lin. 26. Abjeci τετραγώ-
νων post αὐτῶν cum cod. V. — lin. 29. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 3. p. 133.
χωρίον ab. V. — lin. 10. μὲν ab. B. O. — lin. 12. ῥητὴ ἄρα ἐστὶν
ἡ *ΖΘ* B. O. — ῥητὴ μὲν ἄρα V. — lin. 18. ἀπὸ συμμέτρου ἢ οὔ.
— lin. 20. ἀπὸ ἀσυμμέτρου P. — lin. 23. περιεχόμενον ab. B. O.
— lin. 28. ἄρα ab. V. — lin. 30. Ἡ ἄρα . . . ἔδει δεῖξαι abs. V.
— lin. 32. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 4. 8. 33. ἤτοι μέση B. — p. 134.

lin. 15. ταύτῃ V. — lin. 21. ἀποτομὴ δευτέρα ἐστὶ V. — lin. 22.
μέση B. — lin. 23. ἐστ. πρώτ. V. P. — lin. 24. μεῖζον τῆς ZK
(V. τῇ ZK) B. O. — lin. 25. ἑαυτῇ ab. V. — lin. 27. ἄρα ab.
V. — lin. 28. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 5. μέση B. — μετὰ τοῦ p. 135.
V. — lin. 7. Cod. V. habet. Ἐπεὶ γ. μ. ε. ἐκ. τ. BΓ BΔ καὶ
ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ BΓ τῷ BΔ ἔσται ἀκ . . . . καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρον
ὑπόκειται τὸ BΓ etc. — B. Ἐπεὶ γ. μέσ. ἐστ. ἐκ. τῶν BΓ BΔ, καὶ
ἀσύμμετρόν ἐστι τὸ BΓ τῷ BΔ τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΠΘ, ἀσύμμετρός ἐστι
etc. idem. O. nisi quod post τὸ ΠΘ addat τῷ ΠΚ. — cum O.
consentit P. — Addit tamen O. haecce in margine. „Ita in codd.
„Mscpt.: Ἐπεὶ γὰρ μέσ. ἐστ. ἐκ. τῶν BΓ BΔ καὶ ἀσύμμετρον τὸ BΓ
„τῷ BΔ, ἔσται etc." ut supra in V. Nos eum, quam edidimus ver-
borum ordinem re ipsa desiderari existimavimus. — lin. 13. προς-
αρμόζουσα δὲ . . . ἀσυμμέτρου abs. V. P. — lin. 16. Εἰ μὲν δὴ
V. P. — lin. 19. ἄρα ab. V.; in ceteris ἐστιν ἄρα τρίτη legimus.
— lin. 22. ἀποτομὴ μέση B. — μέσης O. — ὥςτε ἡ τὸ . . . δευτέρα
abs. B. O. — lin. 26. μήκει ab. V. in quo etiam οὐθέτερα. — lin.
27. ἐκκειμ. ῥητ. τῇ abs. V. P. — lin. 28. ἐστ. ἄρ. ἐκτ. B. O. P. ἄρα
ab. V. — lin. 29. ἐστὶν μετὰ μέσου etc. V. — lin. 30. ὥςτε ἡ τὸ
ΛΘ, τοῦτ᾽ etc. — lin. 32. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 10. τῇ ZE p. 136.
B. O. — τὸ ἀπὸ P. — lin. 12. ἐπεὶ ab. B. O. — lin. 13. ἔστ.
πρώτ. B. O. — lin. 18. μήκει ab. V. qui habet καί, quod ab. B.
O. — lin. 19. λοιπῇ ἄρα τῇ ZH . . . ἡ ΔZ B. O. P. Nos secuti
V. — lin. 20. . . 23. Ἐπεὶ οὖν . . . τῇ ZH μήκει abs. V. — lin. 23.
τῆς ZE B. — lin. 25. μήκει καί εἰσι ῥηταί abs. V. — lin. 9. εἰσι
ab. V. — lin. 27. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 29. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. —
lin. 30. Verbum Πόρισμα ab. B. — Lin. 12. τότε pro τοῦ τε O. p. 137.
— lin. 13. ὅτι pro ἐπεὶ τῇ B. O. — lin. 18. αἱ μὲν abs. V. αἱ ab.
B. — lin. 19. ἑκάστη ab. B. — τάξει καθ᾽ αὑτήν B. O. — lin. 20.
αὗται O. P. — lin. 22. κατὰ τὴν V. — lin. 32. 33. Μέσην B. O.
— Lin. 6. καὶ ἔτι τῷ αὐτῷ B. — καὶ ἔτι ἐν τῷ αὐτῷ O. P. — p. 138.
lin. 8. ἔχει B. O. — lin. 9. δὲ ὀνομάτων B. O. — lin. 13. ἕξει V.
P. — lin. 19. ἴση τῇ H B. O. — lin. 21. ἐστὶν ab. B. O. — lin.
25. πρὸς KE ἓν ἡγούμενον πρὸς ἓν etc. V. — lin. 27. 28. τὴν ab.
V. — lin. 30. ἐστι ab. B. O. — Lin. 2. 3. ἐστι ab. B. O. — lin. 7. p. 139.
8. τὴν ab. V. — lin. 10. 11. καὶ συμμ. . . . μήκει abs. V. — lin.
11. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 13. εἰσὶ post ῥηταὶ B. O. — lin. 17.

ἑαυτῇ ab. V. — δύναται B. — lin. 20. 21. 27. οὐθετέρα V. —
lin. 23. καὶ ἡ ΖΚ . . . . ἀσυμμέτρου ἑαυτῇ abs. V. — lin. 28. τὰ
ab. V. — lin. 30. ἔχει ταξ. B. O. — lin. 31. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. —
Lin. 2. ἐστι τοῖς abs. B. O. (adest in Schol. Mon. V. P.) — lin. 4. p. 140.
τάξιν ἔχει edd. ceterae. Nos secuti Schol. Mon. — lin. 9. ὅτι καὶ
ἐκ. V. P. — lin. 12. ὅτι ἡ B. O. — lin. 15. ἔστω καὶ τὸ V. —
lin. 17. παράκειται B. O. — lin. 19. τῶν ab. B. — ἐστ. ἴσ. B. O.
— lin. 21. Ad Verba τὴν Π adnotatum est in P. Articulum τὴν
ubique abesse in reliqua demonstratione in V. — lin. 29. ὡς ab.
V. — lin. 31. εἰσὶ ab. V. — lin. 33. 34. οὕτως ab. V. B. — lin.
35. οὕτως ab. V. — Lin. 2. οὕτως ab. V. — lin. 4. ΚΖ πρὸς τὴν p. 141.
ΖΘ, καὶ ἡ ΖΘ πρὸς τὴν ΖΕ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΖ πρὸς τὸ ὑπὸ
τῶν ΕΖ ΖΘ. Σύμμετρον δέ ἐστι τὸ ἀπὸ ΚΖ τῷ ὑπὸ ΕΖ ΖΘ, αἱ
γὰρ . . . . σύμμετρος ἄρα καὶ ἡ ΚΖ τῇ ΖΕ μήκει· ὥςτε ἡ ΕΘ καὶ
τῇ ΖΕ σύμμετρός ἐστι μήκει * B. quae asterisco indicat lectionum
varietatem adesse. — lin. 7. ἐστι ab. B. O. — lin. 8. ἐστι ab. V.
— lin. 10. B. habet asteriscum post μήκει. — lin. 12. ἄρα ab. V.
— lin. 14. ΖΘ τῇ ΓΔ V. B. — Αἱ ΒΓ ΓΔ δὲ. — lin. 16. δύο
ἄρα ὀνομ. ἐστ. B. O. P. — δύο ὀνομάτων ἐστὶν ἄρα V. — lin. 20.
26. δύναται B. O. — lin. 23. καὶ ab. V. — lin. 32. ἐστι ab. V. —
lin. 34. Verba ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 5. 20. τέ ab. B. O. — p. 142.
lin. 12. τοῖς ἀπὸ τῆς ἀποτ. O. — lin. 13. ἔστω ἡ ὑπὸ τῶν V. P. —
lin. 22. πρὸς ΜΛ V. — lin. 23. οὕτως ΖΒ B. — lin. 25. 27. τὴν
ab. V. — lin. 26. 34. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 29. τῶν ab. V. —
lin. 31. τῷ . . . τὸ . . V. — lin. 33. καὶ ab. V. — Lin. 3. ὅπ. ἔδ. p. 143.
δ. abs. B. in V. vero post coroll. scripta sunt haec verba. — lin. 9.
Vulgo sic: καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότερον ἡ αὐτή. Sed ab.
οὐδεμία in V. et Schol. Mon. habet αἱ αὐταί. ex utroque nostra
profecta est lectio. — lin. 12. 25. καὶ οὐδεμία οὐδεμιᾷ τῶν πρότε-
ρόν ἐστιν ἡ αὐτή. Sic vulgo, sed οὐδεμία et ἐστιν abs. V. — lin.
16. τῶν ab. B. O. — lin. 21. ἐστιν ab. V. — lin. 27. Adest de-
monstratio altera, ad quam notatur in ed. O. — „Demonstratio
„haec, quae pro alia habetur tam in codd. man. quam in editis,
„parum differt a praecedente; illam tamen cum Commandino reti-
„nuimus. Duas licet propositiones, quae sequuntur in graecis ex-
„emplaribus plane ejiciendas censuimus utpote easdem cum prop.
„106. 107.“ — Omnia nos, quae in hoc libro sequuntur, Euclidis non

esse censemus, quare in app. ea rejicienda curavimus, quam vide;
et ea confer, quae in adnotationibus infra notabimus. — Lin. 10. ἐν p. 144.
τῷ αὐτῷ ὑποκ. B. O. — lin. 18. σημείου καὶ ἀπὸ τοῦ ἐν τῷ ἐπι-
πέδῳ πέρατος B. O. — lin. 19. ἀποζευχθῇ O. — ὀξεῖα ab. V. —
Lin. 5. Ἴσα δὲ edd. omn. — lin. 6. τὰ περὶ ὁμοίων O. — lin. 9. p. 145.
ἐπιπέδων γων. B. O. — lin. 10. Definitio undecima in omnib. edi-
tionibus hisce expromitur verbis Στερεὰ γ. ε. ἡ ὑπὸ πλ. ἢ δύο
γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐν τῇ αὐτῇ ἐπιφανείᾳ οὐσῶν
(ἡ V.) πρὸς πάσαις ταῖς γραμμαῖς κλίσις. Ἄλλως Στ. γ. ἐστι etc.
(ea scilicet quae in textum a nobis recepta sunt.) Euclidis certe
haec prior definitio esse non potest, qui pro ἐπιφανείᾳ verbo ἐπι-
πέδῳ usus fuisset neque γραμμῶν cum εὐθειῶν confudisset. — lin.
29. μιᾶς ab. B. — lin. 32. μὲν ab. B. — lin. 34. ὁ ab. B. O. —
Lin. 2. εὐθεῖα ab. B. O. — lin. 6. Κύλινδρος δὲ ὅταν B. O. — p. 146.
lin. 7. Verba τῶν περὶ τὴν ὀρθὴν (γωνίαν V.) abjeci post πλευρᾶς.
— lin. 19. στερεὸν ab. B. — ὑπὸ ab. O. — lin. 20. Peyr. adno-
tavit hanc vicesimam sextam definitionem deesse in omnibus
mnspts. et in fine positam esse vicesimam octavam. — lin. 31. ἐν
τῷ μετεώρῳ B. O. — lin. 34. idem sine τῷ. — In ora codicum
mss. additur post ἐπιπέδῳ: Πᾶσαν γὰρ δυνατὸν εὐθεῖαν ἐπ᾽ εὐθείας
ἐκβαλεῖν, quae quoque in margine edd. B. legimus. — Lin. 3. δύο p. 147.
ἄρα V. — lin. 4. δοθεισῶν ab. V. — lin. 5. Εὐθεῖα γὰρ etc. pro
hisce legitur in V.: Ἐπειδήπερ ἐὰν κέντρῳ τῷ B καὶ διαστήματι
τῷ AB κύκλον γράψωμεν· αἱ διάμετροι ἀνίσους ἀπολήψονται τοῦ
κύκλου περιφερείας. Idem invenit Peyr. in duobus aliis codd. —
lin. 21. ἐν ab. B. — lin. 22. ἐπιπέδῳ ab. V. — lin. 25. B. et O.
habent εἴη pro ἐστὶν, V. habet ᾖ. — lin. 33. τὸ ΕΓΒ scripsi pro
πᾶν quod legitur in edd. omn. — Lin. 2. Ἐὰν etc. Tota haec con- p. 148.
clusio a me addita est. — lin. 7. τεμνέτωσαν B. O. — Ὁμοίως δὲ
V. — Lin. 4. τριγώνῳ ab. B. O. — lin. 5. ἐστὶν ab. V. — lin. 7. p. 149.
ταῖς ab. V. — lin. 14. ἐστ. ἴσ. P. — lin. 20. ἐπεὶ ab. B. O. —
lin. 24. ἐδείχθ. ἴσ. B. O. — lin. 35. ποιῇ emendavi pro ποιεῖ. —
Lin. 3. τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΓΔ. — lin. 14. ἀφῆς B. — lin. 17. 33. p. 150.
ἐν μετεώρῳ B. O. — lin. 19. τομὴν δὴ B. O. — lin. 29. ἡ ΒΖ
αὐτῆς. — lin. 33. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 6. ἐν τῷ αὐτῷ ἐπ. B. — p. 151.
lin. 14. ἐν τῷ αὐτῷ ὑποκειμ. P. — lin. 18. πρὸς ab. B. — ἄρα ab.
V. — lin. 30. ἴστ. ἐστ. B. O. — Lin. 2. ἀφῆς B. — lin. 5. εὐ- p. 152.

θεῖαι ab. B. O. — lin. 10. 31. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 21. 26. *ἐν μετεώρῳ* B. O. — lin. 22. *τὸ διὰ τῆς ΕΗΖ* B. O. — lin. 28. *ἐπὶ τὸ Ζ* abs. B. O. — Lin. 12. *ἄρα* ante *ΑΒ* scriptum est. B. O. — lin. p. 153.
18. *ὀρθή ἐστιν ἡ ΑΒ* B. O. — lin. 20. *εὐθείας* B. O. — lin. 27. *ἐστὶν* ab. V. — Lin. 15. *Ἐὰν* etc. haec conclusio a me addita est. p. 154.
Verba *ὅπ. ἔδ. δ.* adsunt B. O. — lin. 21. *παράλληλος τῇ ΕΖ* B. O. — lin. 31. *ἄρα* ab. B. — Lin. 4. *Αἱ ἄρα* etc. a me sunt addita. p. 155.
Verba tamen *ὅπ. ἔδ. δ.* adsunt in edd. O. P. — lin. 11. *εὐθεῖαι ἁπτόμ. ἀλλήλ. αἱ ΑΒ ΒΕ.* — lin. 18. *καὶ ἡ ΑΔ . . . καὶ παράλληλος* recepi ex cod. Mon. — lin. 22. *καὶ μὴ . . ἐπιπέδῳ* ab. B. O. — lin. 28. *τῇ γωνίᾳ τῇ* B. O. — Lin. 4. 9. *συγκείμενον* O. p. 156.
quamvis vertatur *subjectum.* — lin. 22. *ἄρα* ab. B. O. — lin. 29. *εὐθείαις ἁπτομέναις ἀλλήλων ἐπὶ τομῆς* B. O. — lin. 35. *ἄρα δοθέντ.* V. P. — Lin. 12. *Νεν. τί σημεῖον μετεώρου τὸ Β* B. — *Νεν.* p. 157.
τὸ σημεῖον μετέωρον τὸ Β O. — lin. 21. *δοθέντος σημ.* B. O. — *ἡ ΑΔ* ab. O. B. — *ὅπ. ἔδ. δεῖξαι* O. — lin. 24. *Τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου δύο* etc. B. O. sed additur in margine utriusque ea codicum lectio, quam in V. repertam cum P. recipiendam existimavimus. — lin. 27. *δυνατόν, τῷ δοθέντι ἐπιπέδῳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῷ σημείου τοῦ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΑΓ πρὸς* etc. B. O. — Lin. 8. *ἐν τῷ ἐπὶ* B. O. P. Nos secuti V. — p. 158.
lin. 10. *ἀπὸ τοῦ . . . ἐπιπέδῳ* abs. V. — B. O. ut supra, *τῷ δοθέντι* etc. — lin. 15. *παράλληλα ἔσται* V. P. — lin. 24. *ἐκβεβληθέντι* B. O. *ἐκβλητέντι* P. V. (typographorum ut videtur negligentia) — lin. 27. *δὲ* B. O. — lin. 28. *ἴσ. εἰσ.* B. O. — lin. 33. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — Lin. 4. *ἀλλήλων παράλληλοι* O. — lin. 4. 8. *περὶ* p. 159
δύο B. — lin. 11. *συμπεσοῦνται.* — lin. 18. *τῷ διὰ* ab. V. — lin. 21. *ἐστὶν* ab. B. — lin. 35. *Διὰ τὰ αὐτὰ* etc. usque ad lin. 35. *πρὸς ὀρθάς.* Haec uncis inclusa sunt in O. atque in margine adscriptum est. „Illa uncis inclusa omitti debent, integra quidem „non exstant in codd. manuscriptis." — Lin. 3. *ἐστι* ab. V. — p. 160
lin. 8. *ὅπ. ἔδ. δ.* abs. B. — lin. 17. *συμπεσοῦνται* ante *αἱ* locum habet in B. O. — lin. 18. *Ἐκβεβλήσθω* B. O. — lin. 19. *πρότερον* in V. P. post *κατὰ τὸ Κ* scriptum est. — lin. 22. *ἐπιπ. ἐστ.* B. O. — lin. 28. *συμπεσ. ἐπ. τ. ΖΘ μ.* B. O. — lin. 31. *τὰ* ab. B. O. — Quae uncis inclusa addidi ad rem pertinere geometriae quisquis peritus est non negabit, quamvis Euclidem ea scripsisse non con-

contenderim. — Lin. 16. τοῦ ab. V. — lin. 20. 23. ἐστιν ab. V. — p. 161.
lin. 20. 20. 23. 23. 24. 25. 25. 26. τὴν ab. V. — Lin. 3. ἔσται B. p. 162.
O. — lin. 14. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 20. τῇ ΓΕ . . . ἐπιπέδων abs.
B. O. — lin. 21. τῷ ΓΕ O. — lin. 23. ἐπίπεδον ab. V. — Lin. 4. p. 163.
δὲ ab. V. — lin. 13. Quae minusculis litteris expressa sunt desiderari hoc loco nemo non videt. — lin. 14. πρ. ὀρθ. ἀνασταθ. B.
O. — lin. 17. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 30. πάντ. μεταλ. abs. V. P. p. 164.
— lin. 33. ἐν ab. B. — δὴ αἱ ab. B. — αἱ ab. O. P. — V. brevius habet ἡ ΑΒ· δύο δυσὶν ἴσαι, καὶ γωνία etc. — lin. 20. ἡ ab. V.
— lin. 34. καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ B. O. — Lin. 5. αἱ ἄρα ἕξ. V. P. — p. 165.
lin. 13. μείζ. εἰσ. B. O. — lin. 14. γωνίαι ab. V. — lin. 17. ὅπ.
ἔδ. δ. abs. B. — lin. 26. μείζονές εἰσι V. P. — Lin. 2. παντ. μεταλ. p. 166.
ab. V. P. — lin. 6. ταῖς ab. O. — lin. 14. ἐστιν abs. V. — lin. 18. δύο ταῖς V. — lin. 19. τῆς πρὸς τὸ Ε. — lin. 21. τῆς ΚΑ edd. omn. in graecis. — lin. 24. Ὁμοίως δὴ . . . μείζονές εἰσιν abs. B. — Ὁμ. δὲ O. — lin. 29. Sequitur Ἄλλως, quod vide in append.
— Lin. 17 — 19. ἔσται δὴ . . . πρότερον ἐντὸς abs. V. — lin. 24. p. 167.
post ἴση B. O. P. addunt ἡ ΑΞ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστιν ἴση. — δύο ταῖς V. — lin. 31. εἰς ἴσ. V. P. — lin. 32. ἴσ. εἰσ. B. O. —
lin. 32. αἱ ἄρα ὑπὸ. — lin. 35. ἐστ. ἴσ. B. O. — Lin. 2. δὴ ὅτι p. 168.
V. P. — lin. 6. λοιπῇ ab. V. — lin. 7. hanc lineam res postulare videtur. — lin. 10. 11. πρὸς ΟΠ V. — ἄρα ab. V. — lin. 14. εὐθ. ab. V. — lin. 24. ἐλάσσ. εἰσ. B. O. — ἐστὶν ab. B. O. —
lin. 29. ἔστω ἴσ. B. O. — Lin. 2. ἴσ. ἐστ. B. O. — lin. 7. τὸ ab. p. 169.
B. — lin. 16. γωνία ab. V. — lin. 19. ταῖς ὑπὸ melius repetito articulo B. — lin. 20. συνίσταται Vulgo. — lin. 22. ὅπ. ἔδ. π. abs. B. O. Sed P. ex V. habet ὅπ. ἔδ. δεῖξαι. — lin. 23. τὸ ab. V. — lin. 30. ἐστὶν ἴση· καὶ V. P. — lin. 31. ἐστιν ab. B. O. — ἐστι ab. B. O. — lin. 32. δὴ B. P. V. — lin. 35. Vocabula δυναμένην εὐθεῖαν adjicere non dubitavi, cum res quam maxime postulet. —
Lin. 6. ΝΞ ab. V. — lin. 8. 13. 16. δύο pro δύσι V. — lin. 10. p. 170.
ἐστὶν ante ἴση abjeci cum V. — lin. 13. ὑπὸ ab. V. — lin. 14. Ἀλλὰ καὶ αἱ B. O. — lin. 19. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 22. τὸ ΞΡ B. O. — lin. 22. ἴσον δυναμένην αὐτήν. Sic emendavi ex vulgato ἴσην αὐτήν. — lin. 24. Post πρόβλημα V. habet ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 32.
οὕτως ab. B. V. — Lin. 3. 14. 18. 23. δύο pro δύσι V. — lin. 8. p. 171
καὶ ab. B. O. — γωνίας pro γωνία B. — lin. 9. τὴν ΑΞ εὐθεῖαν

V. P. — lin. 17. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 22. τῆς emendandum est
pro τῇ. — lin. 25. ταῖς scripsi pro τῇ in B. et τοῖς in O. P. —
Adest Lemma, quod vide in append. — lin. 29. 32. Quamvis
Euclidem non ita scripsisse putarem, adjiciendum tamen existimavi
voculam ἕξ litteris minusculis expressam, ut quam figuram intelligi
voluerit Euclides primo conspectu lectores videant. — Lin. 6. ἐστιν p. 172.
ab. B. O. — lin. 11. ἐστὶ hoc loco in conclusione necessarium
mihi videbatur, quamobrem adjeci. — lin. 16. περὶ δύο B. πρὸς
δύο O. — lin. 17. O. habet παράλληλοί ante εἰσιν. — lin. 18.
περιέχουσιν B. O. — lin. 21. ἐστὶν ante ἴση habent V. P. — lin. 22.
ἐστ. ἴσ. V. P. — lin. 28. B. habet ἐπεὶ ante ἐστὶ additis tamen
asteriscis dubitationem nimirum indicantibus. — lin. 35. οὕτω B.
O. — Lin. 3. *ΥΕ* B. O. pro *ΖΗ*. — lin. 8. B. O. habent τῇ μὲν p. 173.
ΕΘ ἴσαι ὁσαιδηποτοῦν αἱ *ΘΜ ΜΝ*, τῇ δὲ *ΑΕ* ἴσαι αἱ *ΑΚ ΚΑ*
καὶ συμπεπληρώσθωσαν etc. — lin. 17. εἰσιν pro ἐστιν B. O. P. —
lin. 19. 23. item V. — lin. 23. ἐστιν ante ἄρα ab. B. O. — lin. 29.
ἐστὶ ab. B. O. — lin. 35. ἥτε *ΑΖ* βάσις . . . *ΘΥ* στερεοῦ excide-
rant in altero codice ed. B., quamobrem editoris errore non sunt
impressa, qui addit: „*ΑΖ ΑΕ* habet alterum exemplar sed idem
est.“ — Lin. 5. στερεοῦ ab. B. O. — ἴσον pro ἴση V. — lin. 7. p. 174.
οὕτω B. O. — lin. 8. Abest repetitio theorematis in edd. omn. —
lin. 14. εὐθεῖα ab. O. P. — lin. 15. αὐτῇ δοθὲν V. — lin. 16. τῶν
ab. V. — lin. 20. γὰρ post εἰλήφθω abjiciendum existimavi. —
lin. 22. τῷ ab. V. — lin. 30. περιεχομένη ab. B. O. — Lin. 5. ἐστιν p. 175.
ab. B. O. — lin. 7. 15. 24. pro δίσι V. habet δύο. — lin. 18. ἴση
ἐστὶν B. O. — lin. 29. εἰσ. ἴσ. V. B. — lin. 33. τῇ *ΑΒ* abs. B. O.
— lin. 34. item τῷ *Α*. — item τῇ πρὸς τῷ *Δ*. — lin. 35. B. habet
ἴσην στερεὰν γωνίαν συστήσασθαι, O. aeque male ἴσην . . . συνέστα-
ται. — ὅπ. ἔδ. π. abs. B. — Lin. 12. abjeci γὰρ ante πρὸς. — lin. p. 176.
16. τὴν δὲ pro καὶ ἔτι τὴν V. P. — lin. 19. καὶ δι᾽ ἴσου ἄρα V.
P. — lin. 26. ἐστι ab. B. O. — lin. 32. τὰ δὲ τρία . . . καὶ ὅμοια
abs. B. O. — lin. 35. ἄρα δοθ. B. O. — Lin. 2. τὸ *ΑΑ* ab. O. p. 177.
— lin. 11. διαγωνίας B. O. — lin. 23. τε ab. B. O. — lin. 24.
τέτμηται O. P. Nos secuti B. — Lin. 2. ὄντα ab. V. — lin. 10. p. 178.
μὲν ab. B. O. — lin. 32. Ἔστωσαν ἐπὶ B. — γὰρ ab. V. — καὶ
ab. B. O. — lin. 30. Emendandum est ἐφεστῶσαι, quamvis ὑφεστ.
in edd. omn. reperiatur. — lin. 34. ὧν ἐφεστῶσαι V. — ὧν αἱ

ὕψεσι. B. O. — Lin. 4. καὶ ἔτι αἱ ΠΕ ΖΜ καὶ συμπιπτέτωσαν p. 179. ἀλλήλαις κατὰ τὰ Ο Ρ Π Ξ σημεῖα καὶ ἐπεζεύχθωσαν ΛΞ ΛΟ etc. — lin. 8. τὸ ab. O. P. — lin. 12. Quae litteris minoribus addidi rerum nexus postulabat. — lin. 12. 20. pro ὧν O. B. habent καὶ αὐτῶν. — lin. 15. ἐστι ab. B. O. — lin. 17. μὲν ab. V. — lin. 18. πάλιν ab. B. O. — lin. 19. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψ. minoribus excudenda erant litteris cf. ad lin. 12. — lin. 21. τῶν ante ΗΗΙ ab. V. — lin. 24. ἐπὶ ἴσων βάσεων B. O. — lin. 31. καὶ ab. V. — Lin. 2. p. 180. post βάσεσιν in B. et O. habemus ἡ δὲ ὑπὸ ΑΛΒ τῇ ὑπὸ ΓΡΔ ἄνισος, ad quae in margine B. notatum videmus. „Ponit enim „exemplum in non prorsus similibus solidis, quod interpres latinus „hic omisit.“ (et quidem recte, cum Euclidis esse non videatur sed Scholiastae cujusdam.) — lin. 3. εὐθεῖα ἡ ΡΤ B. — lin. 6. Post ΡΤ habent B. O. καὶ πρὸς τῷ Τ σημείῳ τῇ ΡΤ παράλληλος ἀνεστάτω ἡ ΧΤ, quae superflua sunt, cum paulo infra addatur συμπεπληρώσθω ἡ τε ΡΧ βάσις. Recte igitur haec verba abjiciuntur in V. P. — lin. 17. τε ab. B. O. — lin. 18. τὰ δὲ τρία . . ἀπεναντίον abs. B. O. — lin. 23. καὶ ἐκβεβλήσθω κατὰ τὸ α. V. — lin. 28. μὲν ab. B. O. — lin. 30. Pro ὧν B. O. habent καὶ αὐτῶν. — lin. 33. 34. ἐστ. ἴσ. V. P. — Lin. 5. ἄρα ab. B. — lin. 6. δὴ P. — p. 181. lin. 15. 18. στερεὸν post ΡΙ ab. V. — lin. 16. βάσις ab. B. O. — lin. 20. ἐστι ab. B. O. — lin. 22. Additur ὅπερ ἔδ. δ. V. P. — lin. 25. ἐστε ab. V. — lin. 26. γὰρ ab. B. O. — lin. 27. ἐπίπεδον ab. B. O. — lin. 35. ἐστ. ἴσ. V. P. — Lin. 12. Ἔστωσαν B. O. — p. 182. lin. 15. ὅτι pro ὡς ex V. recepit P. — lin. 17. Quod litteris minoribus adjeci verbum necessarium hoc loco videbatur. — lin. 19. δὲ ab. B. O. — lin. 24. O. P. habent τέμνηται, B. τέτμηται ex quo nostra profecta est lectio. — Lin. 10. ἐπ' εὐθείαις O. — lin. 15. p. 183. Καὶ ab. B. — lin. 22. παραλληλογράμμῳ ab. V. — lin. 25. 26. ἴσα εἰσὶν V. — lin. 26. τὰ δὲ . . . καὶ ὅμοια abs. B. O. — Lin. 19. ἡ p. 184. pro ἤπερ B. O. — καὶ ante τὸ ΑΒ abjeci cum cod. V. — lin. 21. 25. μὲν ab. V. — lin. 30. Repetitio abest B. O. — lin. 34. ἑξῆς abesse non potest, quamvis desideretur in edd. omn. — Lin. 4. p. 185. ἐπείπερ V. — lin. 24. V. addit post ἴση haecce: τὰ γὰρ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος στερεὰ παραλληλεπίπεδα πρὸς ἄλληλά ἐστιν ὡς αἱ βάσεις. haec recepta sunt in P. — lin. 27. 34. ἐστι ab. B. O. — Lin. 3. p. 186. ἴσα ἔσονται V. — ἐπόκειται edd. omn. — lin. 7. pro ἄλλο δέ τι

V. habet ἔξωθεν δὲ. — lin. 8. λόγον· ὡς ἄρα τὸ *AB* B. O. — lin. 21. καὶ ab. B. — lin. 25. γὰρ ab. V. — lin. 32. ἴσον ἄρα καὶ τὸ etc. B. O. — lin. 34. ἴση καὶ ἔστω B. O. — lin. 35. ἐστὶ ab. B. O. — τὸ recepi ex B. — Lin. 2. τοῦ τοῦ emendavi secundum V., p. 187.
qui habet τούτου. — lin. 5. οὖν ab. V. — lin. 9. βάσις ab. V. — lin. 13. τὸ *ΓΦ* ἐστί V. — lin. 14. πρὸς τὸ *ΓΦ*, οὕτως B. O. — lin. 16. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 17. Edd. addunt ὅπερ ἔδ. δ. — lin. 21. βάσεων ab. V. — ἐπίπεδος B. ἐπίπεδοι O. — lin. 23. σημεῖα ab. V. — lin. 29. γὰρ ab. V. — lin. 33. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 11. p. 188.
στερεοῦς ab. B. O. — lin. 15. στερεῶν ἄρα B. O. — lin. 35. αἱ ἐφεστηκυῖαι ex emendatione scripsi pro τὰ ὕψη, haec enim semper πρὸς ὀρθὰς esse oportet. — Lin. 3. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 9. ὧν p. 189.
αἱ ἐφεστηκυῖαι emendavi pro vulgato καὶ. — lin. 11. recapitulatio ab. in edd. omn. — lin. 22. Verba ὑπὸ τῶν καθέτων post σημείων ejeci cum cod. V. — ἐπὶ τοῖς ἐπιπέδ. B. — lin. 27. περιέχουσαι γωνίας B. O. — lin. 30. εἰλήφθωσαν B. O. — Lin. 2. τὰ ab. B. p. 190.
O. — lin. 10. *Καὶ* ab. V. — lin. 12. 16. 18. 25. 35. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 20. τὰς ab. V. — lin. 26. ἐστιν ἴση οὕτως V. οὕτως ab. in O. P. Attamen hoc verbum Scholiastae esse videtur ejusdem, qui totam, quam uncis inclusimus demonstrationem hoc loco non necessariam addidit. — lin. 29. τὸ ἀπὸ τῶν *AK* V. — τοῖς ἀπὸ τῆς *AK* O. — lin. 31. τῆς ab. V. — Lin. 2. 20. ἐστιν ab. B. O. p. 191.
— lin. 4. ἴση ante τῇ positum B. O. — ὑπόκειται B. O. — lin. 7. δύο ταῖς V. — lin. 13. ἐστ. ἴσ. B. O. — lin. 14. *ΓBK* γωνία B. O. — lin. 15. ἐστ. ἴσ. V. — lin. 16. ταῖς ab. V. — lin. 20. ἔξουσιν emendavi. Vulg. ἕξει. — lin. 30. τῆς ab. V. — Lin. 2. Recapitulatio p. 192.
abest O. B. V. — lin. 6. εὐθύγραμμοι ab. V. P. — lin. 10. Additur ὅπ. ἔδ. δ. V. — lin. 22. περιεχομένη ὑπὸ τῶν *ΔEH* etc. V. — lin. 25. κείσθω ab. V. — lin. 28. στερεὰ γωνία ἡ abs. B. O. — lin. 32. ἑκατέρα τῶν *ΔΞ EΔ* V. P. — Lin. 3. 14. ἐστι ante τὸ ab. B. O. p. 193.
— lin. 7. ἐφέστασιν B. V. — lin. 17. post στερεὸν V. habet παραλληλεπίπεδον, sed B. habet στερεὸν καὶ τὰ ἑξῆς, ut finis demonstrationis et recapitulatio theorematis desint. — lin. 23. 32. στερεὰ ab. B. O. — Lin. 2. ὅμοιον post *AΓ* positum est. B. O. — lin. 7. p. 194.
καὶ ὡς ἄρα V. P. — lin. 19. Recapitulatio ab. B. — Lin. 2. κάθετος ἔστω V. — lin. 6. ἐστιν ab. B. O. — δὴ ab. V. — lin. 9. p. 195.
δυσὶν ab. V. — ὅπερ ἄτοπον B. O. — lin. 12. Abest reca-

pitulatio B. O. — lin. 15. 19. 20. 26. κύβου pro στερ. παραλλ. V.
— lin. 24. ἐκβεβλήσθωσαν B. O. — lin. 25. τῶν ἐπιπέδων τομὴ B.
O. — lin. 27. ὅτι αἱ ΤΣ . . . τοῦτ' ἔστιν abs. V. P. — lin. 28.
ἴση ἐστὶν post ΤΣ ponunt B. O. — Lin. 2. βάσει τῇ ΤΕ B. O. — p. 196.
τὸ δὲ ΔΞΤ B. O. — lin. 3. ἐστὶν ἴσ. V. P. — lin. 4. ἴσαι ab. B.
O. — lin. 5. γωνίᾳ ab. B. O. — lin. 8. τέ adjiciendum putavi. —
lin. 12. ἐστὶν ab. B. O. — εἴληπται scripsi cum B. — edd. cet. habent
εἰλήφθω. In cod. V. abs. verba καὶ εἴληπται . . . . . . παράλληλός
ἐστιν ἡ ΔΕ τῇ ΒΠ. — lin. 13. Illa, quam secuti sumus lectionem
ed. B. εἴληπτ. coegit, ut emendaremus ἐπιζευγνύουσιν αὐτά pro
vulgato ἐπεζεύχθωσαν. — lin. 16. ἡ μὲν ὑπὸ V. P. — lin. 17. Ἡ
δὲ ὑπὸ ΔΤΤ V. P. — ἴση ab. V. — lin. 22. ἄρα ab. V. — lin. 23.
πλευραῖς ab. B. O. — lin. 25. Ἐὰν ἄρα κύβου καὶ τὰ ἑξῆς V. —
Lin. 7. Καὶ ab. V. — Lin. 15. ἐστι ab. V. — lin. 19. γωνίᾳ ab. V. p. 197. 198.
— lin. 24. 26. ἐστὶν ἴσ. V. P. — Lin. 2. ἄρα ἐστὶ V. P. — lin. 7. p. 199.
τῆς ab. B. O. — lin. 11. τετράγωνον ab. B. O. — lin. 15. ὅπ. ἔδ. δ.
abs. B. — lin. 20. ὡς ὁ ΑΒΓΔ κύκλ. πρ. τ. ΕΖΗΘ κύκλ. οὕτ. τὸ
ἀπὸ τῆς ΒΔ τετρ. πρ. τ. ἀπὸ τῆς ΖΘ V. — lin. 23. μή ἐστιν ὁ
ΑΒΓΔ κύκλ. etc. ut supra V. — lin. 26. τετράγωνον ab. V. — lin.
30. τὸ δὲ ἐγγ. B. — lin. 33. εὐθείας ab. B. O. — διαγάγωμεν B.
O. — lin. 34. ὑπὸ τὸν κύκλ. O. — Lin. 4. 17. ἡμίσεως in ἡμίσους p. 200.
mutandum esse videtur. — lin. 12. τὰ ἀπὸ τῶν O. P. — lin. 13.
εὐθειῶν παραλλήλων B. O. — lin. 15. καθ' αὑτὸ (sic) B. — lin.
21. τινά ἀποτμήματα τοῦ κύκλ. habet V. — ceterae edd. τινα τμή-
ματα κύκλ. ex priori mea orta est emendatio τινά ποτε τμήματα,
quae errore typothetae in τινα τμήματά ποτε mutata est. — lin. 24.
τοῦ Γ ὅτι B. O. Euclidis haec esse non videntur, qui nusquam
libri numerum exhibet. — lin. 26. καὶ τοῦ καταλ . . ἢ τὸ ἥμισυ
abs. V. — Lin. 11. ὁ ab. in edd. omn. — lin. 10. ἐστὶν (bis) ab. p. 201.
B. O. — lin. 17. 18. τῆς ab. V. — lin. 24. ἐστὶν ab. V. — lin. 27.
κύκλος ab. V. B. — lin. 29. τετράγωνον ab. V. P. — lin. 31. ἐδείχθ.
ἀδύν. B. O. — ἐστιν ab. B. O. — Lin. 2. τετράγωνον ab. V. — p. 202.
lin. 9. ὁ ab. O. — lin. 16. ἄρα ab. V. — lin. 18. τὸ Σ τοῦ etc.
B. O. — lin. 20. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 22. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. O.
— lin. 25. 32. Verborum ordinem hoc loco mutandum existimavi.
Vulgo enim legimus: δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλαις,
τριγώνους βάσεις ἔχουσας καὶ ὁμοίας (B. ὁμοίως) τῇ ὅλῃ καὶ

εἰς etc. — lin. 32. V. habet. εἰς δύο πυραμίδας ἴσας τε καὶ ὁμοίας ἀλλήλας καὶ τῇ ὅλῃ τριγώνους ἐξούσας βάσεις. Ex qua lectione mea
prodiit emendatio. — Lin. 3. ἐστιν ab. B. — lin. 6. Καὶ ab. V. — p. 203.
lin. 10. 22. 30. 32. ἐστι ab. B. O. — lin. 12. Ἔστι δὴ O. — lin.
18. τέ ab. V. — lin. 22. περιέξουσιν V. P. — lin. 26. ἐστιν ab. V.
— lin. 29. ἴσον καὶ ὅμοιόν ἐστιν B. O. — Lin. 2. 9. 11. ἐστὶ ab. p. 204.
B. O. — lin. 5. ΔΘΛ τριγώνῳ B. O. — lin. 8. οὖσαι ab. B. V. —
περιέξουσιν V. P. — lin. 16. ἐδείχθ. ὅμ. B. O. — lin. 18. ὥςτε
πυραμὶς . . . κορυφὴ δὲ τὸ Θ σημεῖον exciderunt V. — lin. 25.
ἐὰν δύο πρίσμ. ἰσοϋψ. ὦσι B. O. — lin. 28. ἴσα εἰσὶν B. O. — lin.
28. ἐστὶ post ἄρα ab. B. O. — Lin. 2. οὗ βάσεις O. — lin. 4. ὧν p. 205.
βάσις O. — lin. 5. καὶ ab. B. O. — lin. 7. 27. μὲν adjeci. — lin. 10.
12. 18. 21. 23. μὲν ab. V. — lin. 30. πυραμίδας ἴσας ἀλλήλαις καὶ
εἰς δύο etc. — Lin. 7. καὶ τῶν γεν . . . ἀεὶ γίνηται abs. V. — lin. 9. p. 206.
ἐστιν B. — lin. 18. καὶ τῶν γεν . . . ἀεὶ γιγνέσθω abs. V. — lin. 23.
πάντα ab. V. — lin. 25. ἐστιν ab. edd. omn. — lin. 27. τρίγωνον
ὅμοιόν ἐστι τῷ ΡΦΖ τριγ. B. O. — lin. 29. τῇ pro τῆς (bis) B.
O. — lin. 33. εὐθύγρ. ab. V. — Lin. 3. τρίγωνον post ΔΕΖ ab. p. 207.
B. V. et additum est post ΡΦΖ; in O. P. semper additur. — lin. 7.
ἐστι ab. V. — lin. 20. παραλληλογρ. additum est a me. — lin. 29.
τὸ post δὲ item. — Lin. 7. ἴσον γὰρ . . . ΡΦΖ abs. B. O. — lin. 9. p. 208.
τὰ ab. in edd. omn. — lin. 13. δὲ mutavi in δή. — lin. 16. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Finis hujus theorematis inde a linea 13. p. 207. mutatus legitur in Cod. V. unoque ex aliis a Peyrardo collatis. Pro Καὶ ἐπεὶ etc. habemus: Ὡς δὲ τὰ εἰρημένα πρίσματα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ πρίσμα οὗ βάσις μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγρ. ἀπεναντίον δὲ ἡ ΟΜ εὐθεῖα, πρὸς τὸ πρ., οὗ β. μ. τὸ ΠΕΦΡ παραλληλόγρ., ἀπεναντ. δὲ ἡ ΣΤ εὐθ. καὶ τὰ δύο ἄρα πρίσματα, οὗ τε βασ. μὲν τὸ ΚΒΞΛ παραλληλόγρ., ἀπ. δ. ἡ ΟΜ, καὶ οὗ β. μ. τ. ΛΞΓ τρίγ. ἀπ. δὲ τὸ ΟΜΝ πρὸς τὰ πρίσματα οὗτε β. μ. τὸ ΠΕΡΦ, ἀπ. δ. ἡ ΣΤ εὐθ., καὶ οὗ β. μ. τὸ ΡΦΖ τρ. ἀπ. δὲ τὸ ΣΤΥ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ εἰρημένα δύο πρίσματα πρὸς τὰ εἰρημένα δύο πρ. Καὶ ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ΟΜΝΠ, ΣΤΥΠ πυραμίδες εἴς τε δύο πρίσματα καὶ δύο πυραμίδας, ἔσται καὶ ὡς ἡ ΟΜΝ βάσις etc. quae habemus p. 208. lin. 2. usque ad lin. 9. . . . ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ τέσσαρα πρίσματα πρὸς τὰ τέσσαρα πρίσματα. Ὁμοίως δὲ κἂν τὰς ὑπολειπομένας πυραμί-

δας διέλωμεν εἴς τε δύο πυραμίδας καὶ εἰς δύο πρίσματα, ἔσται ὡς ἡ ΑΒΓ βάσις πρὸς τὴν ΔΕΖ βάσιν, οὕτως τὰ ἐν τῇ ΑΒΓΗ πυραμίδι πρίσματα πάντα πρὸς τὰ ἐν τῇ ΔΕΖ πυραμίδι πρίσματα πάντα ἰσοπληθῆ. Ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 17. Verbum λῆμμα ab. B. — lin. 19. μὲν addendum censui. — lin. 21. τρίγ. ab. V. — lin. 22. οὕτω B. — lin. 23. νενοήσθω B. — lin. 24. τρίγωνα ἐπίπεδα B. O. — lin. 25. τυγχάνουσι B. — Lin. 3. αἱ ab. V. — lin. 5. 9. ἐστι ab. V. — p. 209.
lin. 8. ἰσοϋψῆ καὶ πρὸς V. — lin. 9. Vulgo καὶ τὰ ἡμίση ἄρα ἐστὶν (ἔσται B. O.) ὡς ἡ etc. Sed eum, quem constitui verborum ordinem rei aptiorem habeo. — lin. 19. βάσιν ab. B. O. — lin. 29. μείζονά τε B. — lin. 30. γινόμενοι edd. cet. — lin. 31. διῃρήσθωσαν πυραμίδ. ὅμ. B. O. — lin. 33. ἐλάσσους B. O. — Lin. 2. p. 210.
Λελήφθωσαν edd. cet. — ἕνεκεν V. — lin. 8. Ἀλλ' ὡς B. O. — lin. 19. 29. ἐστὶν ab. B. O. — Lin. 2. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 8. Αἱ p. 211.
ἄρα etc. abs. B. — lin. 14. πυραμίδες πολυγώνους ἔχουσαι βάσεις τὰς ΑΒΓΔΕ ΖΗΘΚΛ, κορυφὰς δὲ τὰ etc. B. O. — lin. 14. B. O. et codices ceteri excepto V. et uno alio habent: Διῃρήσθω γὰρ ἡ μὲν ΑΒΓΔΕ βάσις εἰς τὰ ΑΒΓ ΑΓΔ ΑΔΕ τρίγωνα, ἡ δὲ ΖΗΘΚΛ εἰς τὰ ΖΗΘ ΖΘΚ ΖΚΛ τρίγωνα, καὶ νενοήσθωσαν ἐφ' ἑκάστου τριγώνου πυραμίδες ἰσοϋψεῖς ταῖς ἐξ ἀρχῆς πυραμίσι. Καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ΑΒΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον οὕτως etc. — lin. 23. — 24. ὡς τὸ ΑΒΓΔ τραπέζιον πρὸς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον B. O. — lin. 26. ὡς τὸ ΑΓΔ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΔΕ τρίγωνον B. O. — lin. 33. Διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς etc. B. O. — Lin. 3. τριγώνους p. 212.
scripsi cum V. pro vulgato τρίγωνα. — lin. 4. καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ ὕψος. — lin. 6. ἐστιν a me insertum est. — μὲν item. V. habet: Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΔΕ βάσις πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕ βάσιν, οὕτως ἦν ἡ ΑΔΕΜ πυραμὶς πρὸς τὴν ΑΒΓΔΕΜ πυραμίδα καὶ διΐσου ἄρα etc. — lin. 13. μὲν P. — lin. 16. πάλιν ab. V. — ἄρα ab. B. — lin. 19. Πυραμίδες ἄρα καὶ ὑπὸ τὸ αὐτὸ etc. habent O. P. Tota recapitulatio abest in B., in qua tamen legimus ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 28. ἔχουσ. βάσ. V. P. — lin. 29. Καὶ ab. V. — lin. 31. ἐστιν ἡ ΒΔ V. P. — ἐστι ab. B. O. — Lin. 3. 4. ἐστι ab. B. O. — lin. 10. δέ ἐστιν p. 213.
αὐτοῦ V. P. — lin. 23. βάσ. ἔχ. B. O. — ὅπ. ἔδ. δ. hoc loco a me additum et his verbis Καὶ ἐπεὶ Corollarium inchoatum est, quod quidem in ceteris edd. incipit a verbis Ἐκ δὴ τούτου etc. — lin. 27. 29. μέν ἐστι abs. V. — ἐστι ab. B. P. O. — lin. 29. περιέ-

χορτία edd. cet. — lin. 31. 32. μὲν a me additum est. — lin. 35.
Verba ὅπ. ἔδ. δ. abs. V. B. — Lin. 3. τὴν βάσιν τὴν αὐτὴν B. O. p. 214.
— lin. 4. τὸ ab. B. V. — lin. 5. ἡ βάσις τοῦ πρίσματος καὶ τὸ
αὐτὸ (τὸ αὐτὸ καὶ V.) ἀπεναντίον edd. cet. — lin. 7. καὶ τὰ ἀπ-
εναντίον τὰς ἀπεναντίον B. — τὰς ἀπεναντίον O. P. — V. habet:
καὶ διαιρεῖται εἰς πρίσματα τρίγωνα ἔχοντα τὰς βάσεις καὶ τὰ ἀπ-
εναντίον καὶ ὡς ἡ ὅλη βάσις πρὸς ἕκαστον ὅπερ ἔδ. δ. — lin. 20. 24.
ἐστὶν ab. B. O. — lin. 21. γωνίᾳ ab. B. O. — ΗΒΓ γω-
νία O. P. — lin. 30. παραλληλόγρ. ab. V. — lin. 32. 33. ἴσα τέ
ἐστι καὶ ὅμ. B. O. — Lin. 3. περιέχονται B. O. — lin. 4. ἐστὶ ab. p. 215.
B. O. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — lin. 17. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. —
lin. 22. εἰς * εἰς τὰς αὐτὰς * τὰς ἐν αὐταῖς sic B. varietatem lectio-
num indicat. — lin. 24. καὶ εἰς ἴσα B. O. — lin. 27. βασ. ἔχ. B.
O. — lin. 28. οὕτω B. O. — lin. 32. πυραμίδα ab. B. O. — Lin. 4 p. 216.
ἥπερ πλευρὰ πρὸς πλευράν. — lin. 12. ἔχουσ. βάσ. B. O. — lin. 29.
βάσιν ab. V. — Lin. 6. ἄρα post Θ V. — lin. 20. παραλληλόγρ. p. 217.
post ΕΠ ab. B. O. — lin. 22. μὲν ab. V. — lin. 26. βάσις ab. O.
— lin. 28. παραλλ. ὕψ. ab. B. O. — lin. 30. ἐστὶν ab. B. O. —
lin. 33. στερεοῦ ab. V. — lin. 34. ἡ ἄρα ΑΒΓΗ . . . πυραμίδι ἴση
ἐστὶ B. O. — Lin. 11. ἔσται B. O. — lin. 24. hic ἀνιστάμενα in p. 218.
edd. cet. sed non supra. — πρίσματα in edd. O. B. post παραλλη-
λεπίπ. legitur. — in P. habemus ἀνιστάμενα στερεὰ παραλληλεπί-
πεδα πρίσματα ἰσοϋψῆ. — lin. 25. τὰ δὲ ὑπὸ . . . ὡς αἱ βάσεις·
abs. B. O. — lin. 28. ἐπὶ τοῦ edd. omn. — lin. 28. ἄρα κύκλου
B. O. — lin. 24. κύκλου ἰσοϋψές B. — Lin. 9. 25. ἐφ' ἑκάστου p. 219.
edd. omn. — lin. 16. ἐπ αὐτῶν item. — lin. 20. ἀποτμήματα item.
— lin. 27. τινα ἀποτμήματα item. — Lin. 2. ἐστι ante τῆς ab. B. p. 220.
O. — lin. 8. ἐστιν ab. B. O. — οὐκ ἄρα ἔσται B. O. — lin. 9.
τριπλάσιος V. P. — lin. 10. τριπλάσιός ἐστι B. O. — ἐστιν ἢ τρι-
πλάσιος V. P. — lin. 21. περὶ τὸν κύλινδρον περιγράψωμεν τετρ.
B. O. — lin. 23. τετραγώνου ab. B. O. — lin. 35. μὲν addidi. —
Lin. 2. τὸ ab. V. — lin. 12. καθ' ἑαυτὸ V. P. — lin. 15. ἐφ' p. 221.
ἑκάστου edd. omn. — lin. 17. τινα τμήματα B. O. P. — τινα ὑπο-
τμήματα V. — lin. 25. μέρος ἐστι B. O. — lin. 31. ἐστιν ab. B.
O. — Lin. 8. εἰσιν post μὲν abjeci cum V. — lin. 11. κῶνον ab. p. 222.
B. O. — lin. 12. ἔστω B. O. — lin. 13. ἢ πρὸς B. O. — lin. 28.
μὲν addidi. — Praeterea verba ἡ ἄρα πυραμὶς . . . τοῦ κώνου abs.

V. — Lin. 5. μέρος ab. V. — lin. 6. καθ' ἑαυτὸ V. P. — lin. 9. p. 223.
ἀεὶ τουτό. — lin. 10. ἀποτμήματα edd. omn. — lin. 11. ἐστιν
ἔλασσ. — lin. 13. μὲν addidi. — lin. 17. . . X πολύγωνον B. —
Lin. 10. ἐστιν ab. B. O. — lin. 18. 27. κύκλον ab. B. — lin. 20. p. 224.
κώνου ab. B. — lin. 23. ἐδείχθ. ἀδύν. B. O. — lin. 29. οὕτως ab.
V. — lin. 35. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — Lin. 3. πρὸς ἀλλήλ. abs. B. — p. 225.
lin. 8. κώνων ἢ κυλίνδρ. B. O. — lin. 9. 11. ἐστιν ab. B. O. —
lin. 14. μὴ ἔχῃ V. — lin. 17. ἢ (ab. O.) τριπλασ. λόγ. ἢ πρ. μεῖ-
ζον B. O. — lin. 18. πρὸς ἔλαττ. πρότ. B. O. — lin. 22. πυραμὶς
ἰσοϋψὴς τῷ κών. B. O. — lin. 33. μέρος ab. B. O. — Lin. 5. τινα p. 226.
ἀποτμημ. edd. omn. — lin. 14. ἀνεστάτω ἀπ' αὐτοῦ πυραμίς B.
O. — lin. 28. καὶ γων . . . ἴσαι abs. B.; item V., in quo etiam
sequentia ὀρθ. γ. ἑκάτ. non leguntur. — lin. 30. ἐστὶ ab. B. O. —
Lin. 4. 10. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 11. Καὶ ἐπειδὴ διὰ B. O. — p. 227.
Lin. 3. ἐπὶ τὸ K εὐθείας V. P. — lin. 4. ἀνιστάντες ἐπὶ τῶν τριγ. p. 228.
B. O. — lin. 5. τὴν αὐτὴν κορυφ. V. — lin. 10. Καὶ ὡς ἐν V. —
lin. 12. ἡ ab. edd. omn. — lin. 14. μὲν item. — lin. 16. τὸ ab. B.
O. — lin. 18. πολύγ. ab. V. — lin. 19. 26. 32. σημεῖον ab. V. —
lin. 19. 23. μὲν item. — lin. 22. καὶ ab. B. O. — lin. 25. ἐστιν
ab. B. O. — lin. 28. πολύγ. ab. V. — lin. 31. ἐστιν ab. V. —
Lin. 6. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 7. μέν ἐστιν abs. V. — lin. 8. σημεῖον p. 229.
ab. V. — lin. 9. ἐστιν ab. V. — lin. 22. ὁ ab. edd. omn. — κῶνος
ἄρα B. O. — lin. 31. οὕτως ab. B. V. — lin. 34. Post αὐτῷ ad-
ditur in B. O. P. ἐδείχθη γὰρ πᾶς κῶνος κυλίνδρου τρίτον μέρος
τοῦ τὴν αὐτὴν βάσιν ἔχοντος αὐτῷ καὶ ὕψος ἴσον. Hoc Scholiastae
cujusdam certe additamentum, quod abest in V. abjiciendum existi-
mavi. — Lin. 3. ὅπ. ἔδ. δ. abs. B. — lin. 7. οὕτως ab. B. — lin. p. 230.
11. τῷ ἄξονι V. P. — τὸ ΠΘ ἐπίπεδον abs. B. O. — lin. 12. ἐστιν
ab. B. O. — lin. 16. μὲν ab. V. — lin. 18. Post ΖΞ ΞΜ B. O.
habent: καὶ διήχθωσαν διὰ τῶν ΑΝΞΜ σημείων ἐπίπεδα παράλληλα
τοῖς ΑΒ ΓΔ καὶ νενοήσθωσαν ἐν τοῖς διὰ τῶν ΑΝΞΜ ἐπιπέδοις
περὶ κέντρα τὰ ΑΝΞΜ κύκλοι οἱ ΟΠ ΡΣ ΤΥ ΦΧ ἴσοι τοῖς ΑΒΓΔ
καὶ νενοήσθωσαν κύλινδροι οἱ ΠΡ ΡΒ ΔΤ ΤΧ. Καὶ ἐπεὶ etc. —
lin. 23. — 24. καὶ οἱ ΠΡ etc. V. — lin. 27. ἀλλήλοις ab. B.
O. — καὶ οἱ ΑΝ V. P. — lin. 28. ἴσοι καὶ ἀλλήλ. B. O. — lin.
29. ἴσον τὸ πλῆθος τῷ πλήθει· ὁσαπλ. etc. V. — lin. 31. ἐστιν a
me additum. — Lin. 3. ἴσος ἐστὶ B. O. — lin. 5. ὁ ΚΛ ἄξ. τοῦ p. 231.

KM ἄξ. — καὶ ὁ *ΠΗ* κυλ. τοῦ *ΗΧ* κυλ. B. O. — lin. 7. ὄντων μεγ. B. O. — lin. 11. κύλινδρος ab. B. O. — lin. 21. κύκλων addidi. — lin. 22. ἐστιν ab. B. O. — lin. 27. ἐννοήσθω V. — lin. 31. ἀλλήλοις ab. V. — Lin. 7. τριπλάσιοι (τριπλάσιον B. O.) γὰρ . . p. 232.
τῶν κώνων abs. V. P. — lin. 9. τὸν ab. O. P. — lin. 19. τῶν ab. B. O. — lin. 21. τοῦτ' ἔστιν ὡς B. O. — καί ἐστιν ὡς V. P. — lin. 25. Ἔστιν ἄρα καὶ B. — lin. 29. ἀντιπεπόνθασιν B. O. — ἀντιπεπονθέν V. P. — lin. 32. τὸ *ΜΝ* μεῖζον B. O. — καὶ ab. B. — lin. 33. post *ΠΜ* B. habet καὶ κείσθω τὸ *ΑΚ* ὕψει ἴσον τὸ *ΠΜ*.
— Lin. 3. παραλλήλῳ τοῖς τῶν *ΕΖΗΘ ΡΟ* κύκλων ἐπιπέδοις V. P. p. 233.
— lin. 7. ἄλλος δὲ — κύλινδρος ab. V. — lin. 10. κύλινδρον ab. B. O. — lin. 11. βάσιν ab. V. — lin. 13. κύλινδρον addidi. — lin. 16. καὶ ab. B. O. — lin. 32. ὕψος ab. B. O. — lin. 35. ὕψος ab. V. — Lin. 4. κύλινδρον ab. V. — lin. 6. Τῶν ἴσων etc. tota p. 234.
recapitulatio ab. edd. omn. quae tamen ultima verba ὅπ. ἔδ. δ. reservarunt. — lin. 15. τε ab. B. τε καὶ ἀρτιοπλ. ab. O. — lin. 19. εὐθεῖα ab. B. O. — lin. 23. addidi ποτε. — lin. 27. ἐστιν ab. O.
— lin. 31. Ἐὰν δὲ B. O. — lin. 33. τε ab. V. — Lin. 3. ὅπ. ἔδ. p. 235.
δεῖξαι B. — lin. 6. στερεὸν πολύεδρον. — lin. 8. κατὰ τὴν περιφέρειαν. — lin. 16. ἐγένετο B. O. — καὶ ab. B. O. — lin. 23. εὐθειῶν ab. V. — lin. 29. τε ab. V. — lin. 32. ἐπιζευχθεῖσα recte B. O. sed male O. P. ἐπεζευχθεῖσα. — Lin. 6. ἔστωσαν B. O. — p. 236.
lin. 9. ὀρθ. ἐστ. B. O. — lin. 12. *ΒΕΔ* ab. O. P. — *ΒΞΔ* ab. B. — lin. 14. *ΚΞ* ab. B. — lin. 23. κύκλων adjeci. — lin. 35. καὶ ab. B. O. — Lin. 10. ἑκατέρα B. O. — lin 11. καὶ ab. B. O. — lin. p. 237.
21. καὶ ἐπὶ . . ἡμισφαιρίου abs. V. — lin. 22. συγγεγρ. V. — lin. 23. μὲν ab. B. O. — lin. 26. δὴ item — lin. 27. ἐφάπτεται B. O. — lin. 35. ὀρθή ἐστιν ἡ *ΑΨ*, ἡ *ΑΨ* ἄρα B. O. P. sed nostra tuetur V. — Lin. 2. ἑκατέρας O. — lin. 3. ἴσον ἄρα καὶ τὸ B. O. — p. 238.
lin. 4. ἀπὸ τῆς ab. O. — lin. 23. Καὶ ab. V. — ἤχθω mutavi in ἦκται cum linea *ΟΦ* jam adsit. — ἀπὸ τοῦ *ΚΟ* V. — lin. 27. δὴ ab. V. — lin. 29. τῶν item. — lin. 31. Καὶ ἔτι ἐστὶ B. — Καὶ ἔτι O. P. — Nostrum tuetur V. — lin. 32. τῶν ab. B. O. —
Lin. 14. Ψαύει V. — lin. 16. Adest demonstratio altera, quam p. 239.
vide in app. — lin. 26. σφαίρας ab. O. — lin. 30. ἄρα πυραμ. B. O. — Lin. 3. 6. τὸ ab. V. — δὴ ab. V. cet. edd. habent δή. p. 240.
— lin. 9. ἑτέρας ab. V. — lin. 11. καὶ ab B. O. — lin. 12. σφαίρᾳ

item. — lin. 14. ἔχει B. O. — lin. 16. O. P. addunt ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 20. Ἐννοήσθωσαν. — lin. 24. ἡ ΑΒΓ . . . πρὸς τὴν ΕΖ ab. B. O. — lin. 27. τριπλ. λόγ. ἤ. πρ. μείζ. B. V. — lin. 29. ἐννοήσθω ἡ ΑΕΖ τῇ etc. V. — Lin. 6. καὶ ab. B. O. — lin. 7. λόγον ἔχει p. 241. V. — lin. 11. ἄρα ab. V. — lin. 17. ὅπερ ἀδύνατον ab. B. V. — lin. 31. Verba ὡς ἔμπροσθεν ἐδείχθη in V. P. post τῆς ΔΕΖ (lin. 33.) scripta sunt. — lin. 33. τινα ab. B. O. — Lin. 2. τινα p. 242. ab. B. O. — lin. 7. Αἱ ἄρα etc. haec recapitulatio abest in edd. omn. quae tamen habent ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 7. ἡμισείας τετραγώ- p. 243. νου V. — lin. 10. τὸ ΑΓ edd. ceterae. — τῆς ΑΓ V. — lin. 11. τῇ ΑΒ ἡμίσεια B. O. — τῆς ΑΒ ἡμίσεια V. P. ex quo conjectura mea τῇ τῆς ΑΒ ἡμισείᾳ ἴση. — lin. 14. Αναγεγράφθωσαν B. O. — τετράγωνον B. — τετραγώνων O. — lin. 22. τῇ ΑΘ B. O. — lin. 24. τοῦ ΓΘ ab. O. — Lin. 2. διπλ. τοῦ ΓΘ B. O. — lin. 4. ὅλον p. 244. ab. V. — lin. 8. ἄρα ab. V. — lin. 13. γράμμη ab. B. O. — lin. 16. ἡμισείας τετραγώνου B. O. — lin. 24. τοῦ ΑΓ B. O. — lin. 27. ἀπὸ ἑκατ. B. O. — lin. 28. τὸ ἐν τῷ ΑΖ σχῆμα V. — lin. 29. διήχθω ἡ ΒΕ V. — lin. 30. τὸ ἀπὸ . . . πενταπλάσιόν ἐστι ab. B. — lin. 31. τῆς ΑΓ τοῦτ᾽ ἔστι τὸ ΑΖ O. — lin. 33. ἄρα ἐστὶ V. — lin. 34. τῆς bis abest V. — Lin. 7. διπλ. τοῦ ΒΘ B. p. 245. O. — lin. 20. Titulus λῆμμα ab. B. — lin. 23. τῆς ΓΑ διπλῆ. B. O. — lin. 25. πενταπλάσια ἄρα τὰ ἀπὸ τῶν etc. V. P. quam veram lectionem nescio quo errore in textu cum falsa illa, quam habent B. O. permutavi. — lin. 29. διπλασία τῆς ΓΑ B. O. — lin. 31. μεῖζον ab. V. — Lin. 10. τὸ ΑΓ V. — lin. 14. διπλοῦν p. 246. ab. B. O. — lin. 15. ἄρα ab. B. O. — ἐστὶ ab. V. P. — lin. 18. μὲν ab. V. — lin. 19. τὸ δὲ . . . τὸ ΡΣ ab. V. — lin. 26. Ἀλλὰ τὸ . . . ἐστὶν ἴσον ab. V. — lin. 29. ἄρα ab. V. — lin. 30. τετρα-γώνου· ὁ ΞΟΠ ἄρα . . . ἐστὶ τὸ ΔΝ abs. B. O. — lin. 33. τὸ ἄρα ΔΝ . . . ΗΖ τετραγώνου ab. V. P. — Lin. 12. τὸ ΑΓ edd. omn. p. 247. — lin. 28. καὶ τὰ ΓΚ ΘΗ τετράγωνα τριπλάσιά ἐστι τοῦ ΘΚ τετραγώνου καὶ ἐστιν ὁ ΑΜΝ γνώμων καὶ τὰ etc. V. — Lin. 7. p. 248. αὐτῇ ἴση V. P. — lin. 8. ὅλη ἡ B. O. — lin. 12. σημεῖον ab. B. O. — lin. 13. κείσθω ab. V. — lin. 18. οὖν item. — lin. 20. τῆς item. — lin. 21. τῶν item. — lin. 22. τὸ μὲν . . τῷ . ., τὸ δὲ . . τῷ B. O. — lin. 25. ἴσον ἐστ. ὅλ. τῷ ΑΕ B. O. — Lin. 10. ἐπὶ τὸ Δ p. 249. abs. V. — lin. 11. τῇ ΒΑ ἡμίσεια ἡ ΑΛ edd. omn. cf. ad p. 243.

lin. 11. — lin. 18. ῥητὸν γάρ ἐστιν ἡ B. O. — ἐστιν ab. V. — lin. 23 ἐστιν addidi. — lin. 24. ἄρα ab. B. — lin. 27. τῷ ἀπὸ τῆς ΑΓ ἴσον ἐστὶν V. — Lin. 12. αἱ δύο αἱ V. — lin. 25. γωνία ab. V. — p. 250.
lin. 26. καὶ ab. B. O. — lin. 28. γωνίαις item. — lin. 31. ἐστι ab. B. O. — Lin. 9. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπο ΑΒΓ. Ἔστι V. — lin. 11. p. 251.
καὶ πλευρὰ V. — lin. 12. καὶ ὅλη V. — lin. 17. ἐστι ab. B. O. — lin. 18. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. — lin. 30. σημεῖον ab. B. O. — lin. 31. ἴσα εἰσὶ B. O. — Lin. 6. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 8. γωνίας ἐκτὸς . . p. 252.
ΑΒΘ τριγώνου ab. V. — lin. 9. ἐπειδὴ B. O. — lin. 16. ἄρα γωνία abs. V. — lin 19. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 33. τῶν ab. B. — τὸν ab. O. — κύκλον ab. O. — Lin. 8. κατὰ τὸ Γ ab. V. — lin. p. 253.
10. καὶ ἔστω item. — lin. 17. ἐστὶν a me additum. — lin. 22. ἐγγραφομένου ab. V. — lin. 23. καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΔ γωνίᾳ τῇ etc. B. O. — lin. 24. γωνίαν ab. B. O. — lin. 31. λοιπῇ ab. V. — lin. 32. ἐστὶ ab. B. O. — Lin. 2. ἄρα ab. V. — lin. 3. εὐθεῖα ab. p. 254.
B. O. — lin. 4. τμῆμα αὐτῆς B. O. — κατὰ τὸ Γ ab. V. — lin. 12. καὶ εἰς τὸν αὐτὸν πεντ. etc. B. O. — lin. 13. πεντάγ. ἐγγεγρ. ἰσόπλ. B. O. — lin. 17. τὸ Ζ σημεῖον V. P. — lin. 26. Πενταγώνου γὰρ B. O. — Lin. 7. μὴν καὶ ab. O. — μὲν καὶ V. P. — B. p. 255.
totum comma Ἀλλα . . διπλῇ omisit. — lin. 8. περιφερείᾳ ab. V. — lin. 11. ἐστι ab. V. — lin. 16. καὶ item. — lin. 20. τῆς ab. V. — lin. 21. ἄρα καὶ ἡ V. — lin. 26. τε ab. V. — ἡ πρὸς τὸ Α V. — lin. 30. ΚΑ εὐθεῖα B. O. — Lin. 9. ἀνάλογος B. P. — lin. p. 256.
13. ἡ ΑΒ ab. V. P. — lin. 15. τὸ Ζ σημεῖον edd. omn. — lin. 22. ἐστί ab. B. O. — lin. 23. ἀνάγονται B. — lin. 25 δὴ ab. O. — lin. 26. ἄρα ἡ ΑΓ V. P. — lin. 30. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 34. Ἀλλ. ὡς B. O. — Lin. 13. 14. τῆς ab. V. — lin. 16. τεμνομένης p. 257.
V. — lin. 18. τῷ ΔΓ B. O. — lin. 27. ἐστὶ ab. B. O. — lin. 28. Pro λόγον γὰρ . . . τῆς ΚΖ V. habet δυνάμει μόνον. — lin. 35. ἀπὸ ΚΜ V. — Lin. 3. ἐστὶν ab. B. O. P. — lin. 7. ἡ καλουμένη p. 258.
ἀποτομὴ a me adjecta sunt. — lin. 8. ἐστὶν in edd. cet. abest. — lin. 9. Ὧι δὴ μεῖζον P. ex V. — lin. 11. ἴσον ἐστὶ B. — lin. 12. δύναται τῇ Ν O. P. Nos secuti sumus ed. B. — lin. 15. μήκει ab. B. V. — lin. 25. ἀσύμμ. B. — lin. 31. γίνεσθαι V. — lin. 32. τριγώνῳ ab. B. O. — lin. 34. ἐστιν ab. V. — Lin. 8. τριγώνου μία p. 259.
πλευρὰ δυνάμει etc. edd. omn. — lin. 13. ἡ ab. B. O. — lin. 15. μέγ. ἴσι. B. O. — ἑξάγωνος B. — lin. 16. πλευρὰ ab. V. —

lin. 18. ἐστὶ recepi ex V. qui non habet ἄρα. — lin. 23. τῆς ab. V. — lin. 28. ἐκ τεσσάρων τριγ. ἰσοπλ. ab. B. O. — Lin. 3. γεγράφθω B. O. — lin. 11. τοῦ ab. O. — lin. 12. ἀφαιρέσθω V. — lin. 26. post ΔΓ B. O. P. habent ὡς ἑξῆς δειχθήσεται. Argumentatio ipsa addita est in B. et V. ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς etc. quae mutavi in ἐπειδήπερ ἐστὶν etc. — Haec Verba usque ad lin. 30. πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ desunt in O. P. — lin. 28. 30. τῆς ab. V. — lin. 29. ἄρα a me adjectum. — lin. 29. τὴν ab. V. — Lin. 3. συνίσταται in edd. omn. cf. pag. — lin. 4. τριγώνων ἴσων καὶ ἰσοπλ. B. O. — lin. 7. ἡμιολία ἐστὶ δυνάμει V. — lin. 9. τῇ ΚΘ rectius B. — lin. 18. γίνεται B. — lin. 29. γίνεσθαι V. — lin. 24. ὁμοίων P. vit. typogr. — γινομένων edd. cet. omn. — lin. 25. ἐστιν V. — lin. 33. ἡμιολία ἄρα V. — lin. 10. δυνάμει ab. B. V. — lin. 11. ἐστὶν ab. V. — lin. 19. γίνεσθαι V. — lin. 24. ὁμοίων γινομένων P. ὁμοίως γινομένων B. — lin. 25. ἐστιν V. — lin. 33. ἡμιολία ἄρα V. — Lin. 4. Praeferendum videtur τὸ εἶναι, nisi putas, articulo τὴν ante ὁμοιότητα supervacaneum reddi illud τὸ. — lin. 10. δυνάμει ab. V. B. — lin. 14. ἢ καὶ τὰ πρότερα V. — lin. 34. τῆς ab. V. — Lin. 3. ἐστιν ab. O. B. — lin. 8. κορυφὴ V. — lin. 9. συνέσταται scripsi cum V. editt. cet. habent συνίσταται. — lin. 18. πάλιν a me additum est. — lin. 22. γωνίας ἴσας B. O. — lin. 25. 32. ἐστι ab. B. O. — Lin. 5. ὅπ. ἔδ. π. ab. B. — lin. 7. συνεστήσασθαι V. — lin. 8. ἢ καὶ τὴν πυραμίδα V. — lin. 11. τριπλῆ B. O. — lin. 16. ἑκάστην πλευρὰν B. O. — lin. 19. ἀφῃρήσθωσαν ἀπὸ ἑκάστης B. O. — lin. 22. συνίσταται edd. omn. — lin. 25. τριπλασία B. O. — lin. 31. διὰ τῶν ΕΗ σημείων. — lin. 34. κἂν B. O. — Lin. 4. δὴ ab. V. P. — B. et O. habent δὲ. — lin. 6. πάλιν ab. V. — lin. 16. ἐστὶ a me additum. — lin. 19. ἡ ΒΔ τῇ ΚΕ B. O. — lin. 23. δοθείσῃ ab. V. — lin. 26. δεῖξαι B. — Lin. 9. αἱ ΕΛ . . . καὶ ὁμοίως exciderunt V. — lin. 10. καὶ ab. B. — lin. 11. αἱ additum a me. — pro ΛΜ . . . ΟΛ B. habet ΕΖ ΖΗ . . . . ΚΕ. — lin. 12. δεκάγωνος B. — lin. 21. ἐπιζευγνύουσαι ἐπὶ τ. ἀ. μ. εὐθ. V. P. — lin. 23. τέ ἐστι καὶ π. B. O. — lin. 26. περιγραφομένου male in edd. omn. — lin. 27. πενταγώνου δὲ ἰσοπλ. B. — lin. 29. ἄρα καὶ τὸ B. O. — Lin. 2. πεντάγωνος B. O. — lin. 4. τριγώνων ab. V. — lin. 9. τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ. — lin. 28. ἐστι ab. B. O. — Lin. 2. ἐστὶ ab. B. O. — τὸ ab. V. P. —

p. 260. p. 261. p. 262. p. 263. p. 264. p. 265. p. 266. p. 267. p. 268

lin. 3. δὴ ab. B. O. — lin. 6. συνίσταται edd. omn. — lin. 11. Ἐπειδὴ B. O. — lin. 11. ἐστιν recepi ex V., qui non habet μέν. — lin. 20. τὸ ἄρα . . . διὰ τοῦ Λ ab. V. — lin. 31. τοῦ Π pro τοῦ Λ edd. omn. — Lin. 9. τετραπλασίων B. O. P. Nos secuti sumus p. 269.
Cod. V. — lin. 10. πενταπλασίων ἄρα ἡ ΑΒ τῆς ΒΓ ἐστὶν B. O. — πενταπλασίων ἄρα ἐστὶν etc. P. Nos secuti sumus cod. V. — lin. 15. ἡ ΔΒ ἴση B. O. — lin. 16. τοῦ κύκλου τοῦ ΕΖΗΘΚ B. O. — lin. 32. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. V. — Lin. 6. τοῦ ante ἐξαγ. ab. p. 270.
B. O. — lin. 8. ὅπ. ἔδ. δ. add. V. — lin. 17. σημεῖα ab. V. — lin. 19. τετμήσθωσαν αἱ ΝΟ ΟΞ ΘΠ εὐθεῖαι B. O. — lin. 20. λόγον addunt edd. omn. post μέσον. — lin. 24 ἐκκείσθωσαν V. P. — lin. 30. αὐτῆς ab. V. — Lin. 9. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 13. ἐστ. p. 271.
ἴσ. B. O. — lin. 17. μέρη τοῦ κύβου B. O. — lin. 29. πλευραῖς ab. V. — lin. 31. καὶ ab. V. — Lin. 5. τὴν ΟΣ B. O. male. — p. 272.
lin. 18. 19. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 18. τῇ ΒΝ B. O. — lin. 27. ἐστὶ bis. B. O. — lin. 29. τέ ab. B. O. — lin. 34. τε ab. V. — lin. 34. ὃ καλεῖται δωδεκάεδρον abs. B. O. — Lin. 7. Addunt edd. Δέ- p. 273.
δεικται ἐν τῷ παρατελεύτῳ θεωρήματι τοῦ ια βιβλίου, quod glossema est. — lin. 8. ἡμίσεια πλευρὰ τοῦ κύβου B. O. — lin. 18. ἐστι ab. B. O. — lin. 25. τῆς τοῦ κύβου πλευρᾶς B. O. — Lin. 5. p. 274.
τῆς δὲ . . . ἡ ΟΣ. Haec desunt in B. O. — lin. 9. ἐστιν ab. B. O. — οὕτως ab B. — lin. 10. τοῖς ὡσαύτως B. O. — lin. 14. τῶν ΝΡ ΣΞ O. — lin. 21. Peyrardus notat, haec se legisse in infima pagina codicis Vat. et post verba τοῦ κύβου in textu aliorum duorum codicum: ῥητὴ γὰρ ἡ ΑΒ ἄκρον καὶ μέσον λόγον τετμήσθω κατὰ τὸ Γ. καὶ ἔστω μεῖζον τὸ ΑΓ· προσκείσθω δὲ ἡ ΑΔ ἡμίσεια τῆς ΑΒ· ῥητὴ ἄρα καὶ ἡ ΑΔ. Καὶ ἐπεὶ πενταπλάσιον τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΑ· αἱ ΓΔ ΔΑ ἄρα ῥηταί εἰσι δυνάμει μόνον σύμμετροι· ἀποτομὴ ἄρα ἡ ΑΓ. Ῥητὴ δὲ ἡ ΑΒ, τὸ δὲ ἀπὸ ἀποτομῆς παρὰ ῥητὴν παραβαλλόμενον πλάτος ποιεῖ ἀποτομήν· ἀποτομὴ ἄρα ἐστιν ἡ ΒΓ· ἑκάτερος ἄρα τῶν ΑΓ ΓΒ ἀποτομή ἐστι, προσαρμόζουσα δὲ τῆς μὲν ΑΓ ἡ ΑΔ τῆς δὲ ΓΒ ἡ ΓΔ. Haec a scholiaste quodam explicandi causa adscripta esse primo visu nemo non judicabit. — lin. 23. 25. ἡ καλουμένη ab. V. — lin. 25. ὅπ. ἔδ. δ. ab. V. B. — lin. 29. V. add. ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 3. μὲν ab. p. 275.
V. — lin. 8. ΑΕ ΕΒ ab. P. — lin. 17. τῆς ab. O. B. — lin. 19. τριπλῆ B. O. — lin. 29. ἐστὶ ab. B. O. — τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ B. —

Lin. 3. τῇ *ΑΒ* ἴσῃ B. O. — lin. 19. ἐστὶν ab. B. O. — lin. 28. p. 276.
ἡ *ΚΑ* ἄρα . . . ἀναγέγραπται ab. B. O. — lin. 32. τῆς σφαίρας ἡ
διάμ. B. O. — lin. 33. τοῦ ab. B. O. — Lin. 18. τριπλασίων B. p. 277.
O. — lin. 31. ἄλογοι γάρ εἰσιν ab. B. — Lin. 22. ἐστιν B. O. p. 278.
Adest demonstratio altera, quam vide in app. — ibidem vide
Lemma quoddam in edd. hic additum. — lin. 32. συνίσταται V. —
τεσσάρσιν scripsi cum V. pro vulg. τέτρασιν. — Lin. 27. οὕτω B. p. 279.
O. — Lin. 6. 8. πέμπτης B. O. — Lin. 8. Peyrardus notavit haecce: p. 280. 281.
„Hoc ἄλλως in margine Cod. V. est exaratum; deest autem in co-
„dicibus 2466 et 2342, et in omnibis aliis est in textu.“ — lin. 9.
ἔστω δὲ τὸ *Γ* ἔλασσον abs. V. — lin. 12. καὶ ἔστω ab. V. B. —
lin. 14. γινέσθω V. — ἄν a me additum est. — lin. 17. γινέσθω
V. — ἄν ab. V. — lin. 20. τῷ *ΑΔ* . . τὸ *ΞΝ* B. O. — lin. 23.
τῷ *ΑΔ* . . τὸ *ΝΑ* B. O. — lin. 24. *ΞΑ*. Ἀλλὰ καὶ τῷ *ΔΑ* ἴσον
ἐστὶ τὸ *ΑΚ* O. quae lectio a Gregorio inventa esse videtur, cum
in ed. B., quam secutus est, linea hoc loco typographi errore ex-
ciderit. — Lin. 12. 13. 14. οὕτως ab. V. B. — lin. 14. καὶ alterum p. 282.
abs. B. O. — lin. 15. Μετρεῖ δὲ καὶ τὸ *Ε* τὸ *Α*· ἐπεὶ abs. V. —
lin. 18. ὅπ. ἔδ. δ. ab. B. O. — lin. 20. Peyrardus notat: „In edi-
„tionibus B. et O. variae partes hujus ἄλλως insertae sunt in varias
„partes propositionis 9; in codd. autem V. et 2466 hoc ἄλλως
„exaratum est in margine; in codicibus omnibus sic ordo se ha-
„bet, 1, prop. 9. corollarium; 2, lemma prop. 10; 3, ἄλλως prop.
„9; 4, prop. 11; 5, prop. 10.“ — lin. 21. μήκει ab. V. — lin. 23.
ποιείτω, τὸν δὲ *Δ* O. — lin. 27. οὕτως ab. V. — lin. 31. πεποίη-
κεν, τὸν δὲ *Γ* O. — Lin. 3. O. add. ὅπερ ἔδ. δεῖξαι. — lin. 6. p. 283.
μήκει ab. V. — lin. 10. ἀνάλογον εἰσι V. — lin. 11. 12. Quamvis
in ed. O. adnotatur Verba Ὡς . . . τὸν *Π* desiderari in codd. mss.
ea in iis, quos Peyrardus inspexit non desiderantur, excepto 2466.
— lin. 16. ὡς γὰρ . . τὸν *Ζ*. Ad haec quoque Gregory eandem
adnotationem adscripsit; sed auctore Peyrardo unicus Cod. 2466
haec verba non habet. — οὕτως ab. V. — lin. 19. ὅπ. ἔδ. δ. ab.
V. — lin. 23. γὰρ ab. V. — lin. 26. εἰσὶ ab. V. — lin. 27. ἐπεὶ οὖν
V. P. — lin. 32. ἁπλῶς ὃν ἕτερός τις ἀριθμὸς πρὸς ἕτερόν τινα
ἀριθμὸν, σύμμετρά ἐστι τὰ τετράγωνα, τουτ᾽ ἔστιν αἱ εὐθεῖαι ἀφ᾽
ὧν ἀνεγράφησαν δυνάμει O. — lin. 34. αἱ μὲν μήκει σύμμετροι
πάντως καὶ δυνάμει, αἱ δὲ O. — lin. 37. ὅτι αἱ O. — δυνάμει ab.

V. — lin. 38. Ἐπειδήπερ O. — lin. 39. τετράγωνος ἀριθμ. πρ. τετρ. ἀρ. V. — lin. 40. τῷ μήκει V. P. — Lin. 2. καὶ δύνανται μήκει O. — lin. 5. γάρ εἰσι σύμμετρ. O. — lin. 11. Ἐπεὶ δὴ O. — lin. 12. εἰσ. συμμ. ab. V.; qui habet σύμμ. post δύναμει. — lin. 12. δηλαδὴ pro δὴ O. — lin. 15. αἱ γὰρ μήκει O. — lin. 19. αὐτῇ ab. O. — lin. 21. Hoc alterum Scholium adest in omn. codd. Peyrardi. — lin. 22. γὰρ ab. O. — lin. 30. οὕτως ab. O. — lin. 33. O. add. ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 8. ἐστὶ O. — lin. 9. ἐστιν ab. O. — lin. 10. ἡ Δ ἐστὶν O. — lin. 11. Hoc Scholium reperitur auctore Peyrardo in cod. 2342, et nihil aliud est nisi propositio 22 aliter demonstrata. — lin. 29. ἐστιν V. P. — Lin. 6. ὅπ. ἔδ. δ. ab. O. — lin. 10. καὶ ab. V. — lin. 13. μήκει καὶ δυνάμ. συμμ. O. — lin. 15. Hoc Scholium reperitur in codd. Vat. 2466. 2345. 2342. 2531. — lin. 22. μέσαι ab. O. — lin. 24. οὕτω O. — Lin. 14. Quae uncis inclusa sunt in hoc lemmate, non reperiuntur in ed. B. — lin. 27. Hoc lemma reperitur in cod. 2345. O.: „Lemma „hoc non agnoscunt pleraque exemplaria.“ B.: „Non habet exem„plar alterum.“ — Lin. 6. Hoc lemma reperitur in codd. 1038. 2345. 2531. „Lemma hoc non agnoscunt codd. Mss.“ O. — „non „habet alterum exemplar.“ B. — lin. 26. Hoc lemma reperitur in codd. 2345. 2342. 2531. „λῆμμα εἰς τὸ λγ̄ non habet exemplar „alterum“ B.; pro hoc Lemmate in cod. V. hocce reperitur. Ἐὰν ὦσι δύο εὐθεῖαι, ἔσται ὡς ἡ μία πρὸς τὴν ἑτέραν οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρας καὶ μίας αὐτῶν πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρας καὶ τῆς ἑτέρας. p. 284. p. 285. p. 286. p. 287. p. 288.

Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΒ ΒΓ· λέγω ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ, ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ.

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Β πρὸς ὀρθὰς τῇ ΑΓ ἡ ΒΔ καὶ συμπεπληρώσθω τὸ ΑΕ παραλληλόγραμμον.

Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΔΓ· καὶ ἔστι τὸ μὲν ΑΔ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΑΒ, τουτ᾽ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΒ, ἴση γὰρ ὑπόκειται ἡ ΒΔ τῇ ΓΔ· τὸ δὲ ΔΓ τὸ ὑπὸ τῶν ΒΔ ΓΒ τουτ᾽ ἔστι τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΓΑ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΑΓ ΓΒ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι. — Lin. 4. Hoc lemma reperitur in codd. 2342. 2531. „Lemmata duo (β. γ.) sequentia desiderantur in nostris „codd. mss. nec ab Euclide esse arbitramur“ O. — lin. 21. Hoc Scho- p. 289.

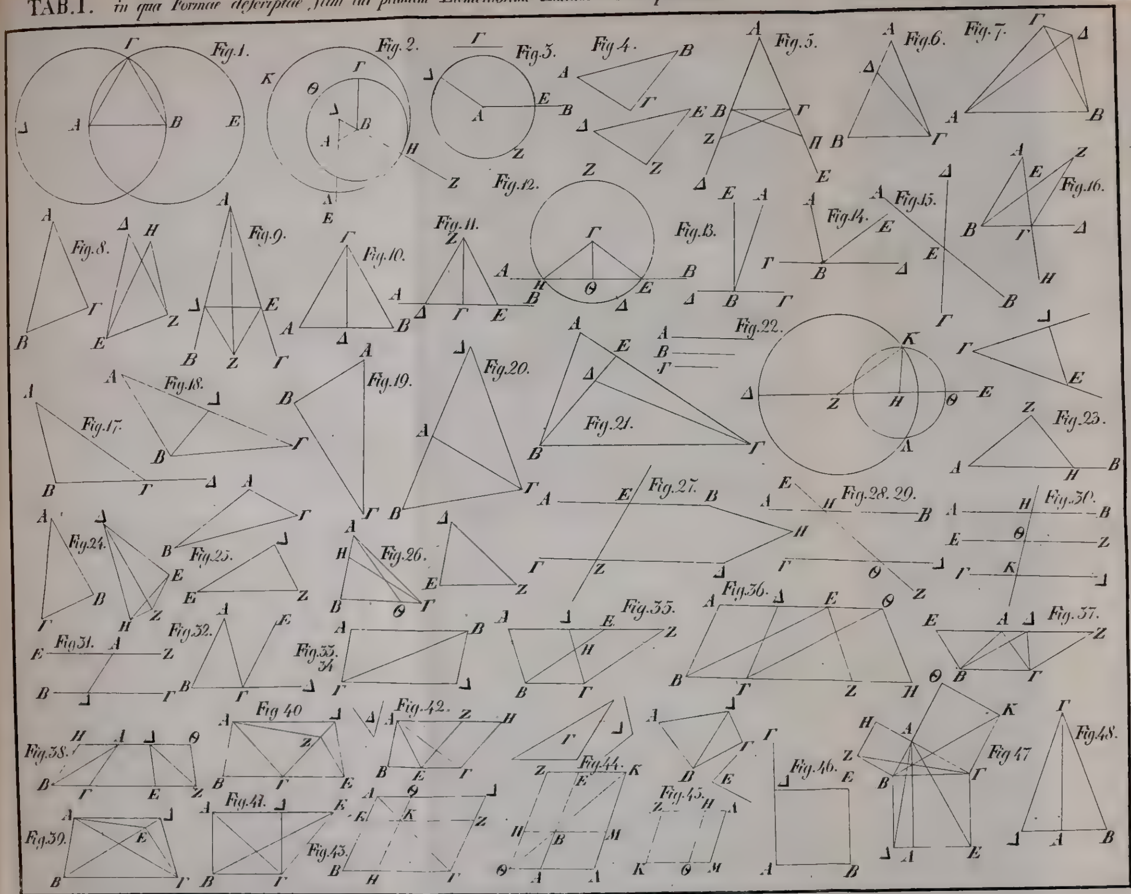
lium reperitur in codd. V., 2344. 2346. 2547. 2343. — lin. 27. Hoc
scholium „addit exemplar alterum“ B.; deest in codd. 2466. 2345.
2531. — lin. 28. alterum τὸ ab. O. — lin. 31. ἔσται V. — Lin. 3. p. 290.
V. add. ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 6. Hoc scholium deest in codd. 2466.
2345. 2531. — lin. 8. μέσων V. — lin. 9. καὶ ab. O. — lin. 17. 20.
τῆς ab. O. — lin. 19. μείζ. εἶναι V. — lin. 23. Hoc scholium deest
in codd. 2466. 2345. 2531. — lin. 24. καλεῖται αὐτὴ V. — lin. 26.
τὸ ῥητὸν ab. V. — V. add. ὅπ. ἔδ. δ. — lin. 29. Hoc schol. deest in cod.
2466. — lin. 31. τά τε συγκείμενα V. — lin. 32. τοῦ δὶς V. — V.
add. ὅπ. ἔδ. δ. — Lin. 2. Hoc schol. deest in cod. 2466; lemma autem p. 291.
ipsum non desideratur. — lin. 8. ἑκάτερα . . ὑποκείσθω δὲ abs. V.
— ed. P. habet καὶ ὑποκ. — lin. 11. καὶ λοιπὴ V. P. — lin. 12.
ἄρα ἐστὶν V. P. — lin. 15. μὴν ab. V. P. — ἐστὶ ab. V. P. —
lin. 22. V. P. add. ὅπ. ἔδ. δ. — O. add. εἴπερ συναμφότερα ἴσα
ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ. — lin. 26. Deest hoc scholium in Cod. 2531.
— lin. 30. δύναται ab. V. — lin. 34. ἐστ. σύμμ. P. O. nos cum
V. — Lin. 4. Hoc scholium abest in omnibus codicibus, quos p. 292.
Peyrardus inspexit — lin. 33. Hoc corollarium adest in omnibus.
— Lin. 13. Ἐπεὶ οὖν τὰ εἰρ. O. — lin. 15. δῆλον ὡς pro ὥςτε O. p. 293.
— lin. 23. ἡ ab. V. — lin. 29. ἐστὶν ἡ ΑΓ πρώτη. — Lin. 4. Peyr. p. 294.
adnotavit: „Hoc ἄλλως reperitur in codd. Vat., 2344. 2531. 2547.
„2345 post propositionem 116 et habet in capite: Ἡ τῇ ἐλάσσονι . . .
„(cf. 37 hujus appendicis), in ceteris reperitur post propositionem
„106.“ — lin. 5. ἔστω ab. V. — lin. 7. Κείσθω ῥητὴ ἡ ΓΔ V. —
lin. 9. τετάρτη ab. O. — Τὸ δὲ V. — lin. 11. 12. (bis) 14 (bis)
ἐστιν ab. O. — lin. 16. ῥητῆς τῆς ΖΕ, καὶ ἀπ. τετ. τῆς ΖΘ V. —
lin. 17. Ἐὰν δὲ χωρίον . . . τετάρτης ab. O. — lin. 19. ἄρα ab. V.
— lin. 22. Peyr. adnotavit: „Hoc ἄλλως reperitur in codd. V, 2344.
„2531. 2547. 2345 post ἄλλως praecedens et habet in capite Ἡ τῇ
„μετὰ . . . (cf. 28. huj. append.), in ceteris codd. reperitur post
„prop. 107.“ — lin. 23. Ἔστω ἡ V. — lin. 36. ἡ μετὰ V. —
Lin. 4. „Hoc ἄλλως adest in omnibus codd.“ P. — lin. 5. γίγνον- p. 295.
ται V. — lin. 6. οὐδεμία τῶν προτέρων ἡ αὐτὴ V. — lin. 12. ἐστι
ab. O. — lin. 13. ἐστὶν ab. O. — lin. 16. τῆς ab. V. — Lin. 2 p. 296.
Hanc propositionem Euclidis non sapere acumen, quis non videat?
Verba Προκείσθω ἡμῖν δεῖξαι plane abhorrent ab enunciandorum
theorematum ratione. Res ipsa autem jam nono hujus libri theo-

remate probata est, nec longa hoc loco demonstratione eget. Cum
enim diagonalis quadratum, ut facile intelligitur, duplum sit qua-
drati ipsius, haec quadrata rationem habent numerorum non qua-
dratorum, quamobrem latera eorum (i. e. linea diagonalis et latus
quadrati) inter se incommensurabilia sunt secundum nonam, uti
diximus, propositionem. Theonis aut alius cujusquam additamen-
tum in hoc theoremate facile cognoscas. Praeterea Peyrardus nos
docet, hanc propositionem in codicibus numero non signari. —
lin. 10. ἐστι ab. V. — lin. 12. τὸν ab. V. — lin. 15. καὶ ἔχει λό-
γον B. O. — lin. 16. μόνας ab. V. — lin. 17. ἐστιν ab. B. O. — lin. 22.
ἐστιν (prius) ab. O. — lin. 23. 29. ἂν ab. V. — lin. 26. ἀριθμ.
ab. V. — lin. 27. αὐτοῖς ab. V. — lin. 28. ἐστιν (prius) ab. V. —
lin. 31. διπλάσιος ὁ V. — lin. 32. τετραπλ. ἐστὶν ὁ B. O. — τοῦ ante
EZ ab. V. — lin. 33. διπλάσιος δὲ . . τοῦ *H* ab. B. O. — lin. 36.
ἀσυμμ. ἄρα ab. V. — Lin. 3. Δεικτέον . . . τῇ πλευρᾷ. Haec abs. p. 297.
V. P. — lin. 5. Ἔστω γὰρ B. O. — lin. 7. σύμμετρος· καὶ γεγονέτω
ab. V. — lin. 9. οἱ *EZ H* in fine exciderunt B. O. — lin. 12. ὡς ἄρα
ὁ . . πρὸς τὸν . . . οὕτως ὁ ἀπὸ τῆς *EZ* V. — lin. 14. διπλάσιον
V. — lin. 15. 17. τοῦ ab. V. — lin. 28. „Hoc scholium, quod in
„omnibus adest codicibus, Euclidis esse non potest, utpote ex
„sequentibus perdet.“ P. — lin. 31. εὐθειῶν ab. O. — lin. 33.
ἐπίπεδον pro εἶδος habet V. — Lin. 3. 5. 13. καὶ ab. O. — lin. 8. p. 298.
χωρ. ἀσυμμ. B. O. — τοῖς ab. O. — lin. 17. ὡς ab. V. — lin. 18.
κῶνοι ἀλλήλοις. — lin. 21. γέγονε διὸ V. — ἐπὶ γραμμῶν ἐστι συμμ.
O. — lin. 24. Legas: prop. 22. — 33. ἴσαι post *HK* habet O.
— Lin. 4. ἐστὶ O. — lin. 6 μείζονές εἰσι V. — lin. 12. ἐστ. ἴσ. p. 299.
O. — lin. 17. ἐστι ab. V. — lin. 20. μείζονές εἰσι τῆς *AΓ* O. —
lin. 21. ἐστιν ab. O. — lin. 31. τῇ *AΞ* εὐθείᾳ ἴση ἡ *AΓ* O. —
Lin. 3. ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ τῆς *AΓ* καὶ τῷ ἀπὸ τῆς *Γ* B. O. — p. 300.
lin. 4. τῆς *AΓ* ὑπερέχει V. — lin. 6. μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς *AΞ*
V. — lin. 5. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς etc. O. — lin. 7. μεῖζον τοῦ ἀπὸ
τῆς *ΞA* V. — lin. 8. προύκειται O. — lin. 12. „Haec sunt in
„codd. V., 2346. 2342. sed in cod. 2342, glossema marginale congruit
„cum vulgato.“ P. — Lin. 8. Codd. V. et 2346 cum iis consen- p. 301.
tire quae in textum recepit P. (p. 211.) docemur ab editore P. —
lin. 21. ἐστιν ab. O. — Lin. 3. 4. ἐστι ab. O. — lin. 5. 10. (bis) p. 302.
τῆς ab. V. — lin. 6. ἄρα ab. V. — lin. 14. „Hoc ALITER adest

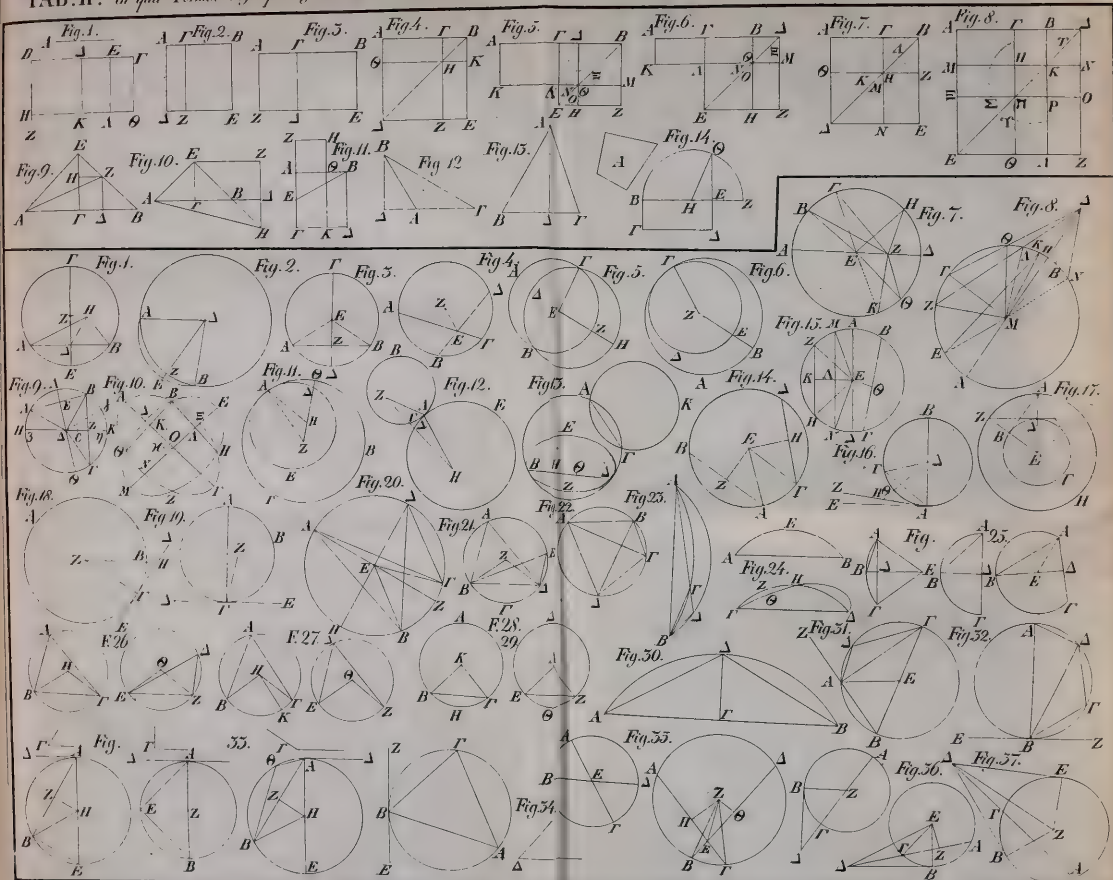
„in Codd. V., 1038. 2344. 2342. 2346. 2547. deest autem in ed.
„O., in codd. 2466. 2345. 2531. 2343. In codd. 1038 et 2344.
„deest quintum theorema, cujus ALITER locum tenet.“ P. —
Lin. 8. „In codd. 2346. 2547. 2343. analyses et syntheses quinque p. 303.
„priorum theorematum conjunctim subsequuntur quintum theorema,
„et in codd. V., 2344 (per errorem) sextum theorema; in cete-
„ris vero codd. et in edd. B. O. analyses et syntheses separatim
„subsequuntur theoremata, ad quae spectant.“ — lin. 10. *Tί οὖν . .*
σύνθεσις; abs. O. — lin. 11. *μὲν οὖν* ab. O. — lin. 13. *Σύνθεσίς*
ἐστι λῆψις O. — lin. 14. *ἐπί τι ἀληθὲς ὁμολογούμενον* V. — lin.
15. *τοῦ εἰρημένου* O. — *ἡ* ab. V. P. — *ἀναγραφῆς* O. — lin. 24.
26. *τῆς* ab. V. — Lin. 4. *ἐστι* ab. O. — *τῆς* ab. V. — lin. 6. *Σύν-* p. 304.
θεσις τοῦ αὐτοῦ O. — lin. 8. *τῆς* ab. V. — lin. 9. *τῶν* ab. V. —
lin. 18. *Τοῦ εἰρημένου* O. — *ἄνευ καταγρ.* ab. O. — lin. 24. *γὰρ*
ab. V. — lin. 29. *δὶς* ab. O. — lin. 31. 32. 33. *τῆς* ab. V. — lin.
34. O. add. *διὰ τὴν ὑπόθεσιν.* — Lin. 7. *τῆς* ab. V. — lin. 11. p. 305.
ἐστὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΑΒ ΒΓ O. — lin. 21. *τὸ ΑΓ* O. — lin. 27. *τὸ*
ἄρα V. — Lin. 3. 13. 21. *τὸ ἄρα* V. — lin. 3. *ἀπὸ τῆς* ab. V. — p. 306.
lin. 14. *ἅπαξ* ab. V. — lin. 22. *τριπλασίονά ἐστι* O. — lin. 23.
τετράγωνα ab. V. — Lin. 9. *οὖν* ab. V. — lin. 12. *ἄρα* ab. V. — p. 307.
lin. 13. *τε* ab. V. — lin. 30. *ἐστιν* ab. V.

Berolini, typis Haynianis.

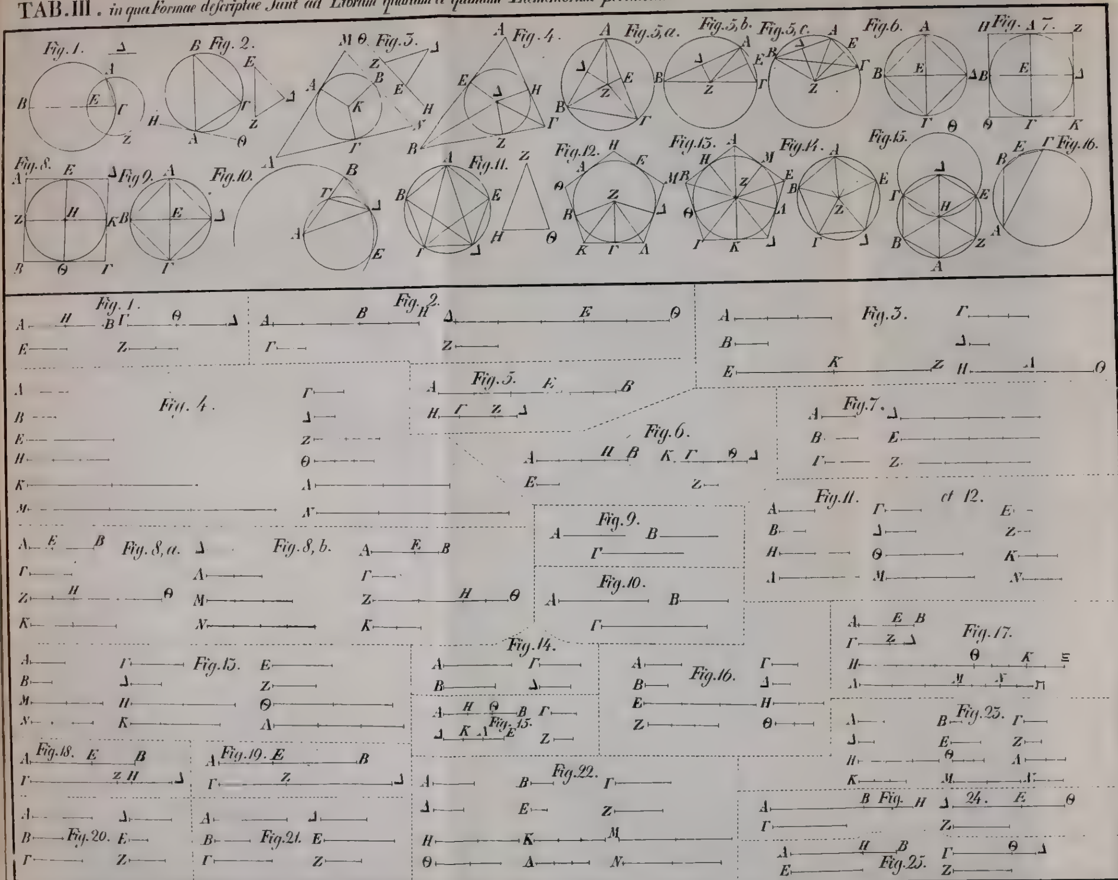
TAB. I. *in qua Formae descriptae sunt ad primum Elementorum Euclidis librum pertinentes.*



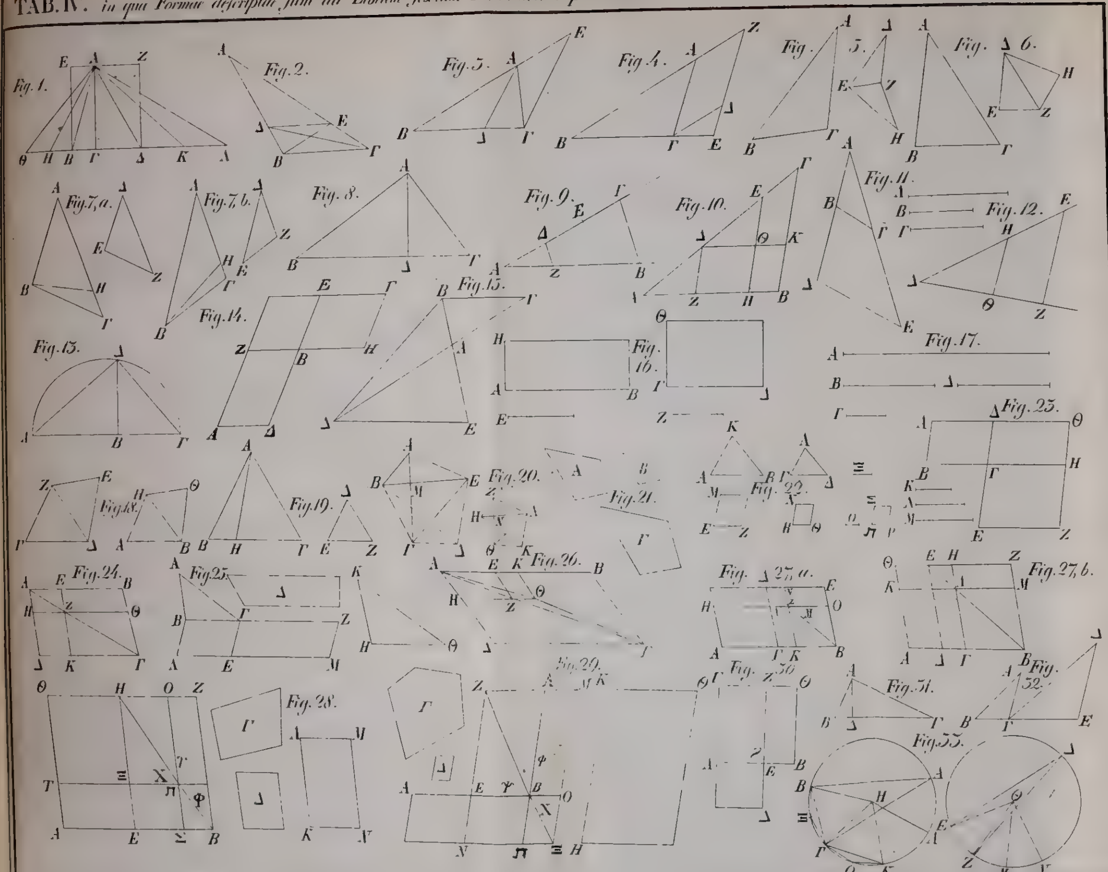
TAB. II. *in qua Formae descriptae sunt ad Librum secundum et tertium Elementorum pertinentes.*



TAB. III. *in qua Formae descriptae sunt ad Librum quartum et quintum Elementorum pertinentes.*

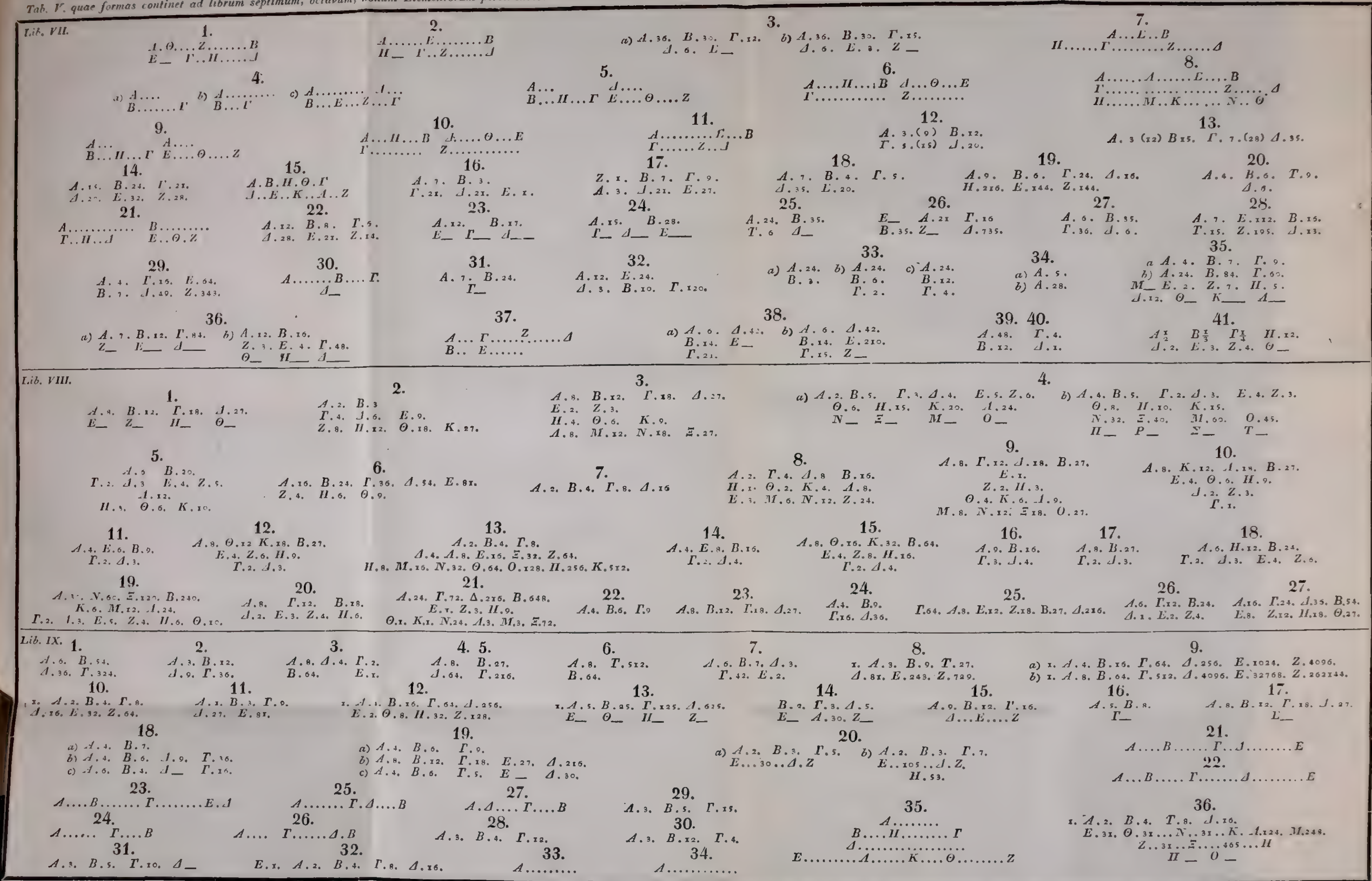


TAB. IV. *in qua Formae descriptae sunt ad Librum sextum Elementorum pertinentes.*

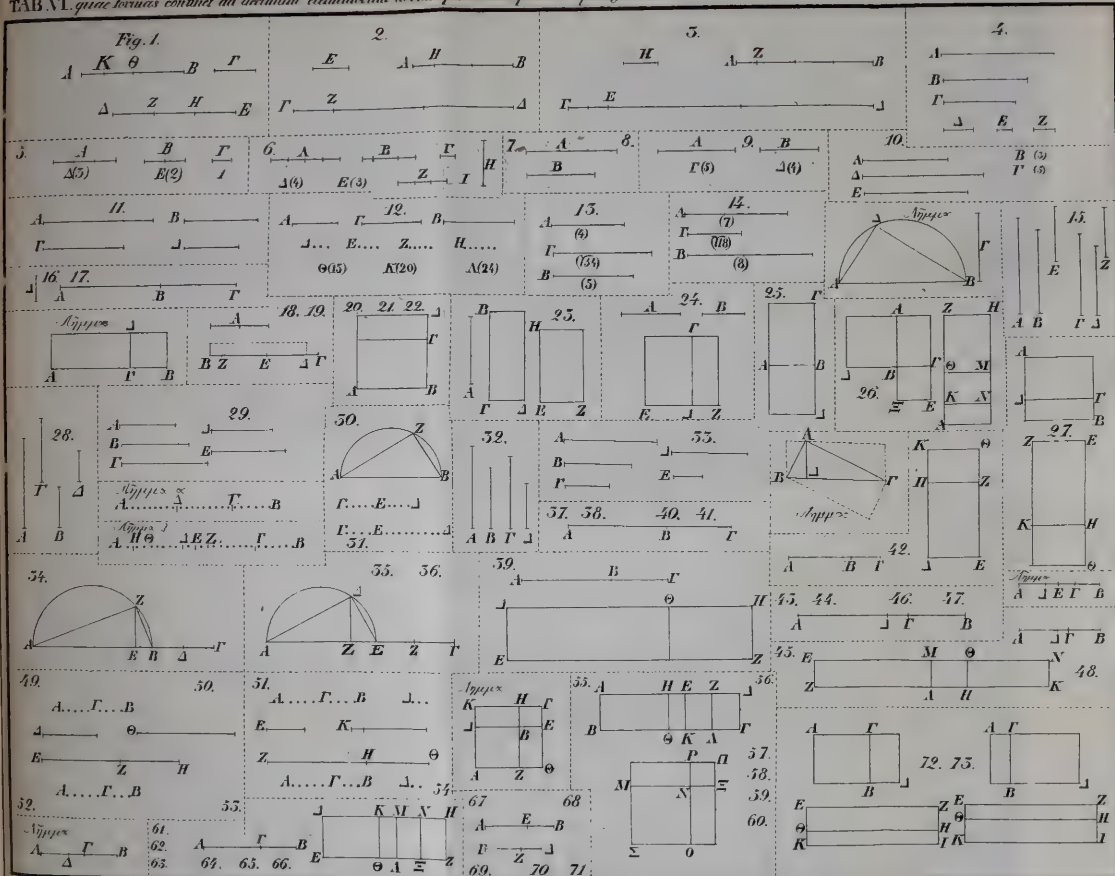


Herwig litho:

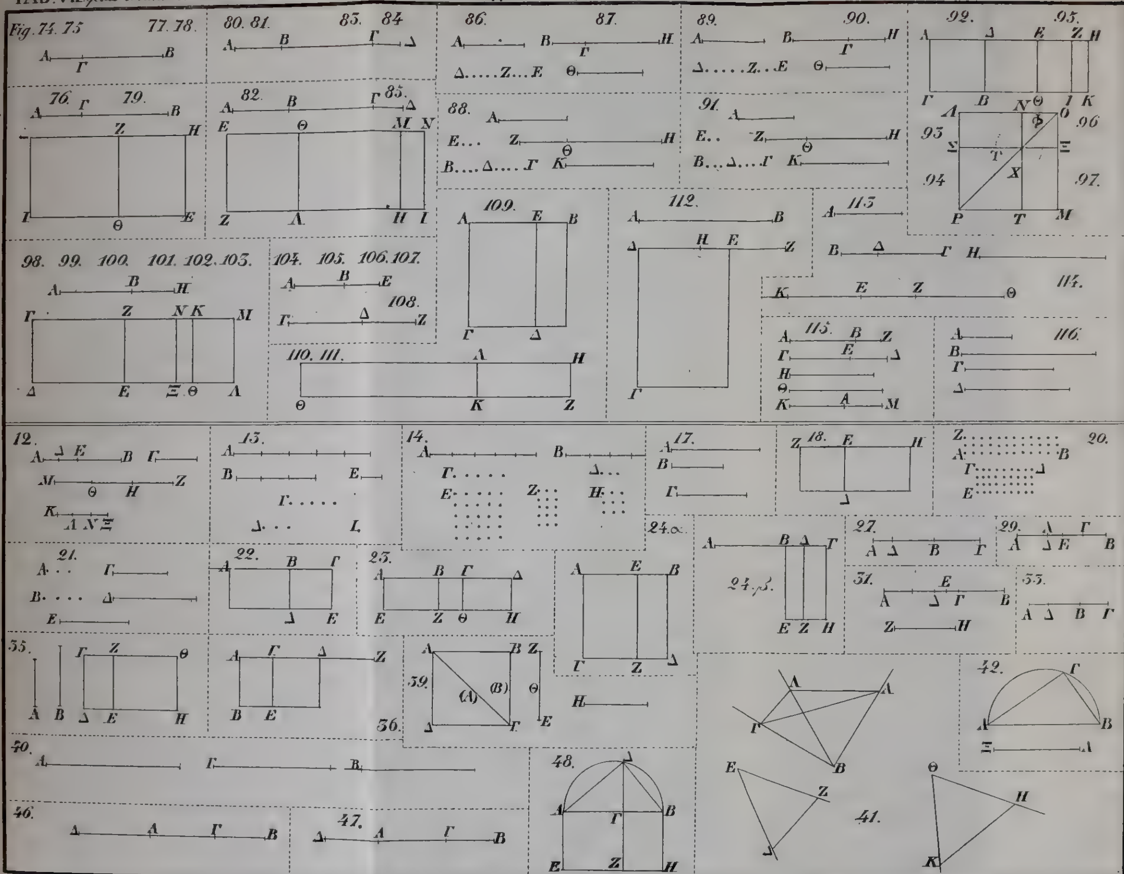
Tab. V. quae formas continet ad librum septimum, octavum, nonum Elementorum pertinentes.



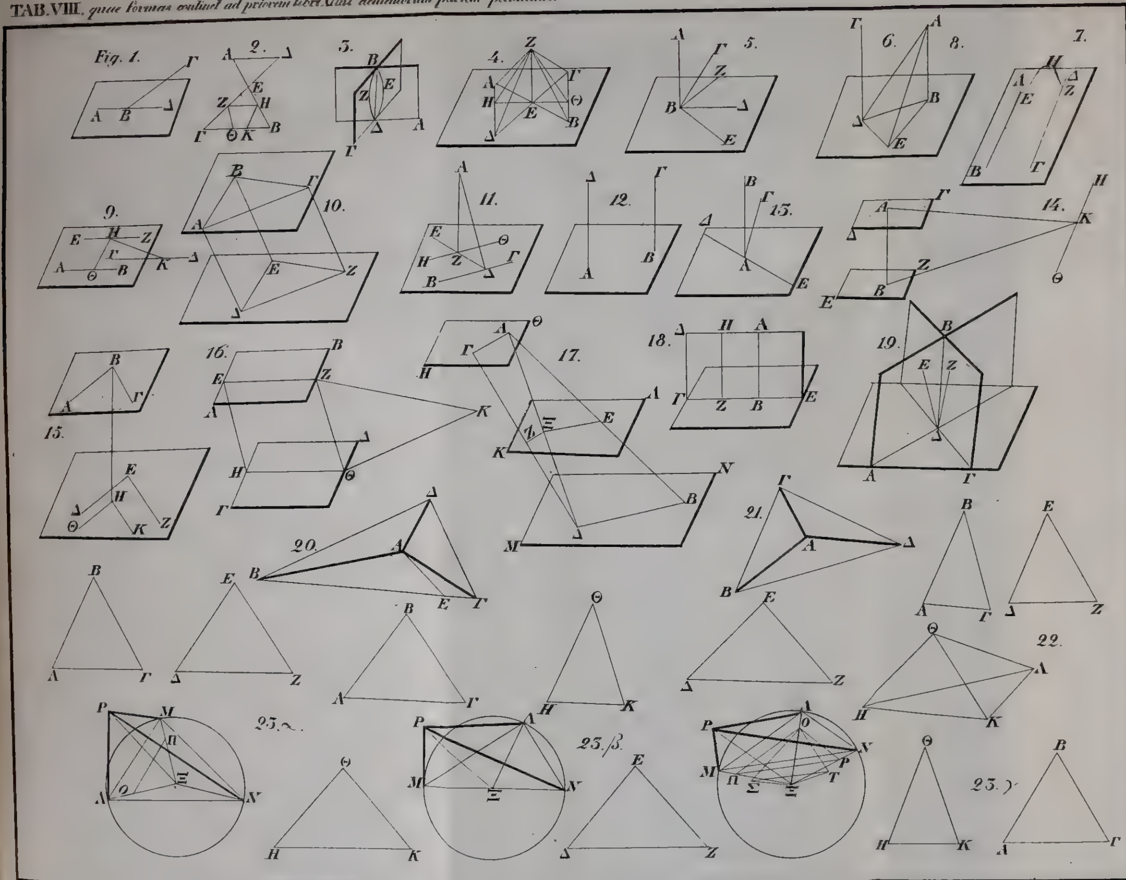
TAB. VI. *quae formas continet ad decimum elementorum librum pertinentes priores septuaginta tres.*



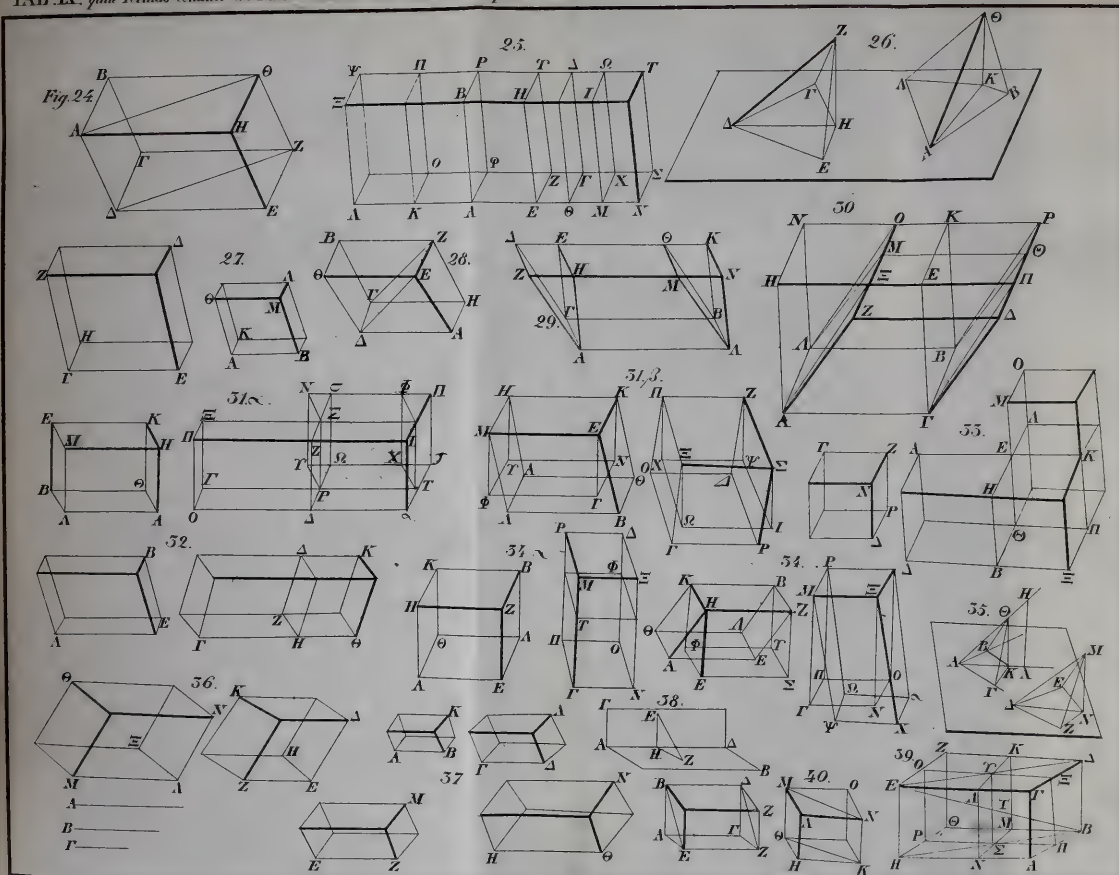
TAB. VII. *quae formas continet ad finem decimi elementorum libri et appendicem quintam pertinentes.*



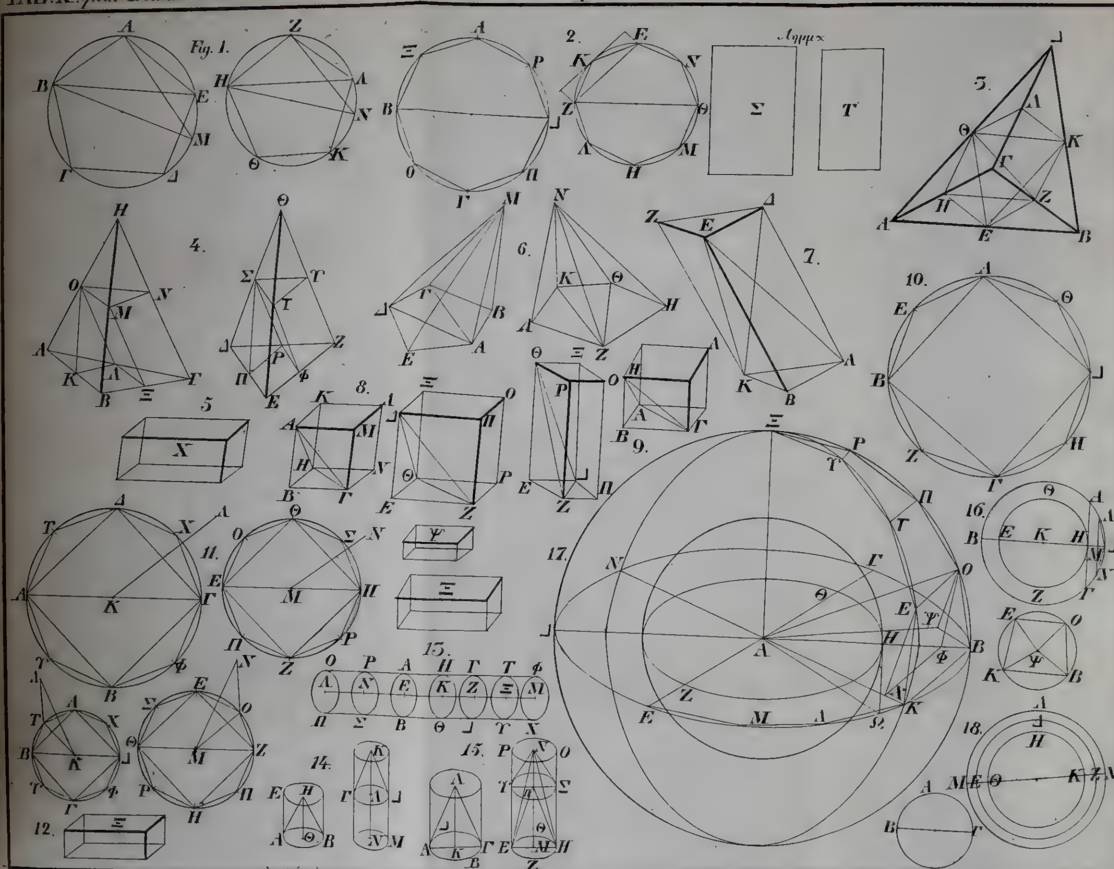
TAB. VIII. *quae formas continet ad priorem libri XIᵐⁱ elementorum partem pertinentes.*



TAB. IX. *quae formas continet ad finem undecimi libri elementorum pertinentes.*



TAB. X. *quae formas continet ad duodecimum elementorum librum pertinentes.*



TAB. XI. *quae formas continet ad tertium decimum elementorum librum pertinentes.*

